ΛΥΣΗ

α) Η περίοδος της συνάρτησης είναι $\mathrm{T}=\frac{2\pi}{3}$, η μέγιστη τιμή της είναι $\max f(x)=2+1=3$, και η ελάχιστη τιμή της είναι $\min f(x)=-2+1=-1$.

β)

i. Από την γραφική παράσταση της ημιτονοειδούς συνάρτησης g, παρατηρούμε ότι παρουσιάζει μέγιστο για $x=-\frac{\pi}{2}$ και το επόμενο μέγιστο για $x=\frac{3\pi}{2}$. Άρα η περίοδος της συνάρτησης είναι $\mathrm{T}=\frac{3\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2\pi$, οπότε $\beta=1$. Η καμπύλη προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $\alpha\eta\mu x$ κατά 1 μονάδα προς τα πάνω, άρα $\gamma=1$. Επίσης

$$\begin{aligned}&g\left(\frac{3\pi}{2}\right)=3\Leftrightarrow\\&\alpha\cdot\eta\mu\frac{3\pi}{2}+1=3\Leftrightarrow.\\&\alpha\cdot(-1)=2\Leftrightarrow\\&\alpha=-2\end{aligned}$$

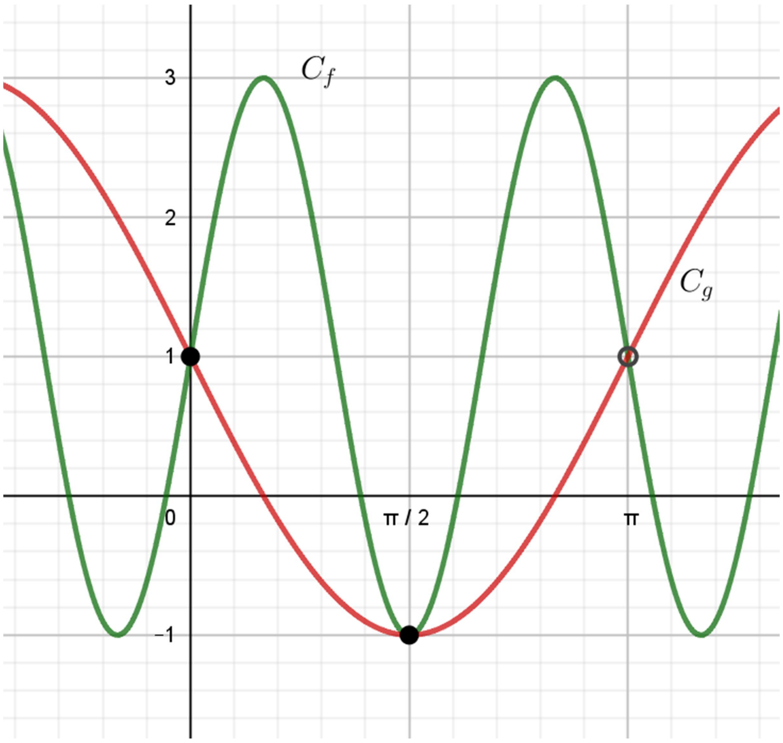
Τελικά $g(x)=-2\eta\mu x+1$.

ii. Η εξίσωση γίνεται:

$$\begin{aligned}&f(x)=g(x)\Leftrightarrow\\&2\eta\mu 3x+1=-2\eta\mu x+1\Leftrightarrow\\&\eta\mu 3x=-\eta\mu x\Leftrightarrow\\&\eta\mu 3x=\eta\mu(-x)\Leftrightarrow\\&\begin{cases}3x=2\kappa\pi-x\\ \text{ή}\\ 3x=2\kappa\pi+(\pi+x)\end{cases},\kappa\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Δηλαδή: $\begin{cases}x=\frac{\kappa\pi}{2}\\ \text{ή}\\ x=\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\end{cases},\kappa\in\mathbb{Z}$. Επειδή $x\in[0,\pi)$, για $\kappa=0$ στον πρώτο τύπο λύσεων προκύπτει $x=0$ και στον δεύτερο τύπο λύσεων προκύπτει $x=\frac{\pi}{2}$ (που προκύπτει και από τον πρώτο τύπο λύσεων για $\kappa = 1$). Από τις άλλες τιμές του $\kappa \in \mathbb{Z}$ προκύπτουν λύσεις οι οποίες δεν ανήκουν στο διάστημα $[0, \pi)$.

Η γραφική λύση της εξίσωσης φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Τελικά ή εξίσωση έχει δυο λύσεις στο $[0, \pi)$, τις $x = 0$ και $x = \dfrac{\pi}{2}$.