ΛΥΣΗ

α) Αν υπήρχε γωνία x τέτοια ώστε $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x = 0$, τότε από τη βασική τριγωνομετρική ταυτότητα $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$ θα είχαμε $0+0=1$, το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς δεν υπάρχει γωνία x τέτοια ώστε $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x = 0$.

β) Αν $\sigma\upsilon\nu x = 0$ τότε από την εξίσωση $\sqrt{3}\cdot\eta\mu x = 3\cdot\sigma\upsilon\nu x$ θα είχαμε και $\eta\mu x = 0$, το οποίο όμως όπως δείξαμε στο α) είναι άτοπο. Συνεπώς $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$.

Με $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$ έχουμε ισοδύναμα

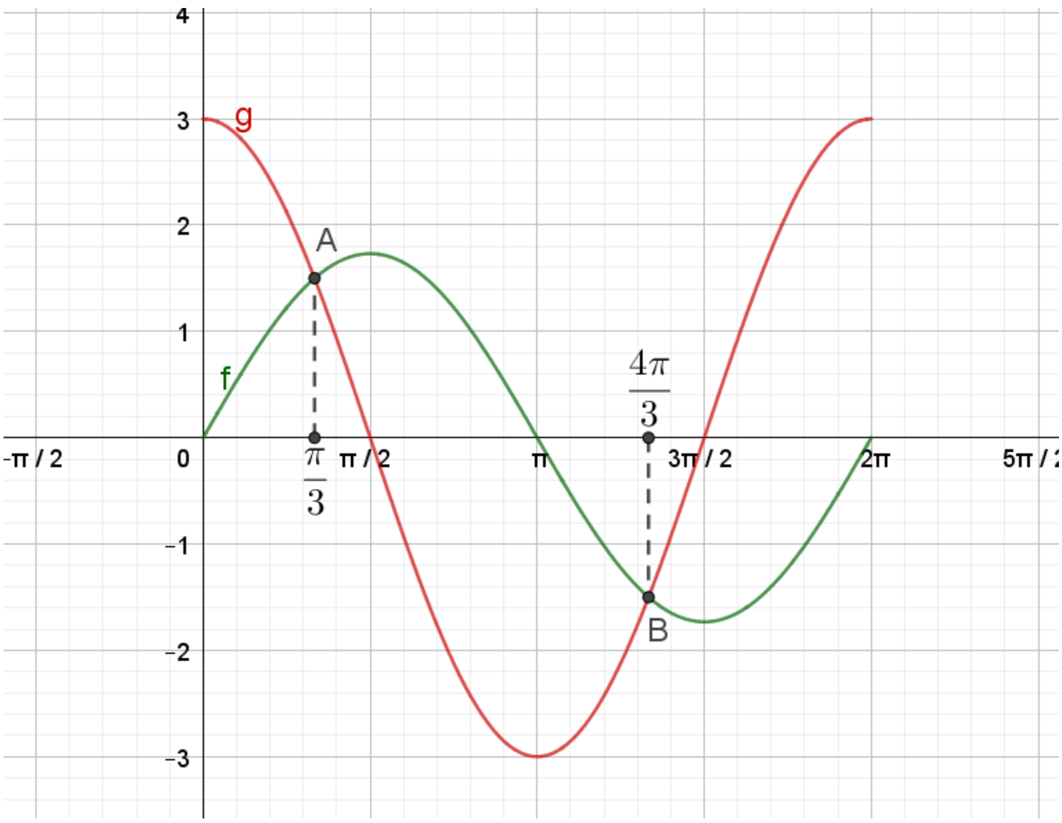
$$\sqrt{3}\cdot\eta\mu x = 3\cdot\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{3}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \varepsilon\phi x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \varepsilon\phi x = \varepsilon\phi\frac{\pi}{3}$$

η οποία στο διάστημα $[0, 2\pi]$ έχει λύσεις τις $x = \frac{\pi}{3}$ και $x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$.

γ) Με βάση τον παρακάτω πίνακα τιμών

x	0	π/2	π	3π/2	2π
$f(x) = \sqrt{3}\cdot\eta\mu x$	0	$\sqrt{3}$	0	$-\sqrt{3}$	0
$g(x) = 3\cdot\sigma\upsilon\nu x$	3	0	-3	0	3

οι ζητούμενες γραφικές παραστάσεις φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Όπως βλέπουμε στο παραπάνω σχήμα οι γραφικές παραστάσεις των f,g τέμνονται στα σημεία Α και Β οι τετμημένες των οποίων είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=g(x) \Leftrightarrow \sqrt{3}\cdot \eta\mu x = 3\cdot \sigma\upsilon\nu x$, που όπως βρήκαμε στο ερώτημα β) είναι $\frac{\pi}{3}$ και $\frac{4\pi}{3}$ αντίστοιχα. Αυτή είναι η ζητούμενη γραφική ερμηνεία.

δ) Η ανίσωση $\sqrt{3}\cdot \eta\mu x < 3\cdot \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0,2\pi]$, γραφικά σημαίνει να βρούμε για ποιες τιμές του x στο διάστημα $[0,2\pi]$, η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g. Από το παραπάνω σχήμα βλέπουμε ότι αυτό συμβαίνει για $x \in \left[0,\frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3},2\pi\right]$.