ΛΥΣΗ

α) Η ευθεία AB έχει εξίσωση της μορφής $(\varepsilon): y=\alpha x+\beta$. Το σημείο $\mathrm{A}\left(1,-\frac{3}{4}\right)$ είναι σημείο της (ε), άρα:

$$-\frac{3}{4}=\alpha\cdot 1+\beta \qquad (1).$$

Το σημείο $\mathrm{B}(4,-3)$ είναι σημείο της (ε), άρα:

$$-3=\alpha\cdot 4+\beta \qquad (2).$$

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2):

$$\begin{cases} -\frac{3}{4}=\alpha\cdot 1+\beta \\ -3=\alpha\cdot 4+\beta \end{cases} \overset{(-)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3\alpha=-3+\frac{3}{4} \\ 4\alpha+\beta=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=-\frac{3}{4} \\ 4\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+\beta=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-\frac{3}{4} \\ \beta=0. \end{cases}$$

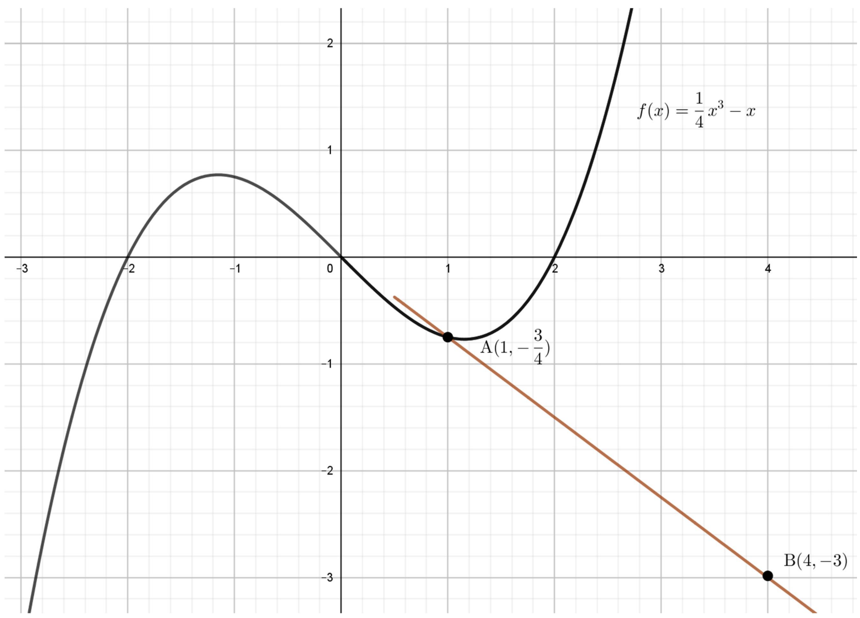
Άρα η ευθεία AB έχει εξίσωση $(\varepsilon): y=-\frac{3}{4}x$.

β)

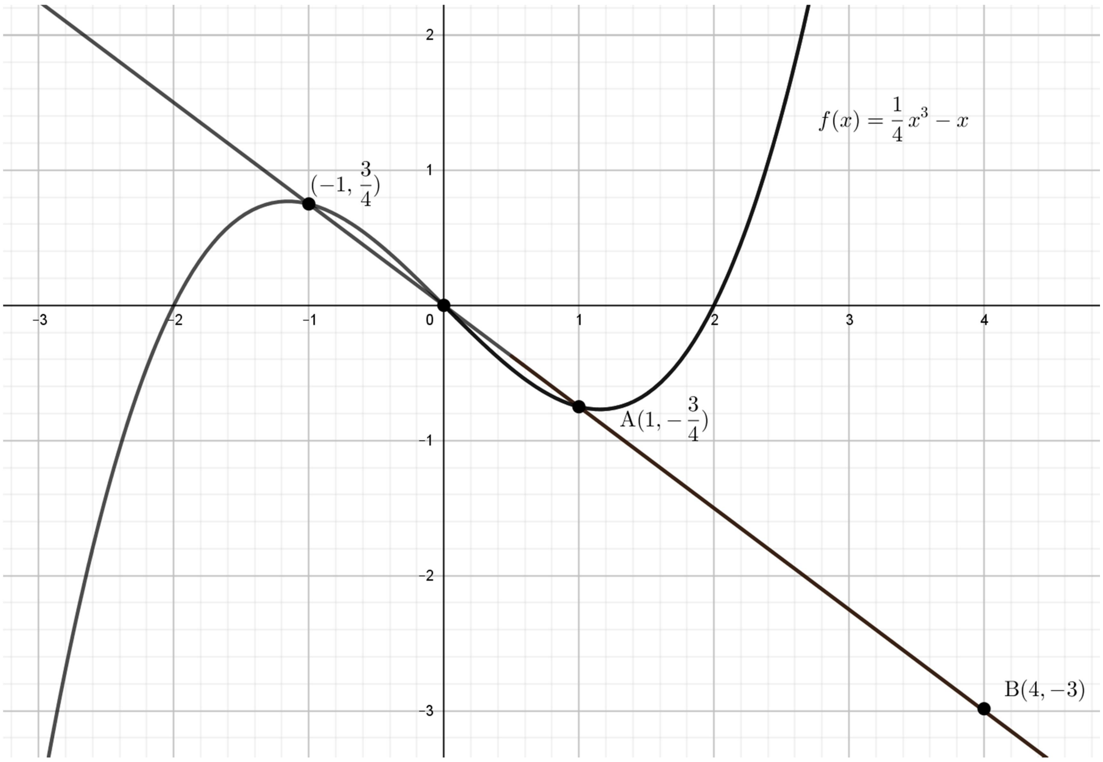
i. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει και $-x\in\mathbb{R}$. Έχουμε:

$$f(-x)=\frac{1}{4}(-x)^3-(-x)=-\frac{1}{4}x^3+x=-\left(\frac{1}{4}x^3-x\right)=-f(x).$$

ii. Στο βi) αποδείξαμε ότι $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή ότι η f είναι περιττή. Συνεπώς η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων $(0,0)$:



γ) Εξαιτίας της συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f ως προς το $(0,0)$, το σημείο $\left(-1,\frac{3}{4}\right)$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση η οποία διέρχεται και από το $(0,0)$. Όμως τα σημεία αυτά ανήκουν και στην ευθεία AB. Άρα τα κοινά σημεία της ευθείας και της καμπύλης είναι τα $\left(1,-\frac{3}{4}\right)$, $(0,0)$ και $\left(-1,\frac{3}{4}\right)$.



Εναλλακτικά, θα λύσουμε την εξίσωση $\frac{1}{4}x^3 - x = -\frac{3}{4}x$. Έχουμε ισοδύναμα:

$$\frac{1}{4}x^3 - x = -\frac{3}{4}x \Leftrightarrow$$
$$x^3 - 4x + 3x = 0 \Leftrightarrow$$
$$x^3 - x = 0 \Leftrightarrow$$
$$x\left(x^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$x = 0 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -1.$$

Άρα τα κοινά σημεία είναι τα $\left(1,-\frac{3}{4}\right)$, $(0,0)$ και $\left(-1,\frac{3}{4}\right)$.