ΛΥΣΗ

α) Η f είναι περιττή και $f(-1)=2$. Αλλά , $f(-1)=-f(1)$ δηλαδή $f(1)=-f(-1)$, οπότε έχουμε $f(1)=-2$.

Η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και $f(-1)>f(1)$, οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Από την ισότητα $f(-x)=-f(x)$ που ισχύει για όλα τα x, αφού η f είναι περιττή, με $x=0$ παίρνουμε:

$$f(-0)=-f(0)\Rightarrow f(0)+f(0)=0\Rightarrow 2f(0)=0\Rightarrow f(0)=0$$

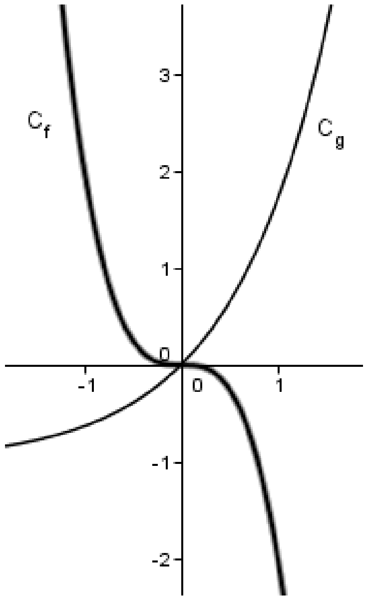
Άρα η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή O.

γ) Η f είναι γνησίως φθίνουσα και ισχύει $f(0)=0$, οπότε:

- Αν $x>0$, τότε $f(x)<f(0)=0$, οπότε $f(x)<0$.
- Αν $x<0$, τότε $f(x)>f(0)=0$, οπότε $f(x)>0$.

Παρατηρούμε ότι $f(0)=0$ και $g(0)=e^0-1=1-1=0$, οπότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν κοινό σημείο το O.

Γεωμετρικά, η μοναδικότητα του κοινού σημείου αιτιολογείται από το γεγονός ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, η g γνησίως φθίνουσα και έχουν κοινό το σημείο O. Ένα ενδεικτικό σχήμα είναι το διπλανό.



Αλγεβρικά, αν $x>0$ τότε έχουμε $f(x)<0$ και $g(x)=e^x-1>0$ οπότε $f(x)<0<g(x)$, ενώ αν $x<0$ τότε $f(x)>0$ και $g(x)=e^x-1<0$ οπότε $f(x)>0>g(x)$.

Επομένως, οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δεν έχουν άλλο κοινό σημείο πέρα από το O.

δ) Ο τύπος της συνάρτησης h που έχει τη γραφική παράσταση που περιγράφεται στην εκφώνηση είναι

$$h(x)=f(x+2)+1=-2(x+2)^3+1=-2(x^3+6x^2+12x+8)+1$$

$$=-2x^3-12x^2-24x-16+1=-2x^3-12x^2-24x-15$$