1. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο ℜ για την οποία ισχύουν f ΄(x)>0 για κάθε xℜ και f(1)=2. Να δείξετε ότι: **α)** η συνάρτηση g(x)=είναι κυρτή στο ℜ και να βρείτε την εφαπτομένη της Cg στο σημείο της Α(1, g(1)). **β)** αν α>1 τότε (α-1)< **γ)**(x-1)2, για κάθε x1 και (x-1)2, για κάθε x1

**ΛΥΣΗ: α)** η f είναι συνεχής στο ℜως παραγωγίσιμη, οπότε η g είναι παραγωγίσιμη στο ℜ με g΄(χ)=f(x) ⇒ g΄΄(χ)=f΄(χ)>0για κάθε xℜ. Άρα η g είναι κυρτή στο ℜ. Η εφαπτομένη της Cg στο σημείο της Α(1, g(1)), είναι η ψ=2x-2 **β)** επειδή η g είναι κυρτή στο ℜ, θα βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της, δηλ. g(x)2x-22x-2. Η g είναι συνεχής στο [1, α] και παραγωγίσιμη στο (1, α) οπότε από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ξ∈(1, α) ώστε g΄(ξ)==. Είναι f ΄(x)>0 για κάθε xℜ, οπότε η f είναι γνήσια αύξουσα στο ℜ. Άρα για 0≤t≤1<ξ έχω f(t)≤f(1)=2<f(ξ), οπότε ≤2<=f(ξ). **γ)**  Θεωρώ την h(x)=-(x-1)2, για κάθε x1h(x)=-(x-1)2h΄(x)=g(x)-2(x-1) h΄΄(x)=g΄(x)-2 με x1. Η g΄ είναι γνήσια αύξουσα, οπότε g΄(x)g΄(1) g΄(x)2. (x-1)2 -(x-1)2 .

1. Δίνεται η συνάρτηση f με f(x)=2x+3+ **α)** Να δείξετε ότι η ευθεία (ε): ψ=2x+3 είναι ασύμπτωτη της Cf στο -. **β)** Να βρείτε το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου που περικλείεται από την Cf, την (ε), τον άξονα ψ΄ψ και την ευθεία x=λ, λ<0. **γ)** Να βρείτε το Ε(λ) **δ)** Αν το λ ελαττώνεται με ρυθμό 1 μον./s να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε(λ) τη χρονική στιγμή που είναι λ= -ln3 **ΛΥΣΗ: α)** είναι (f(x)-2x-3)= =0, οπότε η (ε) ασύμπτωτη της Cf στο -. **β)** είναι Ε(λ)===ln3-ln(1+2eλ), λ<0 **γ)** είναι Ε(λ)= = **δ)** είναι λ΄(t)=-1 και Ε΄(λ(t))=- . Όταν λ=-ln3, τότε Ε΄= - = = τ.μ./sec
2. Να δείξετε ότι για κάθε νΝ\* και για κάθε x>0, ισχύει: xv-lnx. **ΛΥΣΗ:** θεωρώ την f(x)=χν-lnx- ,χ>0, που είναι παραγωγίσιμη με f΄(χ)=ν- , x>0. Είναι f΄(χ)=0 ⇔ ν- =0 ⇔ χ= , f΄(χ)>0 ⇔ ν- >0 ⇔ χ> , f΄(χ)<0 ⇔ ν- <0 ⇔ χ< , οπότε f(χ)≥ , για κάθε x>0 και >0, για κάθε νΝ\*. Άρα χν-lnx- ≥0, με το «=» να ισχύει για χ=ν=1.
3. Να λυθεί η εξίσωση: 3x+5x=2x+6x (1).

**ΛΥΣΗ:** Παρατηρώ ότι για χ=0 και για χ=1, η (1) ισχύει. Έστω ρℜ ρίζα της (1), με ρ≠0, 1. Τότε: 3ρ-2ρ=6ρ-5ρ= (2). Θεωρώ την f(x)=xρ, x>0 που είναι συνεχής στα [2,3] και [5,6] και παραγωγίσιμη ως εκθετική στα (2,3) και (5,6), με f΄(χ)=ρ, οπότε από Θ.Μ.Τ υπάρχουν ∈(2,3) και ∈(5,6), τέτοια ώστε f΄= και f΄= . Για χ>0 είναι f΄΄(χ)=>0, οπότε η f΄(χ) είναι γνήσια αύξουσα, άρα και «1-1». Αλλά από (2) ⇒ f΄= f΄ ⇔ =, άτοπο. Άρα η (1) έχει ρίζες τις χ=0, χ=1.



1. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της συνάρτησης: f(x)=x1/x, x>0. Μετά να δείξετε ότι, για κάθε vΝ\* ισχύει : . **ΛΥΣΗ:** είναι f΄(χ)==χ1/χ(1-lnx)≥0, x>0.Είναι f΄(χ)=0 ⇔χ=e, f΄(χ)>0 ⇔χ>e, f΄(χ)<0 ⇔χ<e, οπότε f(x)≤f(e)=. Άρα η f είναι γνήσια αύξουσα στο (0, e] και γνήσια φθίνουσα στο [e, +∞) και παρουσιάζει μέγιστη τιμή την f(e)=. Για ν≥3>e ⇒ f(ν)≤f(3) ⇔ ≤ ⇔ ≤. Για ν=1: 1≤, που ισχύει και για ν=2: ≤ ⇔ 23≤32 ⇔ 8≤9, που ισχύει. Άρα ≤, για κάθε vΝ\*.
2. Να δείξετε ότι: xx·ψψ, (1) με x>0, ψ>0 και x+ψ=1.

**ΛΥΣΗ:** Είναι ψ=1-x>0 ⇔ 0<χ<1, οπότε η (1) ⇔ ≥ ⇔ xlnx+(1-x)ln(1-x) ≥ln (2) Θεωρώ την f(χ)= xlnx+(1-x)ln(1-x), 0<χ<1, που είναι παραγωγίσιμη, ως άθροισμα και γινόμενο λογαριθμικής και πολυωνυμικής, με f΄(χ)=lnx+1-ln(1-x)-1=lnx-ln(1-x), 0<x<1. Είναι f΄(χ)=0 ⇔ lnx=ln(1-x) ⇔ χ=1-χ ⇔ χ= , f΄(χ)>0 ⇔ lnx>ln(1-x) ⇔ χ>1-χ ⇔ χ> , f΄(χ)<0 ⇔ lnx<ln(1-x) ⇔ χ<1-χ ⇔ χ< , οπότε f(x)≥f= ln+ln= ln.

1. Να βρείτε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f:ℜℜ και g:(0, +)ℜ, για τις οποίες ισχύουν: g(1)=1, f(g(x))=x και f ΄(g(x))=x για κάθε x>0 **ΛΥΣΗ:** είναι [f(g(x))]΄=f΄(g(x))∙g΄(x) ⟺ 1=xg΄(χ) g΄(χ)=1/χ ⟺ g΄(x)=. Οι f, g είναι συνεχείς στο (0, +∞), οπότε υπάρχει c∈ℜ, ώστε g(x)=lnx+c. Για χ=1: c=1, οπότε g(x)=lnx+1. Θέτω g(x)=u ⇔ lnx+1=u ⇔ lnx=u-1 ⇔ x=, οπότε f(u)=. Άρα f(x)=, x∈ℜ.
2. Να βρείτε τις συναρτήσεις f , οι οποίες είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο ℜ και για τις οποίες ισχύουν: f(0)=2, f ΄(0)=0 και f΄΄(x)=f(x), για κάθε xℜ.

**ΛΥΣΗ:** Είναι f΄΄(x)+f ΄(x)=f(x)+f ΄(x) ⇔ =. Θέτω g(x)=, οπότε g΄(χ)=g(x) ⇔ g΄(χ)-g(x)=0 ⇔g΄(χ)-g(x)=0 ⇔ =0 και επειδή η g(x) είναι συνεχής στο ℜ, θα υπάρχει c∈ℜ, ώστε g(x)=c. Για χ=0: g(0)=2 ⇒ c=2, οπότε g(x)=2. Είναι = 2 ⇔ = 2 ⇔ = και επειδή οι , είναι συνεχείς στο ℜ, θα υπάρχει c∈ℜ, ώστε =+c. Για χ=0: c=1, οπότε =+1 ⇔ f(x)=+, xℜ.

****

1. Να βρείτε τους αριθμούς x>0 και ψℜ όταν ισχύει: 2x+1=3xσυνψ (1) .

**ΛΥΣΗ:** η (1)⇔ 2+=3συνψ. Θεωρώ την f(x)= 2+ , χ>0 και την g(ψ)= 3συνψ. Η f είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞), με f΄(χ)= - = , x>0. Είναι f΄(χ)=0 ⇔ =0 ⇔ χ=1, f΄(χ)>0 ⇔ >0 ⇔ χ>1, f΄(χ)<0 ⇔ <0 ⇔ χ<1, οπότε f(x)≥f(1)=3, x>0, με το «=» να ισχύει για χ=1. Είναι -1≤συνψ≤1 ⇔ -3≤3συνψ≤3 ⇔ g(ψ) ≤3, ψℜ, με το «=» να ισχύει για συνψ=1 ⇔ ψ=2κπ, κ∈ℤ. Άρα χ=1, ψ=2κπ, κ∈ℤ.

1. Δίνεται η συνάρτηση f με f(x)=2α2x3-3(α2+1)x2+6x-6. Να βρείτε τις τιμές του αℜ\* ώστε η f να παρουσιάζει στο 1 τοπικό μέγιστο. **ΛΥΣΗ:** η fως πολυωνυμική είναι παραγωγίσιμη, με f ΄(x)=6(α2x-1)(x-1). Είναι f ΄(1)=0 ⇔ x=1 και x=, για κάθε αℜ\*. Πιθανά ακρότατα είναι οι θέσεις x=1 και x=. Για α=1 ή α=-1, είναι f(x)=2-6+6x-6 και f΄(χ)=6≥0, οπότε η f δεν παρουσιάζει ακρότατο. Για >1 ⇔ α<-1 ή α>1, είναι <1 και f΄(χ)>0 ⇔ χ< ή χ>1 και f΄(χ)<0 ⇔ <χ<1, οπότε η f είναι γνήσια αύξουσα στα και (1, +∞) και γνήσια φθίνουσα στο οπότε στο 1 παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο. Για <1 ⇔ -1<α<1 είναι >1 και f΄(χ)>0 ⇔ χ> ή χ<1 και f΄(χ)<0 ⇔ 1<χ<, οπότε η f είναι γνήσια αύξουσα στα και (-∞, 1) και γνήσια φθίνουσα στο οπότε στο 1 παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Άρα πρέπει -1<α<1, α≠0.
2. **α)** Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο ℜ τότε να δείξετε ότι δεν υπάρχει ξℜ στο οποίο η f να παρουσιάζει ταυτόχρονα τοπικό ακρότατο και σημείο καμπής. **β)** Να δείξετε ότι η f(x)= ex- -x-2006 δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο 0.

**ΛΥΣΗ: α)** έστω ότι η f έχει στο ξℜ ταυτόχρονα τοπικό ακρότατο και σημείο καμπής. Τότε f ΄(ξ)=f΄΄(ξ)=0 και έστω ότι η f είναι κυρτή στο (ξ-δ, ξ) και κοίλη στο (ξ, ξ+δ). Η f΄ είναι γνήσια αύξουσα στο (ξ-δ, ξ) και γνήσια φθίνουσα στο (ξ, ξ+δ), οπότε για χ<ξ ⇒ f΄(χ)<f΄(ξ)=0 και για χ>ξ ⇒ f΄(χ)<f΄(ξ)=0. Άρα f΄(χ)≤0, με το «=» να ισχύει για χ=ξ, οπότε η f είναι γνήσια φθίνουσα στο (ξ-δ, ξ+δ) και έτσι δεν παρουσιάζει ακρότατο στο ξ, άτοπο. Άρα η f δεν έχει στο ξℜ ταυτόχρονα τοπικό ακρότατο και σημείο καμπής. **β)** η f είναι παραγωγίσιμη στο ℜ, με f΄(χ)=-x-1 και f΄΄(χ)=-1. Παρατηρώ ότι f΄(0)=f΄΄(0)=0. Είναι f΄΄(0)>0 ⇔ χ>0, f΄΄(0)<0 ⇔ χ<0 και ορίζεται η εφαπτομένη στο 0, άρα η f έχει σημείο καμπής στο 0, οπότε λόγω του (α), δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο 0.

1. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο ℜ με f΄΄(x)>0 και η συνάρτηση g(x)=. **α)** Να δείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο ℜ και ισχύει g΄(2+x)= g΄(2-x). **β)** Να δείξετε ότι η Cg, έχει ένα μόνο σημείο καμπής το οποίο και να βρείτε. **ΛΥΣΗ: α)** έστω α∈ℜ, τότε g(x)=- . H f είναι συνεχής στο ℜ, οπότε η g είναι παραγωγίσιμη στο ℜ με g΄(χ)=f(1+x) + f(5-x). Είναι g΄(2+x)=f(3+x)+f(3-x) και g΄(2-x)=f(3-x)+f(3+x), οπότε g΄(2+x)= g΄(2-x). **β)** η fείναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο ℜ, οπότε η g΄ είναι παραγωγίσιμη στο ℜ, με g΄΄(x)=f΄(1+x)-f΄(5-x) και g(3)(x)=f΄΄(1+x) + f΄΄(5-x)>0 ⇒ η g΄΄ είναι γνήσια αύξουσα στο ℜ, οπότε και «1-1». Είναι g΄΄(χ)=0 ⇔ f΄(1+x)-f΄(5-x)=0 (1)⇔ f΄(1+x)=f΄(5-x). Επειδή f΄΄(x)>0, η f΄ είναι γνήσια αύξουσα, οπότε και «1-1». Η (1) ⇒ 1+χ=5-χ ⇔ χ=2. Άρα g΄΄(χ)=0 ⇔ χ=2. Για χ>2 g΄΄(χ)>g΄΄(2)=0 ⇒ η g είναι κυρτή στο(2, +∞) και για χ<2 g΄΄(χ)<g΄΄(2)=0 ⇒ η g είναι κοίλη στο(-∞, 2) και υπάρχει το g΄(2), οπότε η g έχει ένα μόνο σημείο καμπής το Α(2, 0).
2. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο [-1, 1] και παραγωγίσιμη στο (-1, 1), με f ΄(x)0 για κάθε x(-1, 1)-{0} και f(-1)=f(1)=0, f(0)=. Aν η κάθετη στην εφαπτομένη σε κάθε σημείο Μ(x0, f(x0)) της Cf με x0-1,1,0 τέμνει τον ψ΄ψ σε σημείο με τεταγμένη ίση με το μισό της τεταγμένης του Μ, να βρεθεί ο τύπος της f και να υπολογιστεί το εμβαδόν που περικλείεται από την Cf και τον x΄x.  **ΛΥΣΗ:** η κάθετη στην εφαπτομένη στο Μ(x0, f(x0)) είναι η (ε): ψ=(χ-χ0)+f(x0). Η (ε) τέμνει τον ψ΄ψ στο Α(0, +f). Είναι +f= ⇔ =- ⇔ =-2, σε κάθε (-1, 1)-{0}. Για κάθε χ(-1, 1)-{0} είναι f(x)f΄(χ)=-2χ ⇔ 2 f(x)f΄(χ)=-4χ ⇔ = και επειδή οι , είναι συνεχείς στο [-1, 1], θα υπάρχει c∈ℜ, τέτοιο ώστε = +c. Για χ=0: c=2, οπότε = +2=2(1-χ2). Για -1<χ<1 ⇔ |χ|<1 ⇔χ2<1 ⇔ 1-χ2>0, οπότε f(χ)≠0, για κάθε χ∈(-1, 1). Η f είναι συνεχής στο [-1, 1] και f(χ)≠0, για κάθε χ∈(-1, 1), οπότε η f διατηρεί πρόσημο στο (-1, 1) και επειδή f(0)=>0, θα είναι f(x)>0, x∈(-1, 1). Έτσι f(x)= , x∈(-1, 1). Για χ=-1, 1 έχω f(-1)=f(1)=0 και f(0)=, οπότε f(x)= , x∈[-1, 1]. H Cf τέμνει τον χ΄χ όταν f(x)=0 ⇔ x=-1 και x=1. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι Ε===. H g(x)= είναι άρτια, αφού για κάθε χ∈[-1, 1] ισχύουν - χ∈[-1, 1] και g(-x)=g(x). Άρα Ε=2. Θέτω χ=ημφ ⇒ dx=συνφdφ. Για χ=0 ⇒ φ=0 και για χ=1 ⇒ φ=, οπότε Ε=2=2=2= +=+ = .

1

1. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο ℜ, τέτοια ώστε: 0, (1) για κάθε xℜ. Να δείξετε ότι f(x)=0, για κάθε xℜ. **ΛΥΣΗ:** η (1) ⇔ χ--≥0. Θεωρώ την G(x)= χ--≥0=G(0) για κάθε xℜ. Η f είναι συνεχής στο ℜ, οπότε η G είναι παραγωγίσιμη συνεχής στο ℜ, με G΄(χ)= +xf(x)-xf(x)-f(x)= -f(x). Από θ Feℜmat, πρέπει G΄(χ)=0 ⇔ f(0)=0. Αν F μια παράγουσα της f, τότε F(x)= ⇔ F΄(χ)=f(x), οπότε G΄(x)=F(x)-F΄(x) ⇔ e-xG΄(x)=e-xF(x)- e-xF΄(x) ⇔ e-xG΄(x)=-(F(x)e-x)΄ ⇔=-F(x)e-x+c⇔ e-x G(x)+ =-F(x)e-x+c ⇒ c=0 για x=0. Άρα e-x G(x)+ =-F(x)e-x0⇔ F(x)0. Αλλά F(x)= ≥0 , οπότε =0, για κάθε xℜ ⇒ f(x)=0, για κάθε xℜ
2. Δίνεται συνάρτηση f:(0, +)ℜ, παραγωγίσιμη με f(1)=1 και f(x)=xf ΄(x)-x. **α)** Να δείξετε ότι f(x)=xlnx+x, x>0 **β)** Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα **γ)** Να βρείτε το σύνολο τιμών της f **δ)** Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής **ε)** Να βρείτε το εμβαδόν Ελ του χωρίου που περικλείεται από την Cf, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=1 και x=λ, με 0<λ<1/e και να βρείτε το . **ΛΥΣΗ: α)** είναι xf΄(χ)-f(x)=x ⟺ = ⇔ = και επειδή οι , είναι συνεχείς στο (0, +∞), θα υπάρχει c∈ℜ, ώστε =+c. Για χ=1: c =1, οπότε =+1 ⇔ f(x)=xlnx+x, x>0. **β)** για χ>0 είναι f΄(χ)=lnx+2, f΄(χ)=0 ⇔ χ=, f΄(χ)>0 ⇔ χ>, f΄(χ)<0 ⇔ χ<, οπότε η f είναι γνήσια φθίνουσα στο (0, ], γνήσια αύξουσα στο [,+∞) και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το f=-. **γ)** η f είναι συνεχής και γνήσια φθίνουσα στο Δ1=(0, ], οπότε f(Δ1)=[ f, f(x))= [ -, 0), γιατί f(x)= =0, αφού(χlnx)=  ==(-x)=0. H f είναι συνεχής και γνήσια αύξουσα στο Δ2=[,+∞), οπότε f(Δ2)=[ f, f(x))= [ -, +∞), γιατί f(x)= =+∞, αφού(χlnx)= +∞. Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το f((0, +∞))= f(Δ1)∪ f(Δ2)= [ -, +∞). **δ)** για χ>0 είναι f΄΄(χ)= >0, οπότε η f είναι κυρτή στο (0, +∞) και επομένως δεν έχει σημεία καμπής. **ε)** η Cf τέμνει τον χ΄χ όταν f(x)=0 ⇔ xlnx+x=0 ⇔ x(lnx+1)=0 ⇔ lnx=-1, x>0 ⇔ x== και f(x)>0 ⇔ x>, f(x)<0 ⇔ x<. Άρα Ελ==+= -+-+-+=+ ++- + ………
3. Δίνεται συνάρτηση f:ℜℜ, για την οποία ισχύουν: f(x)0, για κάθε xℜ, υπάρχουν x1, x2 ℜ με x1<x2 τέτοια ώστε f(x1)=f(x2)=0 και η f έχει τρίτη παράγωγο **α)** να δείξετε ότι f ΄(x1)=f ΄(x2)=0 **β)** υπάρχει x3(x1, x2) με f ΄(x3)=0 **γ)** υπάρχουν ξ1, ξ2(x1, x2) με ξ1ξ2 τέτοια ώστε f ΄΄(ξ1)=f ΄΄(ξ2)=0 **δ)** υπάρχει ξ (x1, x2) με f(3)(ξ)=0. **ΛΥΣΗ: α)** επειδή f(x)0=f(x1)=f(x2) για κάθε xℜ θα έχουμε στα x1, x2 ακρότατα και επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στα x1, x2 θα έχουμε από θ. Feℜmat, f΄( x1)= f΄( x1)=0. **β)** η f είναι συνεχής στο [x1, x2] και παραγωγίσιμη στο (x1, x2) με f(x1)=f(x2), οπότε από θ. ℜolle, υπάρχει x3(x1, x2) τέτοιο ώστε f ΄(x3)=0 **γ)** η f΄ είναι συνεχής στα [x1, x3] και [x3, x2] και παραγωγίσιμη στα (x1, x3) και (x3, x2) με f΄(x1)=f΄(x2)=f΄( x3)=0, οπότε από θ. ℜolle, υπάρχουν ξ1∈(x1, x3) και ξ2∈ (x3, x2) τέτοια ώστε f΄΄( ξ1)= f΄΄( ξ2)=0, με x1< ξ1< x3< ξ2< x2. **δ)** η f΄΄ είναι συνεχής στο [ξ1, ξ2] και παραγωγίσιμη στο (ξ1, ξ2) με f΄΄(ξ1)=f΄΄(ξ2), οπότε από θ. ℜolle, υπάρχει ξ(ξ1, ξ2) ⊆(x1, x2) τέτοιο ώστε f(3)(ξ)=0.
4. Δίνεται η f(x)=. Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού της, τότε: **α)** Να τη μελετήσετε ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής **β)** Να βρείτε την εφαπτομένη της στο x0=2 **γ)** Να δείξετε ότι f(x)ex-2e, για x>1 **δ)** Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη Cf, τον x΄x και τις ευθείες x=2 και x=4, να δείξετε ότι Ε2e. **ΛΥΣΗ:**  πρέπει t≠1. Η g(t)= πρέπει να είναι συνεχής στο πεδίο ολοκλήρωσης και επειδή 2>1, θα έχω ότι χ>1. Άρα Αf=(1, +∞). **α)** είναι f΄(χ)= , x>1 και f΄΄(χ)=- <0, x>1. Άρα η f είναι κοίλη στο (1, +∞) οπότε δεν έχει σημεία καμπής. **β)** η εφαπτομένη της στο x0=2 είναι η (ε): ψ=e(x-2) ⇔ ψ=ex-2e, x>1. **γ)** επειδή η f είναι κοίλη στο (1, +∞) θα βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της, δηλ. f(x)ex-2e, για x>1 **δ)** είναι f΄(χ)= >0, οπότε η f είναι γνήσια αύξουσα στο [2, 4]. Άρα για 2≤χ≤4 ⇒ f(2) ≤f(χ)≤f(4) ⇒ 0≤f(χ). Είναι Ε=και από f(x)ex-2e ⇒ ≤⇔E≤⇔ E≤8e-8e-2e+4e ⇔ E≤2e.
5. Δίνεται η f(x)=, με α, βℜ. Να βρείτε τα α, β ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο ℜ. Για τις τιμές των α, β που βρήκατε: **α)** να βρείτε την εφαπτομένη της Cf στο σημείο Μ(0,f(0)). **β)** να εξετάσετε αν υπάρχουν ασύμπτωτες της Cf  **γ)** να δείξετε ότι f(x)> 3/2, για κάθε x>0 **δ)** να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη Cf, τον x΄x και τις ευθείες x=-1 και x=1 **ΛΥΣΗ:** η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, άρα θα είναι και συνεχής στο 0, δηλ. f(0)=f(x)= f(x) ⇔ α+1=β, αφού === =0. Είναι ===(xlnx)= ===0 και ===α-1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, οπότε α-1=0 ⇔ α=1 και β=2. Άρα f(x)= και f΄(χ)=

**α)** η εφαπτομένη της στο x0=2 είναι η (ε): ψ-f(2)=f΄(2)(χ-2) ⇔ ψ-+1=(4ln2+2)(x-2) **β)** η f ορίζεται στο ℜ, οπότε δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη. Είναι  = =  = 0 και  ==+∞, οπότε δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο +∞. Είναι= ==-1 και==+∞, οπότε δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο -∞.  **γ)** για χ>0 είναι f΄(χ)=χ(2lnχ+1). Είναι f΄(χ)=0 ⇔ 2lnχ+1=0 ⇔ lnx=- ⇔ x=, f΄(χ)>0 ⇔ 2lnχ+1>0 ⇔ lnx>- ⇔ x>, f΄(χ)<0 ⇔ 2lnχ+1<0 ⇔ lnx<- ⇔ x<, οπότε f(x)≥f=2-=. Αρκεί > ⇔ 8e-2>6e ⇔2e>2, που ισχύει. **δ)** είναι f(x)>0, για κάθε xℜ, οπότε Ε=. Δεν μπορούμε να γράψουμε Ε=+, γιατί το  δεν ορίζεται στο [0,1]. Επειδή η f είναι συνεχής στο [-1, 1], θα έχουμε ότι =F(1)-F(-1), όπου F μια παράγουσα της f. Για x<0 είναι F(x)==ex-+x+c1. Για x>0 είναι F(x)==. Η F σαν αρχική της f πρέπει να είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, οπότε: 1+c1=c2. Άρα Ε=F(1)-F(-1)=- +2+c2 - + +1-c1=- +2+1+c1- + +1-c1 =

1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο ℜ με f(x)>0 και lnf(x)+ef(x)=x, (1) για κάθε xℜ **α)** Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία **β)** Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται **γ)** Να λύσετε τις εξισώσεις: f(x)=1 και f(x)=e **δ)** Να υπολογίσετε το άθροισμα: Ι=+ **ΛΥΣΗ:** **α)** η f είναι παραγωγίσιμη στο ℜ οπότε η (1) ⇔ + f΄(x) ef(x)=1 ⇔ f΄(χ)=1 ⇔ f΄(χ)= >0, άρα η f είναι γνήσια αύξουσα στο ℜ. **β)** επειδή η f είναι γνήσια αύξουσα στο ℜ, θα αντιστρέφεται. Θέτω f(x)=ψ, οπότε η (1) ⇔ lnψ+=χ. Άρα =lnx+, x>0. **γ)** είναι f(x)=1 ⇔ x==e και f(x)=e ⇔ χ==1+. **δ)** Θέτω u=f–1(x) ⇔ x=f(u) & dx= f ΄(u)du. Για x=1⇔ u=f –1(1)=e και για x=e ⇔ u=f –1(e)=ee+1 Άρα Ι=+=-+= f-ef(e)= e-e=

1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο ℜ με =x·f(lnx)-2x3+1, (1) x>0. **α)** Να δείξετε ότι =14 **β)** Να δείξετε ότι f(x)=3e2x-2, xℜ **γ)** Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο Α(0, f(0)). **δ)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την Cf, την εφαπτομένη και την ευθεία x=ln2. **ΛΥΣΗ:** **α)** Θέτω lnt=u⇔ t= ⇒ dt=du. Για t=1 ⇒ u=0, για t=x ⇒ u=lnx. H (1) ⇔ = x·f(lnx)-2x3+1, (2) ⇔ -= x·f(lnx)-2x3+1 ⇔ x·f(lnx)-f(0)- = x·f(lnx)-2x3+1 ⇔ =2x3-1-f(0) =15-f(0). Για χ=1 η (1) ⇒ 0=f(0)-1 ⇔ f(0)=1. Άρα =15-1=14. **β)** η (2) ⇔ f(lnx)=f(lnx)+f΄(lnx)-6 ⇔ f΄(lnx)=6 ⇔ f΄(lnx)=6x ⇔ = και επειδή οι , είναι συνεχείς στο (0, +∞), θα υπάρχει c∈ℜ, έτσι ώστε f(lnx)=+c. Για χ=1: f(0)=3+c ⇔ 1=3+c ⇔ c=-2. Άρα f(lnx)=-2 (3). Θέτω lnx=u ⇔ x=, οπότε η (3) ⇔ f(u)=3-2. Άρα f(x)=3-2, xℜ. **γ)** είναι f΄(χ)=6 ⇒ f΄(0)=6 και f(0)=1, οπότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο Α(0, f(0)), είναι η (ε): ψ=6χ+1 **δ)** Επειδή f ΄΄(x)=12e2x>0, θα έχουμε ότι η f είναι κυρτή, οπότε θα βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της, δηλ. f(x)≥6x+1. Είναι 2>1 ⇒ ln2>0. Άρα Ε====6-3-3ln2- =-3-3ln2+
2. **Α.** Να δείξετε ότι ισχύει: lnxx-1, (1) για κάθε x>0. **B.** Η f είναι παραγωγίσιμη στο [1, +) με f(x)>1 και f(x)-lnf(x)=x, (2) για x1 **α)** Να υπολογίσετε το f(1) **β)** Να λύσετε τις εξισώσεις f(x)=1 και f(x)=e **γ)** Να δείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα **δ)** Να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης της f **ε)** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την Cf-1, την διχοτόμο του 1ου τεταρτημορίου και την ευθεία x=e. **ΛΥΣΗ:** **A.** θεωρώ την g(x)=lnx-x+1, x>0, που είναι παραγωγίσιμη για χ>0, ως άθροισμα λογαριθμικής και πολυωνυμικής, με g΄(χ)= -1. Είναι g΄(χ)=0 ⇔ -1=0 ⇔ χ=1, g΄(χ)≥0 ⟺ χ≤1, g΄(χ)≤0 ⟺ χ≥1. Άρα g(x)≤g(1)=0, x>0 ⇔ lnx-x+1≤0, x>0,με το «=» να ισχύει για χ=1 (3). **Bα)** για χ=1 η (2) ⇒ f(1)-lnf(1)-1=0 ⇔ lnf(1)-f(1)+1=0. Άρα f(1)=1, λόγω της (3). **Bβ)** αν f(x)=1 x=1 και αν f(x)=e e-lne=x ⟺ x=e-1 **Βγ)** η (2) ⇒ f΄(χ)- =1 ⇔ f΄(χ)=1 ⇔ f΄(χ) =1 f΄(χ)>0. Άρα η f είναι γνήσια αύξουσα για χ≥1, οπότε αντιστρέφεται. **Βδ)** θέτω f(x)=ψ ψ-lnψ=χ ⟺ f-1(x)=x-lnx, x1 **Βε)** είναι f(1)=1, οπότε το Α(1, 1) είναι κοινό σημείο των ψ=χ και Cf-1. Έτσι E(Ω)=  === =-=e-(e-1)=1 τ.μ.
3. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο ℜ\* με f ΄(x)=1+xe-f(x) (1) και ισχύει , για κάθε x0. **α)** Να αποδείξετε ότι (ef(x)-x)΄= xe–x & f(x)=ln(ex-x-1), για κάθε x0. **β)** Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα στο ℜ\* . **γ)** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα Ι=

**ΛΥΣΗ:** **α)** είναι f΄(χ) =+x ⇔ =+x. Θέτω g(x)=, οπότε g΄(χ)=g(x)+x ⇔ g΄(χ)-g(x)=x ⇔ = ⇔ == -xe-x-e-x+c ⇔ ef(x)-x=-xe-x-e-x+c ⇔ ef(x)= -x-1+cex ⇔ . Επίσης ef(x)= -x-1+cex0 ⇒ 0 ⇔ c1. Άρα c=1, οπότε ef(x)= -x-1+ex, για κάθε x0. **γ)** είναι Ι=-=-x2e-f(x)+2-x2e-f(x)+ 2 =-x2e-f(x)+2f(x)-2x+c

1. Οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο ℜ με συνεχή παράγωγο και ισχύουν f ΄(x)>0 και g΄(x)=x, για κάθε xℜ. **α)** Να δείξετε ότι g΄(x)=f(x2)-f(x), για κάθε xℜ. **β)** Να μελετήσετε την g ως προς την μονοτονία **γ)** Να δείξετε ότι υπάρχει ξ(0,1) τέτοιο ώστε: f΄(ξ2)=. **ΛΥΣΗ:** **α)** θέτω xt=u⇒ xdt=du.Για t=1 ⇒ u=x, για t=x ⇒ u=. Έτσι g΄(χ)= = f(x2)-f(x), για κάθε xℜ. **β)** επειδή f ΄(x)>0, η f είναι γνήσια αύξουσα. Για >χ ⇔ χ(χ-1)>0 ⇔ χ<0 ή χ>1, είναι f(x2)>f(x) ⇒ g΄(χ)>0, οπότε η g είναι γνήσια αύξουσα στα (-∞, 0) και (1, +∞). Για <χ ⇔ 0<χ<1, είναι f(x2)<f(x) ⇒ g΄(χ)<0, οπότε η g είναι γνήσια φθίνουσα στο (0, 1) και επειδή η g είναι συνεχής στο ℜ, θα είναι γνήσια αύξουσα στα (-∞, 0] και [1, +∞) και γνήσια φθίνουσα στο [0, 1]. **γ)** επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο ℜ και g΄(x)=f(x2)-f(x), για κάθε xℜ, η g΄ θα είναι παραγωγίσιμη στο ℜ, με g΄΄(χ)=2χf΄-f΄(χ). Άρα η g΄ είναι συνεχής στο [0, 1] και παραγωγίσιμη στο (0, 1), με g΄(0)=g΄(1)=0. Από θ. ℜolle, υπάρχει ξ(0,1) τέτοιο ώστε: g΄΄(ξ)=0 ⇔ 2ξf΄-f΄(ξ)=0 ⇔ f΄(ξ2)=.
2. Η f είναι συνεχής στο ℜ με =(1). Να δείξετε ότι: **α)**= **β)** Η συνάρτηση φ(x)=  ικανοποιεί το θεώρημα ℜolle στο [1,2] **γ)** Υπάρχει ξ(1,2) τέτοιο ώστε: f(ξ)= . **ΛΥΣΗ: α)** η (1) ⇔ =+⇔2=⇔= **β)** η f είναι συνεχής στο [1, 2], οπότε η φ είναι παραγωγίσιμη στο [1, 2], ως γινόμενο παραγωγισίμων, με φ΄(χ)=- +f(x) και φ(1)=φ(2), οπότε υπάρχει ξ(1,2) τέτοιο ώστε: φ΄(ξ)=0 ⇔ - +f(ξ) ⇔ ξf(ξ)=(2) **γ)** Θέτω t=ξu⇒dt=ξdu. Για t=0: u=0 και για t=ξ: u=1, οπότε =ξ . Άρα η (2) ⇔ ξf(ξ)= ξ⇔ f(ξ)= 
3. Δίνεται η f(x)=3-lnx-ex, ορισμένη στο Δ=(0, 3]. **α)** Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία στο Δ **β)** Να βρεθεί το f(Δ) **γ)** Να δείξετε ότι η εξίσωση lnx+ex=3, έχει ακριβώς μια λύση στο Δ. **ΛΥΣΗ: α)** ηf είναι παραγωγίσιμη στο (0, 3], ως άθροισμα εκθετικής και λογαριθμικής, με f΄(χ)=- -ex<0, στο (0, 3]. Άρα η f είναι γνήσια φθίνουσα στο (0, 3].  **β)** είναι f(3)=3-ln3-e3<0 και f(x)=+∞, οπότε f((0, 3])=[ 3-ln3-e3, +∞) **γ)** η f είναι συνεχής στο Δ, ως άθροισμα εκθετικής και λογαριθμικής και 0∈Δ, οπότε από Θ.Ε.Τ. υπάρχει ξ∈Δ, ώστε f(ξ)=0 και επειδή η f είναι γνήσια φθίνουσα στο Δ, το ξ είναι μοναδικό.
4. Δίνεται η f(x)=-x. **α)** Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της **β)** Να μελετηθεί ως προς την συνέχεια **γ)** Να μελετηθεί ως προς το πρόσημο των τιμών της. **ΛΥΣΗ: α)** πρέπει 6-χ≥0 ⇔ χ≤6. Άρα Af=(-∞, 6]. **β)** η f είναι συνεχής στο =(-∞, 6], ως άρρητη. **γ)** η f είναι παραγωγίσιμη στο =(-∞, 6], ως άρρητη, με f΄(χ)=- -1<0, οπότε η f είναι γνήσια φθίνουσα στο (-∞, 6). Παρατηρώ ότι f(2)=0. Έτσι: για χ<2 ⇒ f(x)>f(2)=0 και για 2<χ≤6 ⇒ f(x)<f(2)=0.
5. Δίνεται η f συνεχής στο [α, β] και x1, x2, x3[α, β]. Να δείξετε ότι υπάρχει ξ[α, β] τέτοιο ώστε: 6f(ξ)=f(x1)+2f(x2)+3f(x3). **ΛΥΣΗ:** η f είναι συνεχής στο [α, β], οπότε παρουσιάζει μέγιστο Μ και ελάχιστο m στο [α, β]. Άρα για x1, x2, x3[α, β] ισχύουν: m≤ f(x1)≤M, m≤ f(x2)≤M ⇔ 2m≤ 2f(x2)≤2M και m≤ f(x3)≤M ⇔ 3m≤3f(x3)≤3M. Έτσι 6m≤ f(x1)+2f(x2)+3f(x3)≤6M ⇔ m≤≤M . Η f είναι συνεχής στο [α, β], οπότε από Θ.Ε.Τ. υπάρχει ξ[α, β] τέτοιο ώστε: 6f(ξ)=f(x1)+2f(x2)+3f(x3).
6. Δίνεται η f συνεχής στο [0, 3] και για την οποία ισχύουν: f(0)=f(3), f(1)=f(2). Να δείξετε ότι υπάρχει ξ[0, 2] τέτοιο ώστε: f(ξ)=f(ξ+1). **ΛΥΣΗ:** θεωρώ την g(x)=f(x)-f(x+1), που είναι συνεχής στο [0, 2] και ισχύουν: g(0)=f(0)-f(1) και g(2)=f(2)-f(3)=f(1)-f(0), οπότε g(0)g(2)=-≤0. Αν g(0)g(2)<0, τότε από θ. Bolzano, υπάρχει ξ(0, 2) τέτοιο ώστε: g(ξ)=0 ⇔ f(ξ)=f(ξ+1). Αν g(0)g(2)=0 ⇔ g(0)=0 ⇒ ξ=0 ή g(2)=0 ⇒ ξ=2. Άρα υπάρχει ξ[0, 2] τέτοιο ώστε: f(ξ)=f(ξ+1)
7. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f:ℜℜ και ο σταθερός αριθμός αℜ. Αν g(x)= και h(x) =, x∈ℜ, να δείξετε ότι h(x)=. **ΛΥΣΗ:** είναι h(x) = = -=xg(x)-αg(α)-  και g(α)= =0, οπότε h(x)=xg(x)-  =x  - = .
8. Δίνεται η συνάρτηση f:ℜ\*ℜ παραγωγίσιμη και περιττή με f(1)=1 και f(x)= για κάθε xℜ\*. Να δείξετε ότι f(x)=1/x, xℜ\*. **ΛΥΣΗ:** θέτω χt=u ⇒ t= ⇔ dt= du, x≠0. Για t=0 ⇒ u=0, για t=1 ⇒ u=x, οπότε f(x)= ⇔ f(x)= ⇔ 2xf(x)+f΄(x)=xf(x) ⇔f΄(x)+xf(x)=0, x>0 ⇔ xf΄(χ)+f(x)=0 ⇔ (xf(x))΄=0, x≠0. Π ρ ο σ ο χ ή το ℜ\* δεν είναι διάστημα και η χf(x) είναι συνεχής στα (-∞, 0) και (0, +∞), οπότε υπάρχουν α,βℜ με xf(x)=α, για x<0 και xf(x)=β, για x>0. Η f είναι περιττή στο ℜ\*, οπότε για κάθε xℜ\* ισχύουν: -χℜ\* και f(-x)=-f(x). Έτσι για χ=1 ⇒ f(-1)=-f(1)=-1 ⇒ α=-f(-1)=1 ⇒ xf(x)=1 ⇔ f(x)= , για χ<0. Επίσης για χ=1 ⇒ β=f(1)=1 ⇒ xf(x)=1 ⇔ f(x)= , για χ>0. Άρα xf(x)=1 ⇔ f(x)= , για κάθε xℜ\*.
9. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f, g:[0, +)ℜ\* οι οποίες ικανοποιούν τις σχέσεις: 1+= (1) και 1+2=(2). **α)** Να δείξετε ότι f(x)=2g(x), x0 **β)** Να βρεθούν οι συναρτήσεις f, g. **ΛΥΣΗ: α)** η (1) ⇒ f(χ)=- και η (2) ⇒ 2g(x)=-2 ⇔ g(x)=- οπότε = ⇔ g(x)-f(x)=0 =0 και επειδή η είναι συνεχής στο [0, +), θα υπάρχει c∈ℜ, ώστε =c. Για χ=0: η (1)⇒ g(0)=1 και η (2) ⇒ f(0)=2, οπότε c=2. Άρα =2 ⇔ f(x)=2g(x), x0 **β)** είναι 2g(x)= - ⇔ = -2 ⇔ =4 ⇔ =4 ⇔ = και επειδή οι , 4χ είναι συνεχείς στο [0, +), θα υπάρχει c∈ℜ, ώστε = 4χ+c. Για χ=0: c=1. Έτσι = 4χ+1 ⇔ = , x>0 . Η g είναι συνεχής στο [0, +) και g(x)≠0, για κάθε χ≥0, οπότε η g διατηρεί πρόσημο στο [0, +) και επειδή g(0)=1>0, θα είναι g(x)>0 ⇒ g(x)=, x0. Άρα f(x)=, x0.
10. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f:ℜℜ με f(x)=x2+ (1). Να δείξετε ότι: f(x)=ex+e-x-2, για κάθε xℜ. **ΛΥΣΗ:**  η (1) ⇔ f(χ)=+x- . Οι f(t), tf(t) είναι συνεχείς στο ℜ, οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο ℜ, με f΄(χ)=2χ++χf(x)-xf(x)= 2χ+. Όμοια η f΄ είναι παραγωγίσιμη στο ℜ, με f΄΄(χ)=2+f(x) ⇔ f΄΄(χ)+f΄(χ)=f΄(χ)+f(x)+2. Θέτω g(x)= f΄(χ)+f(x), οπότε g΄(χ)=g(x)+2 ⇔ g΄(χ)-g(x)=2 ⇔ = και επειδή οι , είναι συνεχείς στο ℜ, θα υπάρχει c∈ℜ, ώστε = +c. Για χ=0: f(0)=0=f΄(0) ⇒ g(0)=0 ⇒ c=2, οπότε = +2 ⇔ g(x)=2-2 ⇔ f΄(χ)+f(x)= 2-2 ⇔ f΄(χ)+f(x)= 2-2 ⇔ = και επειδή οι , είναι συνεχείς στο ℜ, θα υπάρχει c∈ℜ, ώστε = +c. Για χ=0: f(0)=0 ⇒ c=1 οπότε = +1 ⇔ f(x)= + -2, για κάθε xℜ
11. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο [0, 1] με f(x) 0 και g(x)0, για κάθε x[0, 1], να δείξετε ότι υπάρχει ξ[0, 1], τέτοιο ώστε =.  **ΛΥΣΗ:**  θεωρώ την h(x)= - . Οι f, g είναι συνεχείς στο [0, 1] οπότε η h είναι παραγωγίσιμη στο [0, 1] , άρα και συνεχής στο [0, 1] με h(0)=≥0, γιατί g(x)0, για κάθε x[0, 1] και h(1)= ≤0, γιατί f(x)0, για κάθε x[0, 1]. Άρα h(0)h(1)≤0. Αν h(0)h(1)<0, από θ. Bolzano, υπάρχει ξ(0, 1), τέτοιο ώστε h(ξ)=0 ⇔ =. Αν h(0)h(1)=0 ⇔ h(0)=0 ή h(1)=0, τότε ξ=0 ή ξ=1. Άρα υπάρχει ξ[0, 1], τέτοιο ώστε =.
12. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f:ℜℜ και ορίζουμε την g(x)=f(x) . Αν η g είναι γνήσια φθίνουσα, να δείξετε ότι f(x)=0, για κάθε xℜ. **ΛΥΣΗ:** θεωρώ την h(x)= . Η f είναι συνεχής στο ℜ, οπότε η h είναι παραγωγίσιμη στο ℜ, με h΄(x)=2f(x) =2g(x). Η g είναι γνήσια φθίνουσα, οπότε και η h΄(χ) είναι γνήσια φθίνουσα, με h΄(0)=0. Για χ>0 ⇒ h΄(χ)<h΄(0)=0 ⇒ η h είναι γνήσια φθίνουσα για χ>0 ⇒ h(x)<h(0)=0. Για χ<0 ⇒ h΄(χ)>h΄(0)=0 ⇒ η h είναι γνήσια αύξουσα για χ<0 ⇒ h(x)<h(0)=0. Άρα h(x)≤0, για κάθε xℜ. Αλλά h(x)= ≥0, για κάθε xℜ. Άρα h(x)=0, για κάθε xℜ ⇔ =0⇔=0, για κάθε xℜ ⇔ f(x)=0, για κάθε xℜ.
13. Δίνεται η f:[0, 1]ℜ, συνεχής στο [0, 1] και παραγωγίσιμη στο (0, 1) με f(0)=0 και f(1)= . Nα δείξετε ότι υπάρχει x0(0, 1) ώστε: f΄(x0)=. **ΛΥΣΗ:** αρκεί να έχει μια τουλάχιστον ρίζα η εξίσωση f(x)f΄(χ)=1 ⇔ 2f(x)f΄(χ)=2 ⇔ =. Θεωρώ την h(x)=f2(x)-2x, που είναι συνεχής στο [0, 1] και παραγωγίσιμη στο (0, 1) ως διαφορά συνεχών και παραγωγισίμων αντίστοιχα, με h(0)=h(1)=0. Από θ. ℜolle, υπάρχει x0(0, 1) ώστε: h΄( x0)=0 ⇔ f΄(x0)=.
14. Θεωρούμε τη συνάρτηση f(x)=2+(x-2)2 με x2. **α)** Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1». **β)** Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f-1 της f και να βρείτε τον τύπο της. **γ) i.** Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f-1 και f με την ευθεία ψ=x **ii.**  Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f-1 και f . **ΛΥΣΗ: α)** η f είναι παραγωγίσιμη στο [2, +∞), ως πολυωνυμική, με f΄(χ)=2(χ-2)≥0 με το «=» να ισχύει μόνο για χ=2, άρα η f είναι γνήσια αύξουσα για χ∈[2, +∞), οπότε και «1-1» **β)** έτσι η f αντιστρέφεται στο [2, +∞). Θέτω f(x)=ψ ⇔ ψ=2+(x-2)2 ⇔ ψ-2=(x-2)2≥0, ψ≥2 ⇔ χ-2=± , με x2 ⇔ χ=2+ , ψ≥2 . Άρα (χ)=2+, x≥2. **γ)** **i.** Τα κοινά σημεία των Cf, Cf-1, ψ=χ, είναι οι λύσεις της εξίσωσης f(x)=x ⇔ 2+(x-2)2=x ⇔ (x-2)2-(x-2)=0 ⇔ (x-2)(x-3)=0 ⇔ x=2 ή χ=3. Άρα Α(2,2), Β(3,3) τα κοινά σημεία. **ii.** Είναι Ε=2=2=-2=-2= τ.μ.
15. Δίνεται η συνάρτηση f(x)=-lnx. **α)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f. **β)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς δύο ρίζες στο πεδίο ορισμού. **γ)** Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g(x)=lnx στο σημείο Α(α, lnα) με α>0 και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της h(x)=ex στο σημείο Β(β, eβ) με βℜ ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης f(x)=0. **δ)** Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες. **ΛΥΣΗ: α)** πρέπει χ>0 και χ≠1, οπότε Af =(0,1)⋃(1, +∞). Η f είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα ρητής και λογαριθμικής στα (0,1), (1, +∞) με f΄(χ)=-<0, χ∈(0,1)⋃(1, +∞). Άρα η f είναι γνήσια φθίνουσα στα (0,1), (1, +∞). Είναι f(x)=+∞, f(x)=-∞, f(x)=+∞, f(x)=-∞. Άρα f =ℜ. **β)** είναι 0∈f((0,1)), f((1, +∞)) οπότε από Θ.Ε.Τ. υπάρχουν ρ1∈(0,1) και ρ2∈(1, +∞) τέτοια ώστε f(ρ1)=f(ρ2)=0 και επειδή η f είναι γνήσια φθίνουσα στα (0,1), (1, +∞), τα ρ1, ρ2 είναι μοναδικά **γ)** η εφαπτομένη της Cg στο Α(α, lnα) είναι η (ε): ψ-lnα=(χ-α) και η εφαπτομένη της Ch στο Β(β, eβ) είναι η (η): ψ-eβ= eβ(x-β). Οι (ε), (η) ταυτίζονται, οπότε πρέπει: = ⇔ β=-lnα και lnα-1=-β ⇔ lnα-1= +lnα∙ ⇔ αlnα-α=1+lnα ⇔ (α-1)lnα=α+1 , 0<α≠1 ⇒ -lnα=0. Αν α=1, τότε 0=2, άτοπο. Άρα το α είναι ρίζα της εξίσωσης f(x)=0. **δ)** η εξίσωση f(x)=0 έχει δύο ακριβώς ρίζες, οπότε το α παίρνει δύο ακριβώς τιμές, ώστε οι εφαπτόμενες των Cg, Ch στα Α, Β αντίστοιχα να ταυτίζονται. Άρα οι Cg, Ch έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες.
16. Να μελετήσετε την f(x)=, για κάθε xℜ, ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. **ΛΥΣΗ:**  θέτω x+t=u⟹ dt=du. Για t=0, είναι u=x και για t=2006, είναι u=x+2006. Άρα f(x)=. H g(u)=είναι συνεχής στο ℜ, οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο ℜ, με f΄(χ)= >0. Άρα η f είναι γνήσια φθίνουσα στο ℜ, οπότε δεν έχει ακρότατα.
17. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο ℜ. Αν ισχύει f(x)= , να βρείτε τον τύπο της f. **ΛΥΣΗ:** Η fείναι συνεχής στο ℜ, οπότε η g(t)=2t είναι συνεχής στο ℜ, άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο ℜ, με f΄(χ)=2χ ⇔ ef(x)f΄(x)=2x ⇔ =. Οι , είναι συνεχείς στο ℜ, οπότε θα υπάρχει c∈ℜ, ώστε Οι = +c. Είναι f(0)=0 ⇒ c=1-e. Άρα = +1-e ⇔ f(x)=ln, xℜ.
18. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β], όπου α>0 και = -2α. Αν ισχύει f(x)>1, για κάθε x(α, β), να δείξετε ότι η εξίσωση α+β+= x, έχει μοναδική λύση στο (α, β). **ΛΥΣΗ:** θεωρώ την g(x)=α+β-χ+. H f είναι συνεχής στο [α, β], οπότε η g είναι παραγωγίσιμη στο [α, β], άρα και συνεχής. Είναι g΄(χ)=f(x)-1>0, για κάθε x(α, β), οπότε η g είναι γνήσια αύξουσα στο [α, β]. Είναι g(α)=β>0 και g(β)=α+=-α<0, οπότε από θ. Bolzano, υπάρχει ξ(α, β), τέτοιο ώστε g(ξ)=0 και επειδή η g είναι γνήσια αύξουσα στο [α, β], το ξ είναι μοναδικό.
19. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β]. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ∈(α, β), τέτοιο ώστε: =(ξ-β)f(ξ) **ΛΥΣΗ:** αρκεί να έχει μια τουλάχιστον ρίζα η εξίσωση (χ-β)f(χ)+=0 ⇔ {(x-β)  }΄=0. Θεωρώ την h(x)= (x-β)  που είναι συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β), με h(α)=h(β)=0. Από θ. ℜolle, υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ∈(α, β), τέτοιο ώστε h΄(ξ)=0 ⇔ =(ξ-β)f(ξ).
20. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνήσια αύξουσα στο (0, +) με =1 και =3. Θεωρούμε την συνάρτηση F(x)=, x>0. **α)** Να μελετήσετε την F ως προς την μονοτονία. **β)** Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ(2, 3), τέτοιο ώστε να ισχύει: f(ξ+2)-f(ξ+1)=-4 **ΛΥΣΗ:** **α)** έστω α>0, τότε F(x)=- . H f είναι συνεχής στο (0, +) οπότε η F είναι είναι παραγωγίσιμη στο (0, +) με F΄(χ)=f(x+2)-f(x+1). Για χ>0 ⇔ χ+2>χ+1, και επειδή η f είναι γνήσια αύξουσα στο (0, +∞) θα είναι f(x+2)>f(x+1). Άρα F΄(χ)>0, οπότε η F είναι γνήσια αύξουσα στο (0, +∞). **β)** Η F είναι συνεχής στο [2, 3] και παραγωγίσιμη στο (2, 3), οπότε από Θ.Μ.Τ. υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ(2, 3), τέτοιο ώστε F΄(ξ)=F(3)-F(2) ⇔ f(ξ+2)-f(ξ+1)= - =-3-1=-4
21. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [1, 5] και f(x)>0, για κάθε x∈[1, 5]. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ∈(1, 5), τέτοιο ώστε να ισχύει: 2+3=0.

**ΛΥΣΗ:** Θεωρώ μια αρχική συνάρτηση F της f στο [1, 5]. Τότε: =F(3)-F(ξ) και = F(4)-F(ξ). Αρκεί να δείξω ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ∈(2, 3), τέτοιο ώστε 2F(3)-2F(ξ)+3F(4)-3F(ξ)=0 ⇔ F(ξ)= . Η F είναι συνεχής στο [1, 5], οπότε παίρνει μέγιστη Μ και ελάχιστη m τιμή. Άρα m≤F(3)≤M ⇔ 2m≤2F(3)≤2M και m≤F(4)≤M ⇔ 3m≤3F(4)≤3M. Έτσι 5m≤2F(3)+ 3F(4)≤5M ⇔ m≤ ≤M. Αν m=M, τότε η F θα ήταν σταθερή, άτοπο, γιατί F΄(χ)=f(x)>0. Aν m<M, επειδή η F είναι συνεχής στο [1, 5], από Θ.Ε.Τ. υπάρχει ξ∈(1, 5), τέτοιο ώστε να ισχύει: 2+3=0.

1. Δίνεται η συνάρτηση f(x)=, xℜ. **α)** Να αποδείξετε ότι f(-x)+f(x)=x2συνx, xℜ **β)** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα Ι=  **ΛΥΣΗ:** **α)** είναι f(x)+f(-x)= + = += **β)** είναι Ι= - και θέτω χ=-u⇒ dx=-du. Για χ=0 ⇒ u=0, για χ=- ⇒ u=. Άρα Ι=+===-2=+2- 2=-2 = -2=
2. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο ℜ. Αν ισχύει f(x)= , για κάθε xℜ, να βρείτε τον τύπο της f.

**ΛΥΣΗ:** θέτω x-t=u ⇔ t=x-u ⇒ dt=-du. Για t=0 ⇒ u=x, για t=x ⇒ u=0. Άρα f(x)=-=⇔ f(x)= ⇒f(x)+f΄(x)=f(x) ⇔ f΄(x)=0 ⇔f΄(x)=0 και επειδή η f είναι συνεχής στο ℜ, θα υπάρχει c∈ℜ, ώστε f(x)=c. Για χ=0 ⇒ c=0, οπότε f(x)=0, για κάθε xℜ.

1. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο ℜ και η F(x)=, xℜ. **α)** Να δείξετε ότι F(x)=  **β)** Αν f(x)>0, για κάθε xℜ και F(2)=6e2 , να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την Cf, τον x΄x και τις ευθείες x=1 και x=4. **ΛΥΣΗ:** **α)** είναι F(x)=ex== **β)** είναι Ε=. Είναι F(2)=2e2⇔6e2 =2e2⇔=3. Άρα Ε=3 τ.μ.
2. Έστω η f:[0, +∞)⟶ℜ, δύο φορές παραγωγίσιμη, με f(0)=1. **α)** Να βρείτε τον τύπο της f, αν += (1), x>0 και f(e)=e **β)** Αν η f είναι κυρτή, να αποδείξετε ότι: **1.** χf΄(χ)+f(0)≥f(x), για κάθε x≥0 **2.** Η συνάρτηση g(x)=, x>0 είναι γνήσια αύξουσα **3.**<2 (2), για κάθε xℜ **ΛΥΣΗ:** **α)** θέτω xt=u ⇔ t= u ⇒ dt= du. Για t=0 ⇒ u=0 και για t=e ⇒ u=ex, οπότε η (1) ⇔ + = ⇔ + =⇔ f(0)+f(ex)-f(0)=ef΄(ex) ⇔ =f(ex). Θέτω g(x)=f(ex), οπότε g΄(χ)=g(x) ⇔ g΄(χ)-g(x)=0 ⇔ =0 και επειδή η είναι συνεχής στο [0, +∞), θα υπάρχει c∈ℜ, ώστε =c. Για χ=0: c=1, οπότε =1 ⇔ g(x)= ⇔ f(ex)=. Θέτω ex=u ⇔ x= οπότε f(u)=. Άρα f(x)=, x≥0. **β)** **1.** η f είναι συνεχής στο [0, χ], χ>0 και παραγωγίσιμη στο (0, χ), οπότε από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ξ∈(0, χ), ώστε f΄(ξ)=. H f είναι κυρτή, οπότε η f΄ είναι γνήσια αύξουσα. Έτσι για χ>ξ ⇒ f΄(χ)>f΄(ξ) ⇔ f΄(χ)> ⇔ χf΄(χ)>f(x)-1 ⇔ χf΄(χ)+f(0)>f(x), για κάθε x≥0 **2.** Είναι g΄(χ)=>0, γιατί >-f(0) ⇔ >-1 ⇔ +>-1>0, x>0. Άρα η g είναι γνήσια αύξουσα για χ>0. **3.** Αν F μια παράγουσα της f ⇒ F΄(χ)=f(x), αρκεί να δείξω ότι: F(x2+2)-F(x2)<2[F(x2+4)-F(x2+3)]. Η F είναι συνεχής στα [χ2, χ2+2], [χ2+3, χ2+4] και παραγωγίσιμη στα (χ2, χ2+2), (χ2+3, χ2+4) οπότε από Θ.Μ.Τ. υπάρχουν ξ1∈(χ2, χ2+2) και ξ2∈(χ2+3, χ2+4), τέτοια ώστε F΄( ξ1)==f(ξ1) και F΄( ξ2)==f(ξ2). Είναι f΄(χ)=>0, για κάθε x≥0, οπότε η f είναι γνήσια αύξουσα στο [0, +∞). Για κάθε χ∈ℜ, είναι χ2, χ2+2, χ2+3, χ2+4≥0, οπότε για ξ1< ξ2 ⇒ f(ξ1)< f(ξ2) ⇔ < ⇔ F(x2+2)-F(x2)<2[F(x2+4)-F(x2+3)].
3. Έστω η f:ℜ⟶ℜ, παραγωγίσιμη, γνήσια φθίνουσα, κοίλη με f΄(1)=f(1)=2. Να δείξετε ότι: **α)** <4 **β)** υπάρχει ξ∈(0, 2) τέτοιο ώστε =2f(ξ) **ΛΥΣΗ:** **α)** η εφαπτομένη της Cf  στο Μ(1, f(1)) είναι η (ε): ψ=2χ. Επειδή η f είναι κοίλη, θα βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτομένη της, δηλ. f(x)≤2x ⇒ ≤==4 και επειδή η f δεν είναι παντού 0 αφού είναι γνήσια φθίνουσα, θα είναι <4 **β)** Αν F(χ)= μια παράγουσα της f, τότε =F(2)-F(0)=2. Η F είναι συνεχής στο [0, 2] και παραγωγίσιμη στο (0, 2), οπότε από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ξ∈(0, 2) τέτοιο ώστε F΄(ξ)==f(ξ), ξ𝜖(0, 2) ⇔ 2f(ξ)=F(2) ⇔ 2f(ξ)= .
4. Έστω η f παραγωγίσιμηστο [1, 2], με f(1)<1 και 2>3. Να δείξετε ότι: **α)** υπάρχει ξ∈[1, 2], τέτοιο ώστε f(ξ)>ξ **β)** η f(x)=x έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1,2) **γ)** υπάρχει τουλάχιστον ένα ρ∈(1, 2) ώστε f΄(ρ)>1 **ΛΥΣΗ:** **α)** έστω f(x)≤x, για κάθε x[1, 2], τότε ≤== , άτοπο, γιατί 2>3. **β)** θεωρώ την g(x)=f(x)-x, που είναι συνεχής στο [1, ξ], με g(1)=f(1)-1<0 και g(ξ)=f(ξ)-ξ>0, οπότε από θ. Bolzano, υπάρχει κ𝜖(1, ξ) ώστε g(κ)=0 ⇔ f(κ)=κ **γ)** η f είναι συνεχής στο [1, κ] και παραγωγίσιμη στο (1, κ), οπότε από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ρ∈(1, κ)⊆(1, 2), ώστε f΄(ρ)==>1, γιατί f(1)<1 ⇔ -f(1)>-1 ⇔ κ-f(1)>κ-1.
5. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο [α,β], με f(α)<f(β)=0<f. Να δείξετε ότι: **α)** υπάρχει χ0∈(α,β): f΄(χ0)=0 **β)** υπάρχει ξ∈(α,β): f(ξ)≥f΄(ξ) **γ)** υπάρχει ρ∈(α,β): f΄΄(ρ)<0 **δ)** η f(x)+x3=α3 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β) **ΛΥΣΗ: α)** η f είναι συνεχής στα , ⊆[α, β] και παραγωγίσιμη στα , ⊆[α, β], οπότε από Θ.Μ.Τ. υπάρχουν ξ1𝜖: f΄(ξ1)=>0 & ξ2𝜖: f΄(ξ2)=<0. Η f΄ είναι συνεχής στο , ως δύο φορές παραγωγίσιμη στο [α, β], με f΄(ξ1) f΄(ξ2)<0, οπότε από θ. Bolzano, υπάρχει ∈⊆(α, β), ώστε f΄(χ0)=0 **β)** Έστω f΄(χ)-f(χ)>0, για κάθε x(α,β) ⇔ f΄(χ)-f(χ)>0, για κάθε x(α,β) ⇔ >0, για κάθε x(α,β). Θεωρώ την g(x)=e-xf(x), για την οποία ισχύει g΄(χ)>0, οπότε η g είναι γνήσια αύξουσα στο [α, β]. ΄ρα για χ<β ⟹ g(x)<g(β)=0 ⇒ e-xf(x)<0 ⇔ f(χ)<0, άτοπο, αφού 0<f . Άρα υπάρχει ξ∈(α,β): f(ξ)≥f΄(ξ) **γ)** η f΄ είναι συνεχής στο και παραγωγίσιμη στο , οπότε από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ρ(ξ1 ,ξ2): f΄΄(ρ)=<0 **δ)** θεωρώ την h(x)=f(x)+x3-α3, που είναι συνεχής στο [α, β], με h(α)=f(α)<0 και h(β)=β3-α3>0, οπότε από θ. Bolzano, υπάρχει κ∈(α, β), ώστε h(κ)=0 ⇔ f(κ)+κ3=α3.
6. Δίνεται η f:(1,+∞)⟶(0,+∞), συνεχής με f(x)=1, x>1. Να δείξετε ότι: **α)** f(x)= **β)** η f είναι κυρτή και ef(x)+x-2e≥0, για κάθε x>1 **γ)** 6e–e3≥6e2x-6ex2-x3, για κάθε x≥e **δ)** eln +lnα∙lnβ∙(β-α)>0, e<α<β **ΛΥΣΗ:** **α)** η f είναι συνεχής στο (1,+∞), οπότε η g(t)= είναι συνεχής στο (1,+∞), άρα η είναι παραγωγίσιμη στο (1,+∞). Είναι f(x)= ⇒ f΄(χ)=- ⇔ - , με f(x)>0 ⇔ = και επειδή οι , είναι συνεχείς στο (1,+∞), θα υπάρχει c∈ℜ, ώστε = +c. Για χ=e: c=0, οπότε = ⇔ f(x)=, χ>1. **β)** είναι f΄(χ)==- , x>1 και f΄΄(χ)= = >0, για χ>1. Άρα η f είναι κυρτή στο (1,+∞). Η εφαπτομένη της Cf στο (e, f(e)) είναι η (ε): ψ-f(e)=f΄(e)(x-e) ⇔ ψ-1=- (x-e) ⇔ eψ+x-2e=0. Επειδή η f είναι κυρτή στο (1,+∞), θα βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της, δηλ. f(x)≥ - x+2 ⇔ ef(x)+x-2e≥0, για κάθε x>1 **γ)** θεωρώ την h(x)=6e –e3-6e2x+6ex2+x3, που είναι παραγωγίσιμη στο (1,+∞) με h΄(χ)=6e -6e2+12ex+3x2 και h΄΄(χ)= 6ef(χ)+12e+6x>0. Άρα η h΄ είναι γνήσια αύξουσα στο (1,+∞), οπότε για χ≥e ⇒ h΄(χ)≥h΄(e)>0 ⇒ η h είναι γνήσια αύξουσα στο (1,+∞), οπότε για χ≥e ⇒ h(x)≥h(e)=0 **δ)** η f είναι συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β), οπότε από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ξ∈(α,β) ώστε f΄(ξ)=== . Είναι 1<e<α<ξ και η f΄ είναι γνήσια αύξουσα στο (1,+∞), οπότε f΄(e)<f΄(ξ) ⇔ - < ⇔ eln +lnα∙lnβ∙(β-α)>0, e<α<β