ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η άρτια στο ℜ συνάρτηση f για την οποία ισχύουν οι σχέσεις: Η f διέρχεται από το σημείο Α(2,6) και f ΄(2)=5. **α)** Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο x0=-2 **β)** Να βρεθεί η τιμή f ΄(-2)
2. Αν για την συνάρτηση f:ℜℜ ισχύουν ότι η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα ψ΄ψ και f ΄(x)>0 για κάθε x<0, να επιλυθεί η ανίσωση: f(x2+x+2) >f(x2-3x+10) (1).
3. Δίνεται η συνάρτηση f:ℜℜ η οποία είναι παραγωγίσιμη και περιττή στο ℜ και παρουσιάζει στο σημείο Α(1,5) ολικό μέγιστο. Να δείξετε ότι: **α)**f(x)-5 **β)** Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο Β(-1,f(-1)) είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.
4. Οι συναρτήσεις f και g ικανοποιούν τη σχέση (gog)(x)=αg(x)+βf(x3) για κάθε xℜ και α,βℜ\* . Αν η f είναι «1-1» να δείξετε ότι και η g είναι «1-1». Μετά να λύσετε την εξίσωση g(g(x)+ex)=g(g(x)+x+1)(1)
5. Να βρεθεί ο τύπος της άρτιας συνάρτησης f:ℜℜ όταν είναι συνεχής στο ℜ και ισχύει: xf(x)2x3, (1) για κάθε xℜ.
6. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής και παραγωγίσιμη στο x0ℜ. Αν ισχύει: = 0, να δείξετε ότι η ευθεία: ψ = 2x-3, εφάπτεται της Cf στο σημείο Α(x0, f(x0)).

1. Δίνεται η συνάρτηση fπαραγωγίσιμη στο [1, 2] και με συνεχή παράγωγο. Επίσης ισχύουν: f(1) = f(2) -  και f ΄(1)>4. Να δείξετε ότι: **α)** υπάρχει ένα τουλάχιστον x0(1, 2) τέτοιο ώστε: f ΄(x0) = x. **β)** υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ(1, 2) τέτοιο ώστε: f ΄(ξ) =4ξ.

1. Δίνεται η συνάρτηση f :[0, 2][0, 4] παραγωγίσιμη με f ΄(x)2, για κάθε x[0, 2]. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό ξ [0, 2], τέτοιο ώστε: f(ξ)=2ξ.

1. Δίνεται η συνάρτηση fπαραγωγίσιμη στο ℜ με f ΄(x)<x, για κάθε xℜ. Να δείξετε ότι: f(4)-f(2)< 6 .
2. Θεωρούμε τη συνάρτηση f(x)=lnx -+α, με x>0 και αℜ. Αν f(x)0, για κάθε x>0, τότε: **α)** Να δείξετε ότι α = -1. **β)** Να δείξετε ότι f(1)=0. **γ)**Να λυθεί η εξίσωση: f(x)=0 **δ)**Να λυθεί η ανίσωση: ln(2λ2+2) - >ln(λ2+3) - (1)
3. Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο [1, e] με f(1)=2, f(e)=e+1 και σύνολο τιμών [-1, 4]. Να δείξετε ότι: **α)** υπάρχουν τουλάχιστον δύο x1, x2(1, e) με x1x2 ώστε f ΄( x1)=f ΄( x2)=0 **β)** υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ (1, e) , τέτοιο ώστε f ΄΄(ξ)=0 **γ)** υπάρχει τουλάχιστον ένα x0(1, e), τέτοιο ώστε f(x0)[ f ΄( x0)-4(f(x0))4]= x0. **δ)** η ευθεία (ε): ψ=-x+e+2 τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη ξ0(1, e). **ε)** υπάρχουν ξ1, ξ2(1, e) με ξ1 ξ2 για τα οποία ισχύει: f ΄( ξ1)f ΄( ξ2)=1.

1. Δίνεται η συνάρτηση f:ℜℜ η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύουν: f(5)=6 και =1 **α)** Να δείξετε ότι f(3)=6 **β)** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της Cf στο x=3. **γ)** Να δείξετε ότι η ψ=x+2 τέμνει την Cf σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη x0(3, 5). **δ)** Αν η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο [3, 5] να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης f ΄(x)=0 στο διάστημα (3, 5).
2. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ορίζεται η f (3)(x) > 0 για κάθε xℜ. Να δείξετε ότι**α)** η f έχει ένα το πολύ σημείο καμπής. **β)** δεν υπάρχει ευθεία που να εφάπτεται σε δύο διαφορετικά σημεία της Cf .

1. Θεωρούμε τη συνάρτηση f(x)=lnx. Να μελετηθεί ως προς την κοιλότητα και τα σημεία καμπής. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στα σημεία καμπής. Να δείξετε ότι: lnxx-1, για κάθε x(0, 1] και lnxx-1, για κάθε x1.
2. Να βρείτε τα κ,λ,μℜ με κ,λ>0 για τα οποία η Cf με f(x)=κx+ και πεδίο ορισμού το ℜ, έχει ασύμπτωτη στο +μια ευθεία παράλληλη στην ψ=2x+1 και στο - έχει ασύμπτωτη την ευθεία ψ=-1
3. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει:≤ (1) για κάθε xℜ**α)** Να δείξετε ότι η Cf τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία Α(3,0) και Β(4,0) **β)** Αν η f είναι συνεχής στο (3,4) να αποδείξετε ότι η Cf τέμνει την Cg με g(x)=-x2+13 σε ένα τουλάχιστον σημείο που ανήκει στο διάστημα (3,4)
4. Δίνεται η συνάρτηση f που είναι συνεχής στο [0,2] με ελάχιστη τιμή το –1 και μέγιστη τιμή το 1. Να δείξετε ότι η εξίσωση f4(x)+5f(x)=3, έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (0,2).
5. Αν υπάρχει στο ℜ το F(x) και ισχύει: xF(x)e2x-1, για κάθε xℜ, να βρεθεί το F(x).
6. Δίνεται η συνάρτηση f που είναι συνεχής στο x0=2 και για την οποία ισχύει: (x-2)f 2(x)+f(x)=x2-x-2, (1) για κάθε xℜ. Δείξτε ότι η f παραγωγίζεται στο x0=2.
7. Έστω f ΄(x) =  , για κάθε x(0, +) και f(1)=0. Να βρεθεί ο τύπος της f και να δείξετε ότι η Cf έχει ένα μόνο σημείο καμπής.
8. Αν για την f ισχύει f΄(x2+2) = x2 + , για κάθε xℜ, με f(2)=3, να βρεθεί ο τύπος της.
9. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο [2000, 2006] και ισχύει: f(2001)<f(2000)<f(2006)<f(2004). Να δείξετε ότι υπάρχουν x1, x2(2000, 2006), τέτοια ώστε: f΄(x1)=f΄(x2)=0.
10. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο [α, β] με f ΄(α)<0, f ΄(β)<0 και f(α)<f(β) **α)** Να δείξετε ότι υπάρχει x0(α, β) στο οποίο η γραφική παράσταση της f δέχεται εφαπτομένη παράλληλη προς την ευθεία που συνδέει τα άκρα της **β)** Να δείξετε ότι η εξίσωση f ΄΄(x)=0 έχει μία τουλάχιστον λύση στο (α, β).
11. Δίνεται μία συνάρτηση fπαραγωγίσιμη στο ℜ για την οποία ισχύουν: f(π)=1, f(x)0, για κάθε xℜ και 2f΄(x)=f2(x)·ημx, (1) για κάθε xℜ. **1)** Να βρείτε τον τύπο της f. **2)** Αν g είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση στο ℜ με g(x)>0 και = f(x), για κάθε xℜ, να δείξετε ότι: **(α)** β-α2[ln(g(β))-ln(g(α))] 2(β-α), για κάθε α, βℜ, με α<β (**β)** η εξίσωση ln(g(x))-2x=0, έχει μία το πολύ πραγματική ρίζα.
12. Έστω η συνάρτηση με τύπο f(x)=x2+3x+, x[-5, 0]. **1)** Να βρείτε τις πιθανές θέσεις τοπικών ακρότατων. **2)** Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. **3)** Έστω συνάρτηση gπαραγωγίσιμη και γνήσια αύξουσα στο [-3, 0], με σύνολο τιμών το [-2, -1]. Να δείξετε ότι υπάρχει ξ(-3, 0) τέτοιο ώστε να ισχύει:3f΄(g(ξ))·g΄(ξ)=1.
13. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού το ℜ και η h(x)=x·f(x). Αν ξ0 και η εφαπτομένη της Cf στο σημείο Α(ξ, f(ξ)) τέμνει τον x΄x στο Β(2ξ, 0), να αποδειχθεί ότι: η εξίσωση x·f΄(x)+f(x)=0 έχει μία τουλάχιστον λύση στο ℜ και υπάρχει σημείο της Ch που η εφαπτομένη της είναι παράλληλη με τον x΄x.
14. Δίνεται η συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο ℜ, με f΄(0)>0 και f(1)=f(0)+1/2. Να αποδείξετε ότι: **1)** υπάρχει τουλάχιστον ένα α(0, 1), τέτοιο ώστε f΄(α)=α. **2)** υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ(0, α), τέτοιο ώστε f΄(ξ)=3ξ.
15. Δίνεται η συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο ℜ, για την οποία ισχύει xf(x) x+x2, (1) για κάθε xℜ και α είναι μια θετική ρίζα της εξίσωσης f(x)=0. **α)** Να βρεθεί το f(0) και το f΄(0) **β)** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της Cf στο σημείο Α(0, f(0)). **γ)** Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα ξ της f΄(x)=0 στο (0, α). **δ)** Αν g(x)=lnx, x>0 να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ1(0, ξ), τέτοιο ώστε f΄΄(ξ1)+g΄(ξ)=0, (2) όπου ξ είναι η ρίζα της f ΄(x)=0 που βρήκατε στο γ) ερώτημα.
16. Δίνεται η συνάρτηση f:ℜℜ γνήσια μονότονη που διέρχεται από τα σημεία Α(3,2) και Β(5,9). **α)** Να δείξετε ότι είναι γνήσια αύξουσα. **β)** Να λύσετε την εξίσωση: f(2+f –1(x2+x))=9 (1). **γ)** Να λύσετε την ανίσωση: f(f(x2-4x)-6)<2 (2).
17. Δίνεται η συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη, με f3(x)+2f(x)=x, (1) για κάθε xℜ. **α)** Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα κυρτά και τα σημεία καμπής. **β)** Να βρείτε την εφαπτομένη στο σημείο καμπής. **γ)** Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της. **δ)** Αν g(x)= να βρείτε την ασύμπτωτη της Cg στο + και να υπολογίσετε το εμβαδόν που περικλείεται από την Cg , την ασύμπτωτη και τις ευθείες x=1, x=e
18. Δίνεται η συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη, με 2f(x2)-f 2(x)1, (1) για κάθε xℜ. **α)** Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ(0,1), τέτοιο ώστε f ΄(ξ)=0 **β)** Να δείξετε ότι f ΄(0)=f ΄(1) **γ)** Να δείξετε ότι η εξίσωση f ΄΄(x)=0, έχει δύο τουλάχιστον ρίζες.

1. Δίνεται η συνάρτηση f:[α, β][-1, 2] η οποία είναι συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμηστο (α, β) με f(α)=0 και f(β)=1. **α)** Να δείξετε ότι υπάρχουν x1, x2(α, β) ώστε f ΄(x1)=0 και f ΄(x2)=0 **β)** Να δείξετε ότι η εξίσωση: f ΄(x)=(x2+1)f(x) έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β), όταν η f ΄ είναι συνεχής στο [α, β].
2. Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση f, για την οποία ισχύουν: f(α)>0, f(β)<0, f(γ)>0 με α<β<γ, α,β,γℜ και f ΄΄(x)0, για κάθε x[α,γ]. **α)** Να δείξετε ότι η f(x)=0 έχει 2 ακριβώς ρίζες στο (α, γ) **β)** Να δείξετε ότι f΄΄(x)>0, για κάθε x[α,γ]. **γ)** Να δείξετε ότι f(x)f ΄(α)(x-α)+f(α), για κάθε x[α,γ].
3. Δίνεται η συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο ℜ, με f(x)+f(-x)=6, (1) για κάθε xℜ και f΄΄ συνεχή στο ℜ. Αν f΄΄(2)<0 και η εξίσωση f ΄΄(x)=0 έχει ακριβώς μια λύση να μελετηθεί ως προς τη κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
4. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο ℜ η οποία έχει σύνολο τιμών το ℜ και για κάθε xℜ ικανοποιεί τη σχέση f(f(x))+x=0 (1). Να αποδείξετε ότι: **α)** η f είναι «1-1» **β)**f–1(x)=-f(x) **γ)** η f δεν είναι γνήσια μονότονη **δ)** η f είναι περιττή.
5. **α)** Δίνονται οι συναρτήσεις f,g:Αℜ. Αν η f είναι γνήσια αύξουσα και η g γνήσια φθίνουσα στο ℜ, τότε να αποδείξετε ότι: **(1)** για κάθε h>0 και xℜ ισχύει g(x+h)-g(x)<f(x+h)-f(x). **(2)** οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο. **β)** Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων με τύπους f(x)=ex+x3 και g(x)=e-x-2x έχουν μοναδικό κοινό σημείο.

1. Έστω η συνάρτηση f, η οποία για κάθε xℜ ικανοποιεί τη σχέση: (fof)(x)=x3 (1)**α)** Να αποδείξετε ότι: **(1)** η f αντιστρέφεται **(2)**f(x3)=(f(x))3, για κάθε xℜ**β) (1)** Να λύσετε την εξίσωση: f(x)=x**(2)** Να αποδείξετε ότι: [f(-1)]3+[f(1)]3=f(0) (2)**(3)** Αν f(8)=64 να υπολογίσετε την τιμή f(2).
2. Έστω η συνάρτηση f, η οποία για κάθε x,ψℜ ικανοποιεί τη σχέση: f(x+ψ)= f(x)+f(ψ) (1) Να αποδείξετε ότι: **α)** η Cf διέρχεται από την αρχή των αξόνων.  **β)** η f είναι περιττή. **γ)**f(x-ψ)=f(x)-f(ψ), για κάθε x,ψℜ. **δ)** αν η εξίσωση f(x)=0 έχει μοναδική λύση την x=0, τότε η f είναι «1-1». **ε)**f –1(x+ψ)= f –1(x)+f–1(ψ), για κάθε x,ψℜ.
3. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει: f(x)ημxημ5x, (1) για κάθε xℜ. Αν ισχύει: f(x)=λℜ, να βρείτε τον αριθμό λ.
4. Δίνεται η συνάρτηση f:ℜℜ παραγωγίσιμη με –1<f ΄(x)<1, για κάθε xℜ και f(3)=2. **α)** Να αποδείξετε ότι -1<f(0)<5 **β)** Αν για τη συνάρτηση g ισχύει g(x)=f(x2-4x+3), να αποδείξετε ότι η Cg έχει τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με την ευθεία (ε): ψ=3x-4, του οποίου η τετμημένη βρίσκεται στο διάστημα (1, 3). **γ)** Αν για τη συνάρτηση h ισχύει h(x)=x3e, να υπολογίσετε το .
5. Η F είναι μια παράγουσα της f και η F δεν είναι «1-1» στο ℜ. Να δείξετε ότι υπάρχει ξℜ τέτοιο ώστε: f(ξ)=0
6. Να βρεθεί συνάρτηση f:(0, +)ℜ τέτοια ώστε f ΄΄(x)=-2/x3 και η Cfνα έχει ασύμπτωτη στο + την ψ=3x-4.
7. Μία συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο ℜ και για κάθε xℜ, ισχύει: f 2(3x+1)+44f(2x2+x+1). Να δείξετε ότι η f και η f ΄ δεν αντιστρέφονται και ότι η εξίσωση f΄΄(x)=0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο ℜ.
8. Δίνεται η συνάρτηση f με f(x)=2x+3+ **α)** Να δείξετε ότι η ευθεία (ε): ψ=2x+3 είναι ασύμπτωτη της Cf στο -. **β)** Να βρείτε το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου που περικλείεται από την Cf, την (ε), τον άξονα ψ΄ψ και την ευθεία x=λ, λ<0. **γ)** Να βρείτε το Ε(λ) **δ)** Αν το λ ελαττώνεται με ρυθμό 1 μον./sνα βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε(λ) τη χρονική στιγμή που είναι λ= -ln3

1. Να βρείτε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f:ℜℜ και g:(0, +)ℜ, για τις οποίες ισχύουν: g(1)=1, f(g(x))=x και f ΄(g(x))=x για κάθε x>0
2. Να βρείτε τις συναρτήσεις f , οι οποίες είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο ℜ και για τις οποίες ισχύουν: f(0)=2, f ΄(0)=0 και f΄΄(x)=f(x), για κάθε xℜ.
3. Δίνεται η συνάρτηση f με f(x)=2α2x3-3(α2+1)x2+6x-6. Να βρείτε τις τιμές του αℜ\* ώστε η f να παρουσιάζει στο 1 τοπικό μέγιστο.
4. **α)** Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο ℜ τότε να δείξετε ότι δεν υπάρχει ξℜ στο οποίο η f να παρουσιάζει ταυτόχρονα τοπικό ακρότατο και σημείο καμπής. **β)** Να δείξετε ότι η f(x)= ex- -x-2006 δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο 0.

1. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο [-1, 1] και παραγωγίσιμη στο (-1, 1), μεf ΄(x)0 για κάθε x(-1, 1)-{0} και f(-1)=f(1)=0, f(0)=. Aν η κάθετη στην εφαπτομένη σε κάθε σημείο Μ(x0, f(x0)) της Cf με x0-1,1,0 τέμνει τον ψ΄ψ σε σημείο με τεταγμένη ίση με το μισό της τεταγμένης του Μ, να βρεθεί ο τύπος της f και να υπολογιστεί το εμβαδόν που περικλείεται από την Cf και τον x΄x.
2. Δίνεται συνάρτηση f:(0, +)ℜ, παραγωγίσιμη με f(1)=1 και f(x)=xf ΄(x)-x. **α)** Να δείξετε ότι f(x)=xlnx+x, x>0 **β)** Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα **γ)** Να βρείτε το σύνολο τιμών της f**δ)** Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής **ε)** Να βρείτε το εμβαδόν Ελ του χωρίου που περικλείεται από την Cf, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=1 και x=λ, με 0<λ<1/e και να βρείτε το
3. Δίνεται η f(x)=, με α, βℜ. Να βρείτε τα α, β ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο ℜ. Για τις τιμές των α, β που βρήκατε: **α)** να βρείτε την εφαπτομένη της Cf στο σημείο Μ(0,f(0)). **β)** να εξετάσετε αν υπάρχουν ασύμπτωτες της Cf  **γ)** να δείξετε ότι f(x)> 3/2, για κάθε x>0 **δ)** να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη Cf, τον x΄x και τις ευθείες x=-1 και x=1
4. Η f είναι παραγωγίσιμη στο ℜ με f(x)>0 και lnf(x)+ef(x)=x, (1) για κάθε xℜ **α)** Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία **β)** Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται **γ)** Να λύσετε τις εξισώσεις: f(x)=1 και f(x)=e **δ)** Να υπολογίσετε το άθροισμα: Ι=+
5. **Α.** Να δείξετε ότι ισχύει: lnxx-1, (1) για κάθε x>0. **B.** Η f είναι παραγωγίσιμη στο [1, +) με f(x)1 και f(x)-lnf(x)=x, (2) για x1 **α)** Να υπολογίσετε το f(1) **β)** Να λύσετε τις εξισώσεις f(x)=1 και f(x)=e **γ)** Να δείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα **δ)** Να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης της f **ε)** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την Cf-1, την διχοτόμο του 1ου τεταρτημορίου και την ευθεία x=e.
6. Δίνεται η f(x)=3-lnx-ex, ορισμένη στο Δ=(0, 3]. **α)** Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία στο Δ **β)** Να βρεθεί το f(Δ) **γ)** Να δείξετε ότι η εξίσωση lnx+ex=3, έχει ακριβώς μια λύση στο Δ.
7. Δίνεται η f(x)=-x. **α)** Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της **β)** Να μελετηθεί ως προς την συνέχεια **γ)** Να μελετηθεί ως προς το πρόσημο των τιμών της.
8. Δίνεται η f συνεχής στο [α, β] και x1, x2, x3[α, β]. Να δείξετε ότι υπάρχει ξ[α, β] τέτοιο ώστε: 6f(ξ)=f(x1)+2f(x2)+3f(x3).
9. Δίνεται η f συνεχής στο [0, 3] και για την οποία ισχύουν: f(0)=f(3), f(1)=f(2). Να δείξετε ότι υπάρχει ξ[0, 2] τέτοιο ώστε: f(ξ)=f(ξ+1).
10. Δίνεται η f:[0, 1]ℜ, συνεχής στο [0, 1] και παραγωγίσιμη στο (0, 1) με f(0)=0 και f(1)= . Nα δείξετε ότι υπάρχει x0(0, 1) ώστε: f΄(x0)=.
11. Θεωρούμε τη συνάρτηση f(x)=2+(x-2)2 με x2. **α)** Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1». **β)** Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f-1 της f και να βρείτε τον τύπο της. **γ) i.** Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f-1 και f με την ευθεία ψ=x **ii.**  Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f-1 και f .
12. Δίνεται η συνάρτηση f(x)=-lnx. **α)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f. **β)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς δύο ρίζες στο πεδίο ορισμού. **γ)** Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g(x)=lnx στο σημείο Α(α, lnα) με α>0 και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της h(x)=ex στο σημείο Β(β, eβ) με βℜ ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης f(x)=0. **δ)** Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες.
13. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [1, 5] και f(x)>0, για κάθε x∈[1, 5]. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ∈(1, 5), τέτοιο ώστε να ισχύει: 2+3=0.

****

1. Δίνεται η συνάρτηση f(x)=, xℜ. **α)** Να αποδείξετε ότι f(-x)+f(x)=x2συνx, xℜ **β)** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα Ι=
2. Έστω η f:ℜ⟶ℜ,παραγωγίσιμη, γνήσια φθίνουσα, κοίλη με f΄(1)=f(1)=2. Να δείξετε ότι: **α)** <4 **β)** υπάρχει ξ∈(0, 2) τέτοιο ώστε =2f(ξ)
3. Έστω η fπαραγωγίσιμηστο [1, 2], με f(1)<1 και 2>3. Να δείξετε ότι: **α)** υπάρχει ξ∈[1, 2], τέτοιο ώστε f(ξ)>ξ **β)** η f(x)=xέχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1,2) **γ)** υπάρχει τουλάχιστον ένα ρ∈(1, 2) ώστε f΄(ρ)>1
4. Ηf είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο [α,β], με f(α)<f(β)=0<f. Να δείξετε ότι: **α)** υπάρχει χ0∈(α,β): f΄(χ0)=0 **β)** υπάρχει ξ∈(α,β): f(ξ)≥f΄(ξ) **γ)** υπάρχει ρ∈(α,β): f΄΄(ρ)<0 **δ)** η f(x)+x3=α3 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β)
5. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f:[α, β]R. Να δείξετε ότι υπάρχει ξ(α, β) τέτοιο ώστε: f(ξ)=0 ή =.
6. Οι συναρτήσεις f, g:[α, β]R είναι συνεχείς. Να δείξετε ότι αν υπάρχει ξ(α, β) τέτοιο ώστε: =, τότε υπάρχει αριθμός c(α, β) τέτοιος ώστε: f(c)=g(c).
7. Οι συναρτήσεις f, g:[α, β]R είναι συνεχείς. Να δείξετε ότι αν η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο [α, β], τότε υπάρχει ξ[α, β], τέτοιο ώστε: =f(ξ) 
8. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο R η οποία είναι «1-1» και ισχύει: f(α∙β)=f(α)+f(β), για κάθε α, β R. Να δείξετε ότι: f-1(x+ψ)=f-1(x)∙f-1(ψ) για κάθε x,ψR.
9. Η f:RR είναι παραγωγίσιμη και ισχύει: f3(x)+3f(x)=x5+x+1 (1), για κάθε xR. **α)** Να δείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα στο R **β)** Να δείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει μοναδική λύση στο (-1, 0) **γ)** Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται **δ)** Αν η ρ είναι ρίζα της f(x)=0, τότε το σημείο Μ(0, ρ) Cf -1. **ε)** Η εξίσωση f(x)=f -1(x) έχει μια τουλάχιστον λύση στο (0, 1).
10. Η συνάρτηση f:RR είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει: f (f΄(x))(x-α)2, α0 για κάθε xR. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x0=α και f(0)=0, να δείξετε ότι f ΄΄(α)=0.
11. Δίνεται η συνάρτηση f(x)=(x+1)lnx. **α)** Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της. **β)** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της Cf στο σημείο Α(1, 0) και να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη την διαπερνά. **γ)** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την Cf, την εφαπτομένη στο σημείο Α(1, 0) και τις ευθείες x = 1/e και x = 1. **δ)** Αν I(x)=, x(0, +), να βρείτε το Ι(x).
12. Δίνεται η συνάρτηση h(x)=, όπου η f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη με f(x)>0 και f ΄(x)0 για κάθε x[α, β]. **α)** Να βρείτε την h΄(x). **β)** Αν ισχύει =0 και =0, να εξετάσετε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle για την g(x)=, στο [α, β]. **γ)** Να δείξετε ότι υπάρχει x0(α, β), ώστε [f ΄(x0)]2=f(x0)f ΄΄(x0).
13. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με f(0)=1 και f ΄(x)>0, για κάθε xR. Να δείξετε ότι =ln2.
14. Θεωρούμε συνάρτηση f ορισμένη , παραγωγίσιμη, αντιστρέψιμη και κυρτή στο [0, 1] με f΄(0)=0 για την οποία ισχύει: 2f(x)=f΄(x)∙(f-1(x))2 όπου f -1 συνεχής στο πεδίο ορισμού της με f -1(0)=0. Αν ψ=2x-1 εφαπτομένη της Cf στο σημείο Α(1, f(1)), τότε: **α)** Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και να βρεθούν το πρόσημο της f και το πεδίο ορισμού της f-1. **β)** Να δείξετε ότι οι Cf, Cf έχουν κοινά δύο μόνο σημεία στο [0, 1] με τετμημένες x1=0, x2=1. **γ)** Να δείξετε ότι: = 
15. Αν 0 < α < β < π/2 και η συνάρτηση f:[α, β]R είναι συνεχής στο [α, β] με f(α)f(β), να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ(α, β) τέτοιο ώστε: f(ξ)=ημ2ξ∙f(α)+συν2ξ∙f(β)
16. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και τρεις φορές παραγωγίσιμη στο μηδέν με f(0)=f ΄(0)=f ΄΄(0)=0 και f(3)(0)=6 τότε να βρείτε το .
17. Δίνεται η συνεχής στο R συνάρτηση g και η f με f(x)=, για κάθε xR. Αν είναι f(x)2ex-ημx-2, για κάθε xR, να δείξετε ότι f ΄(0)=1 και να βρεθεί το 
18. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία την f(x)=ln(1+x2)-e-x+1, xR
19. Δίνεται η συνάρτηση f που ικανοποιεί τις σχέσεις: f(α)=f(β)=0, όπου α<β και f΄΄(x)>0 για κάθε x[α, β]. Να δείξετε ότι f(x)<0, για κάθε x(α, β).
20. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο f(x)=, με x>0 **α)** Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα **β)** Να δείξετε ότι: f(x) e, για κάθε x  **γ)** Να δείξετε ότι: dx
21. Για τις συναρτήσεις f και g ισχύουν: **α.** έχουν συνεχείς παραγώγους στο [0, α] **β.**f(0)=0 **γ.**f ΄(x)0 και g΄(x)0, για κάθε x **δ.** η f δεν είναι σταθερή στο [0, α] . Να δείξετε ότι: + f(α)g(β), για κάθε β με 0<β<α.
22. Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, f(0)=f΄(0)=1 και f΄΄(χ)<f΄(χ), για κάθε xR. Να δείξετε ότι f(x)≤ex, για κάθε xR.
23. Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο R, f΄(α)=f΄(β)=0 και f΄΄(χ)≥0, για κάθε xR, με α<β. Να δείξετε ότι f(α)=f(β).
24. Αν για την συνεχή συνάρτηση f:RR ισχύει +1ex-2008ημx, για κάθε xR, να δείξετε ότι: =2007.
25. Αν για τις συνεχείς συναρτήσεις f, g ισχύουν: f(α)<g(α) και >, να δείξετε ότι υπάρχει x0(α, β), τέτοιο ώστε να είναι f(x0)=g(x0).
26. Αν για τις συνεχείς στο [α, β] συναρτήσεις f, g ισχύει ·>0, (1) να δείξετε ότι υπάρχει ξ(α, β), τέτοιο ώστε =
27. Αν η f έχει δεύτερη συνεχή παράγωγο στο [α, β] και ισχύει f(α)=0=f(β), να δείξετε ότι 0.
28. Αν για την παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f ισχύει f ΄(0)=1 και xe-x, για κάθε xR, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της Cf στο Α(0, f(0))
29. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο [α, β] και f ΄΄(x)>0 για κάθε x[α, β], να δείξετε ότι: **α)** f(x)-f(α) f ΄(β)(x-α), για κάθε x[α, β] **β)** 2f ΄(β)(β-α)2+2 f(α) (β-α)
30. Αν η f είναι συνεχής στο [0, 1], f(0)>0 και <, να δείξετε ότι η εξίσωση f(x)=x2008 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (0, 1].
31. Δίνονται οι συναρτήσεις f(x)=ex-1+x2-3x+1, g(x)=lnx-x+1 **α)** Να μελετηθούν οι f, g ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα **β)** Να λυθεί η εξίσωση: ex-1-lnx+x2-2x=0 **γ)**Να δείξετε ότι οι Cf, Cg  έχουν κοινή εφαπτομένη τον χ΄χ **δ)** Να λυθεί η εξίσωση: 3ex-1+3χ+χ3=3χlnx+3x2+4
32. Δίνεται η f:(0, +)R με f(1)=1, f ΄(1)=2, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και για κάθε x>0 ισχύει 2f(x)- x2 f ΄΄(x) = 0 (1). Να δείξετε ότι η f ΄΄ είναι συνεχής και να βρείτε τον τύπο της f.
33. Έστω συνάρτηση f με f(x)0 και f3(x)+f΄(x)=0 (1), για κάθε x[α, β]. Αν f(α), -f(β) είναι ρίζες της εξίσωσης 3x2-5x-1=0, να υπολογίσετε το 
34. Δίνεται συνάρτηση f με f(x)>0 και f ΄(x)=f2(x) (1), για κάθε x[0, 1]. Αν f(1)=2f(0) να υπολογίσετε το 

1. Δίνεται η συνάρτηση f:[0,1]R, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με f΄΄ συνεχή στο [0,1] και ο άξονας x΄x εφάπτεται στη Cf στο Α(1,0) **α)** Να δείξετε ότι  =  **β)** Αν f ΄΄(x)= , να υπολογίσετε το 
2. Η f(x)=, α,β,γ∈R έχει ασύμπτωτες τις χ=2 και ψ=2 στο +∞. **α)** Να δείξετε ότι α=β=γ=2 και να βρείτε το σύνολο τιμών της f **β)** Να βρείτε μια παράγουσα F της f στο (2,+∞) **γ)** Να λύσετε την εξίσωση (f(x)-2)5=e6-2f(x) (1), στο (2,+∞) **δ)** Να βρείτε το εμβαδόν μεταξύ των Cf, χ΄χ, χ=3, χ=λ>3 και μετά το Ε(λ) **ε)** Να δείξετε ότι f-1(x)=f(x), για κάθε χ≠2
3. Η f είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο R, με f(1)=0, 1≤f΄(χ)≤1+ (1), για κάθε x≥1 **α)** Να δείξετε ότι χ-1≤f(x)≤x-1+ , για κάθε x≥1 **β)** Να δείξετε ότι η ψ=χ-1 είναι πλάγια ασύμπτωτη της Cf, στο +∞ **γ)** Αν f(2)=1/3, να δείξετε ότι –ln2<<-1/2 **δ)** Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, f΄΄(1)=2, να δείξετε ότι =1
4. Έστω συνεχής συνάρτηση f:[0,+ )R, για την οποία ισχύει: xf΄(x)=f(x)+ (1) Αν f(0)=1, να βρείτε τον τύπο της f.
5. Δίνεται συνάρτηση f με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο [α, β] και f(α)=f(β). Αν =0, να δείξετε ότι η εξίσωση: xf ΄΄(x)+f ΄(x)=0, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β).
6. Δίνεται η συνάρτηση f:RR με f(xψ)=f(x)+f(ψ), για κάθε x,ψR και =2010. **α)** Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 1 **β)** Να βρείτε το  **γ)** Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 3.
7. Η f είναι παραγωγίσιμη στο R και η f΄ είναι «1-1».Να δείξετε ότι κάθε εφαπτομένη της Cf, έχει ένα μοναδικό κοινό σημείο με τη Cf.
8. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f:RR με f(0)=0 και f(x)=+∞. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ>0 τέτοιο ώστε f(ξ)=2-ξ+ξ-ξσυν
9. Έστω f, g δύο συναρτήσεις συνεχείς στο [0,1]. Αν fog=gof, η f είναι γνήσια φθίνουσα στο [0,1], 0f(x)1 και 0g(x)1 για κάθε x[0,1], να δείξετε ότι υπάρχει ξ[0,1], τέτοιο ώστε f(ξ)=ξ και g(ξ)=ξ.
10. Έστω συνεχής συνάρτηση f:RR με f(-1)=1 και f(f(x))+x6f(x)=0 (1), για κάθε xR. **α)** Να βρεθούν οι τιμές f(1) και f(0) **β)** Να υπολογιστεί το 
11. Έστω συνεχής συνάρτηση f:RR με f(0)=2 και f(f(x))+4f(x)=6-x4 (1), για κάθε xR. **α)** Να βρεθούν οι τιμές f(2), f(-2) και μετά οι τιμές f και f **β)** Αν  =-4, να βρεθεί το f(f(x)).
12. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f:[0, 4]R, για την οποία ισχύει ότι f(0)=f(4)=2 και η f ΄ είναι γνήσια φθίνουσα στο [0, 4]. **α)** Να δείξετε ότι f(x)2, για κάθε x[0, 4] **β)** Αν η μέγιστη τιμή της f στο [0, 4] είναι 3, να δείξετε ότι υπάρχουν x1, x2 στο (0, 4), τέτοια ώστε να ισχύει: -= 4 **γ)** Θεωρούμε τις συναρτήσεις g(x)=+x και φ(x)=2, με x[0, 4]. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα x0(0, 4), τέτοιο ώστε οι εφαπτόμενες των Cf και Cg στο σημείο με τετμημένη x0 να είναι παράλληλες.
13. Δίνεται η παραγωγίσιμη f:RR με f(0)=1, τέτοια ώστε f(x)f ΄(x)+f2(x)=xe-2x, xR. **α)** Να βρεθεί ο τύπος της f. **β)** Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης f. **γ)** Να δείξετε ότι η ευθεία (ε): ψ = -x +1 εφάπτεται της Cf.
14. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f:RR με f 3(x)+f(x)=x (1), για κάθε xR. **α)** Να βρείτε το f(0). **β)** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και το πρόσημο της. **γ)** Να δείξετε ότι xf ΄(x)<f(x)<x, για κάθε x>0.
15. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f:[1, +)R με xf΄(x)+2x2lnx=2x2f(x)+ex (1), x[1, +), f ΄(1)=3e και f(x)>x2+1, για κάθε x[1, +). **α)** Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της. **β)** Να δειχθεί ότι f(x)>2x2 + lnx, για κάθε x[1, +).
16. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f:[α, β]R και x0<α. **α)** Να δείξετε ότι αν μία τουλάχιστον ευθεία που διέρχεται από το σημείο Μ(x0, ψ0) τέμνει την Cf σε δύο διαφορετικά σημεία Ν(x1, f(x1)), Κ(x2, f(x2)), τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ(α, β) τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της Cf στο Ρ(ξ, f(ξ)) να διέρχεται από το Μ(x0, ψ0) **β)** Να δείξετε ότι αν η Cf ανήκει σε ένα από τα ημιεπίπεδα μιας ευθείας (ε) που διέρχεται από το Μ(x0, ψ0) και έχει με την (ε) κοινό σημείο το Δ(λ, f(λ)), τότε η (ε) εφάπτεται της Cf στο σημείο Δ(λ, f(λ)).
17. Η f:(0,+) R, είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με f(1)=2e και f ΄(x)=2x3ex +, x>0. Να βρεθεί ο τύπος της f και να εξετασθεί αυτή ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τις ασύμπτωτες.
18. Μία συνάρτηση f:RR είναι συνεχής με f(10)= 1/10, f(12)=10 και για κάθε xR ισχύουν: f(x)0 και =. Να δείξετε ότι: **α)**f(2)·f(3)=f(4)·f(5) **β)** υπάρχει ξ[2, 3] με f 2(ξ)= f(2)·f(3)  **γ)** η f δεν είναι «1-1»
19. Μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β). Να δείξετε ότι υπάρχουν ξ1, ξ2, ξ3(α, β) με: f ΄(ξ1)+2f ΄(ξ2)+3f ΄(ξ3) = 6
20. Θεωρούμε την εξίσωση: (x-1)lnx=x+1. **α)** Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ακριβώς ρίζες **β)** Αν α, β οι ρίζες της εξίσωσης, να δείξετε ότι: α·β=1
21. Μία συνάρτηση f, είναι ορισμένη και τρεις φορές παραγωγίσιμη στο (α, β). Αν f(x)0, για κάθε x(α, β) και η f έχει δύο διαφορετικές ρίζες στο (α, β), να δείξετε ότι η εξίσωση f ΄΄΄(x)=0, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β).

**

1. Θεωρούμε τη συνάρτηση f(x)=ln(ex-1+2010x) και την ευθεία g(x)=x-1, x≥0. **α)** Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν το Α(0, -1) μοναδικό σημείο τομής. **β)** Να δείξετε ότι f(x)≤x+2009, **γ)** Αν Ε(λ) είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις Cf, Cg, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=0, x=λ με λ>1, να δείξετε ότι 2010e.
2. **Α.** Δίνεται η συνάρτηση f που είναι «1-1», με συνεχή πρώτη παράγωγο. Να δείξετε ότι: + =f(β)β-f(α)α. **Β.α)** Να δείξετε ότι η συνάρτηση με τύπο f(x)= έχει αντίστροφη, της οποίας να βρείτε τον τύπο **β)** Να υπολογίσετε το Ι=)dx



1. Δίνεται η συνάρτηση f(x)=x3-x2+x, x∈ℜ. **α)** Να δείξετε ότι η f είναι «1-1» και ότι το σημείο Α(1,1) είναι κοινό σημείο των Cf, Cf-1. **β)** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της Cf στο Α(1, 1) και να αποδείξετε ότι αυτή έχει και δεύτερο κοινό σημείο με την Cf  **γ)** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της Cf-1 στο Α(1, 1). **δ)** Να υπολογίσετε το 
2. Δίνεται η συνάρτηση f, μη σταθερή, παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε να ισχύει: (f(x))2+(f ΄(x))2=1, για κάθε x∈ℜ. Δίνονται επίσης οι g(x)=exκαι h(x)=exf(x), για κάθε x∈ℜ. **α)** Αν οι Cg, Ch έχουν κοινό σημείο, τότε έχουν σ’ αυτό κοινή εφαπτομένη. **β)** Δείξτε ότι -1≤f(x)≤1, για κάθε x∈ℜ **γ)** Αν η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο 0, τότε: f(0)=1 και η ευθεία ψ=x+1 είναι κοινή εφαπτομένη των Cg, Ch.

1. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε: f(-4)=0, f(0)=4 και f(4)=2. Να δείξετε ότι: **α)** υπάρχουν x1, x2∈(-4, 4) με x1<x2, τέτοιοι ώστε: f(x1)=-x1 και f(x2)=x2 **β)** η εξίσωση f(x)f ΄(x)=x έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (-4, 4) **γ)** Δίνεται η g:[0, 4]→ℜ η οποία έχει συνεχή αντίστροφη και συνεχή παράγωγο. Αν ισχύουν =12 και f(x)=g(x) για κάθε x∈[0, 4], να αποδείξετε ότι =4



1. Θεωρούμε την f(x)=ln( -x). **1)** Να αποδείξετε ότι είναι περιττή **2)** Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρείτε την f-1. **3)** Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. **4)** Αν g(x)=ln( +x), να δείξετε ότι g= -f και ότι για 0<α<β ισχύει: (α)<<(β) **5)** Να εξετάσετε αν οι Cf, Cf-1 έχουν ασύμπτωτες. **6)** Να δείξετε ότι οι Cf, Cf-1 έχουν στο Ο(0, 0) κοινή εφαπτομένη και να βρεθεί αυτή. **7)** Να δείξετε ότι οι Cf, Cf΄ τέμνονται σε ένα ακριβώς σημείο. **8)** Να βρεθούν τα ολοκληρώματα: I= και J=

**9)** Να δείξετε ότι =-1)΄(x) dx και να υπολογίσετε το I=με άλλο τρόπο από το 8. **10)** Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα, την F(x)= x, x≥0. **11)** Να βρείτε συνάρτηση h, τέτοια ώστε να ισχύουν: h΄΄(x)=-h΄(x) (1), για κάθε x∈ℝ, h΄(0)= -1, h(0)=0.

1. **α)** Να δείξετε ότι η εξίσωση 2lnx+x2=2x, έχει μοναδική θετική ρίζα στο (1, 2) **β)** Δίνονται οι συναρτήσεις f(x)=-(lnx+1)+x και g(x)=-. **β1)** Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός x0>0 ώστε η εφαπτομένη της Cf στο Α(x0, f(x0)), να είναι κάθετη στην εφαπτομένη της Cg στο Β(x0, g(x0)). **β2)** Να εξετάσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα. **β3)** Να βρείτε όλους τους θετικούς αριθμούς α, β για τους οποίους ισχύει +=  **β4)** Να υπολογίσετε το Ι=

1. Δίνεται η f: (0, +∞)→ℝ παραγωγίσιμη με f(x)>0, f(1)=e και lnf(x)+x=0 (1). **α)** Δείξτε ότι f(x)=e1/x, x>0 **β)** Για κάθε x≥1 να δείξετε ότι –e(x-2)≤f(x)≤e-f(x) **γ)** Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης f(x)=συνx +, στο (0, +∞)
2. Δίνεται συνάρτηση f: (0, +∞)→ℝ παρ/μη με f(1)=α>0, ώστε: (xf΄(x)+1)(f(x)+lnx)=α2x2  (1) **α)** Να δείξετε ότι:(f(x)+lnx)2= α2x2 και f(x)=αx-lnx **β)** Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα **γ)** Αν f(x)≥1 να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του α **δ)** Για την ελάχιστη τιμή του α, να δείξετε ότι: <<1.
3. Δίνεται η f συνεχής στο [1, 3], τέτοια ώστε: >0 και <0. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα χ0∈(1,3), τέτοιο ώστε f(x0)=0.
4. Αν η συνάρτηση f είναι κοίλη στο [0, 2] με f΄(1)=f(1)=1, να δείξετε ότι ≤2.
5. Δίνεται η f παραγωγίσιμη στο ℝ, τέτοια ώστε f(x)-e-f(x)=x-1 (1), για κάθε x∈ℝ. **α)** Να εκφράσετε την f΄ ως συνάρτηση της f και να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f, βρίσκεται πάνω από την ευθεία ψ=χ-1  **β)** Να βρείτε το f(0), την μονοτονία της f και της f΄. **γ)** Να δείξετε ότι <f(x)<x∙f΄(χ), για κάθε x>0.
6. Δίνεται η συνάρτηση f, ώστε για κάθε x∈ℝ να ισχύει f3(x)+f(x)=5x-5 (1). Να δείξετε ότι: **α)** Η συνάρτηση f είναι «1-1» και να βρείτε την αντίστροφή της **β)** Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R **γ)** Η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα στο R **δ)** Η Cf διέρχεται από τα σημεία Α(1, 0) και Β(3, 2) και να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την Cf τον άξονα ψ΄ψ και τις ευθείες ψ=0 και ψ=2 και το 
7. Δίνεται η f παραγωγίσιμη στο [1, 5] για την οποία ισχύει: f΄(x)(x2-6x+5)≠f(x)(2x-6) (1), για κάθε x∈[1, 5]. Να δείξετε ότι: **α)** f(1)∙f(5)≠0 **β)** Η Cf τέμνει τον άξονα χ΄χ σε ένα τουλάχιστον σημείο στο (1, 5) **γ)** Αν για κάθε x∈(1, 5) ισχύει: f΄(x)(x2-6x+5)>f(x)(2x-6), τότε να δείξετε ότι: **(1)** η g(x)=είναι γνήσια αύξουσα στο (1, 5) **(2)** ισχύει f(2)>>f(4).
8. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο R, παραγωγίσιμη στο R\* για την οποία ισχύουν: χ∙(f΄(x)-f(x))=f(x) (1), για κάθε x∈R\* και f(1)=e, f(-1)=e-1. Να βρεθούν: **α)** Η συνάρτηση f **β)** Το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της Cf, του άξονα χ΄χ και των ευθειών χ=-1, χ=1 **γ)** Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης f(χ)=α (2), α∈R.
9. Έστω συνεχής συνάρτηση f: ℝ→ℝ με την ιδιότητα f2(x)-2f(x)∙ημχ=ημ4χ+ημ2χ+1, (1) για κάθε x∈R και f(π/2)=3. **α)** Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο το οποίο και να βρείτε **β)** Να βρείτε το f(0) **γ)** Να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση g(x)=f(x)-ημχ, x∈R διατηρεί σταθερό πρόσημο το οποίο και να βρείτε. **δ)** Να βρείτε τον τύπο της f **ε)** Να υπολογίσετε το 
10. Δίνεται η συνάρτηση f, για την οποία ισχύει f3(x)+2f(x)=x+1 (1), για κάθε χ∈R. **α)** Να δείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα **β)** Να βρείτε την f -1  **γ)** Να δείξετε ότι η f έχει όριο στο χ=2, το οποίο και να βρείτε **δ)** Να δείξετε ότι η εξίσωση f -1(χ)=0, έχει μοναδική λύση στο **ε)** Αν για τους α,β∈R\* ισχύει = (2), να δείξετε ότι << .
11. Έστω η συνάρτηση f(x)=αχ2-2χlnx, α>0. **α)** Να δείξετε ότι η εξίσωση f΄΄(χ)=0, έχει μοναδική ρίζα ρ. **β)** Να βρείτε την εφαπτομένη της f στη θέση ρ **γ)** Να βρείτε το α, ώστε η τεταγμένη του σημείου επαφής να μεγιστοποιείται.
12. Δίνονται οι f, g συνεχείς στο R, για τις οποίες ισχύουν: **(1)** η f είναι γνήσια αύξουσα με f(x)<0, για κάθε χ∈R **(2)**f(x)=-∞, ****f(x)=0 **(3)**g(x)=f2(x)-f(x), για κάθε χ∈R. Να αποδείξετε ότι: **α)** η g είναι γνήσια φθίνουσα **β)** η g έχει σύνολο τιμών το (0, +∞) **γ)** οι Cf, Cg δεν έχουν κοινό σημείο. **δ)** υπάρχει μοναδικό ξ∈R, τέτοιο ώστε: f(ξ)+g(ξ)=ξ.
13. Έστω Ρ(χ) πολυώνυμο με Ρ(χ0)=0 και η f(x)= . Να δείξετε ότι:  **α)** Αν η f είναι συνεχής στο χ0, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο χ0.  **β)** Αν η ψ=αχ+β είναι εφαπτομένη της Cf στο χ0, τότε το χ0 είναι ρίζα της εξίσωσης f(x)-αχ-β=0, με βαθμό πολλαπλότητας, τουλάχιστον δύο.
14. Δίνεται η συνάρτηση f(x)= xlnx-x2, x>0. Να αποδείξετε ότι: **α)** Υπάρχουν ακριβώς δύο σημεία της Cf με τετμημένες στο (0, 2), στα οποία οι εφαπτόμενες είναι κάθετες στην (ε1): ψ=χ **β)** Υπάρχει μοναδικό σημείο της Cf με τετμημένη ξ∈(1, e), στο οποίο η εφαπτομένη της Cf είναι παράλληλη στην (ε2): ψ= -2χ

**

1. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f:(0, +∞)→R με f(1)=1+e-1, η οποία για κάθε χ∈(0, +∞) ικανοποιεί τη σχέση ex+f(x)[1+xf΄(χ)]+=0 (1). **α)** Να αποδείξετε ότι f(x)=e-x-lnx+1,για κάθε χ∈(0, +∞) **β)** Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται **γ)** Να βρείτε το σύνολο τιμών της f **δ)** Να λύσετε την εξίσωση ln=- (2), χ∈(0, +∞)
2. **A.**Να βρεθούν οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g ώστε f(x)=ln(g(x)+x), f΄(x)= , g(x)>0, g(x)+x>0, για κάθε χ∈R και g(0)=1. **B.**Αν f(x)=ln(+x) και g(x)=, να λυθεί η (Α): f(x2+2)+f(2x)>f(x2)+f(2x+2), στο (0, +∞). **Γ.** Να δειχθεί ότι για κάθε χ>0 υπάρχει ξ>0 ώστε g(ξ)∙ln(+x)=x. **Δ.** Να βρεθεί το h(x), όπου h(x)= **Ε. α)** Να βρεθεί το   **β)** Να βρεθεί συνάρτηση φ συνεχής στο R, τέτοια ώστε: φ(χ)=2x+2
3. **Α.** Να λύσετε την εξίσωση: lnx+x2=1 **Β.** Δίνονται οι συναρτήσεις f, g:(0, π)→R, με f(x)= και g παραγωγίσιμη με g(x)>0 και lng(x)+g2(x)=x(lnx+1)+ (1), για κάθε χ∈(0, π). **α)** Να βρείτε το σύνολο τιμών της f **β)** Να δείξετε ότι η g έχει ελάχιστο , το 1 **γ)** Έστω h(x)=1-g(x)-f(x). **(1)** Να δείξετε ότι h(x)<0 **(2)** Aν 0<χ1<χ2<χ3<π και h(χ1)-h(χ2)+h(χ3)=0, να δείξετε ότι υπάρχει χ0∈(0, π), ώστε να ισχύει h΄(χ0)=0.
4. Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει x3+f3(x)=1 (1), για κάθε x∈R. **α)** Να βρεθεί η f **β)** Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται το Θεώρημα Μέσης τιμής για την f στο [-2, ]. **γ)** Να εξετάσετε αν υπάρχει ξ∈(-2, ), τέτοιο ώστε =f΄(ξ) **δ)** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της Cf.

1. **Α.** Δίνεται η παραγωγίσιμη στο [0, +∞) συνάρτηση φ, τέτοια ώστε 2φ(χ)=χφ΄(χ), χ>0. **α)** Να δείξετε ότι υπάρχει c, ώστε: φ(χ)=cχ2, για κάθε x∈[0, +∞) **β)** Αν επιπλέον η Cφ διέρχεται από το σημείο Ρ(1, 1), να βρεθεί σημείο της Cφ που να απέχει από το Μ(0, 1) ελάχιστη απόσταση. **Β.** Να βρεθεί συνεχής συνάρτηση f, ορισμένη στο [0, +∞), για την οποία ισχύουν: **α)** f(χ)>0, για κάθε x>0 **β)** Αν Κ(t, f(t)) είναι ένα οποιοδήποτε σημείο της γραφικής παράστσης της f, τότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την Cf και τις ευθείες χ=0, χ=t, ψ=0 να είναι ίσο με το 1/3 του εμβαδού του παραλληλογράμμου με κορυφές τα σημεία: Ο(0, 0), Α(t, 0), M(t, f(t)), B(0 f(t)).
2. Δίνεται συνάρτηση f, με τύπο f(x)= , με f συνεχή στο R. **α)** Να δείξετε ότι κ=0 **β)** Να δείξετε ότι η f είναι παρ/μη και γνήσια αύξουσα στο R. **γ)** Να βρείτε την f-1 και την εξίσωση της εφαπτομένης της Cf στο χ0=1. **δ)** Να δείξετε ότι για κάθε χ≥1 ισχύει: f(x)+1≤x+ln2. **ε)** Οι γραφικές παραστάσεις των Cf και Cf-1, έχουν δυο ακριβώς κοινά σημεία.
3. Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο R με f(1)=1, g(1)=0 και ικανοποιούν τις σχέσεις: f΄(χ)-f(x)=exg΄(x)-1 (1), 2f(x)+x2-2x≥1 (2), για κάθε x∈R. **α)** Να δείξετε ότι f(x)=exg(χ)+1 **β)** Να υπολογίσετε το g΄(1) και να δείξετε ότι =0 **γ)** Αν επιπλέον ισχύει g(x)=(x-1)2, για κάθε x∈R, τότε: **1.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της f **2.** Να δείξετε ότι για κάθε λ∈R, από το σημείο Μ(1, λ) άγονται το πολύ 3 εφαπτομένες της Ch, όπου h(x)=ex(1-x)+1.
4. Οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και παραγωγίσιμες στο R, με f΄(χ)-g΄(χ)=1, f΄(χ)≠1, για κάθε χ∈R. Αν στο όριο L= εφαρμόσουμε τον κανόνα του ορίου του πηλίκου, παρουσιάζεται απροσδιοριστία της μορφής 0/0. **α)** Να βρείτε το L και τις ασύμπτωτες των f και g στο +∞ **β)** Να δείξετε ότι η g έχει το πολύ μια ρίζα το R. **γ)** Να δείξετε ότι ισχύει f(x)-g(x)=x+4, για κάθε χ∈R.

1. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο R, τέτοια ώστε f(ημχ)+f(συνχ)=1 (1), για κάθε χ∈R. **α)** Να δείξετε ότι: **1.** f= , f(0)+f(1)=1 **2.** Υπάρχχει χ0∈[0, 1], ώστε να ισχύει f(χ0)+χ0=1. **β)** Επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει f(x)≥x- , για κάθε χ∈R. **1.** Να βρείτε την f΄ και την εφαπτομένη της Cf στο χ0= **2.** Να υπολογίσετε το 
2. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f:(0, +∞)⟶R, για την οποία ισχύουν xf΄(χ)= (1) για κάθε χ>0, f(1)=0. **α)** Να δείξετε ότι η g(x)=ex+x είναι «1-1» **β)** Να δείξετε ότι f(x)=lnx, για κάθε χ>0 **γ)** Να μελετηθεί η h(x)= ως προς την μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της **δ)** Να λυθεί η εξίσωση = (2), χ∈(0, π/2) **ε)** Να εξετάσετε την h ως προς την κυρτότητα και να δείξετε ότι για κάθε χ2>χ1>0 ισχύει: ≥ -1/2e5.
3. Δίνεται η f(x)=χ+2+2lnx, x>0. **α)** Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και την καμπυλότητα **β)** Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f και το πλήθος των ριζών της f(x)=0 **γ)** Aν g(x)= , να δείξετε ότι υπάρχει ξ>0, τέτοιο ώστε g(x)≥g(ξ), για κάθε χ>0 **δ)** Να δείξετε ότι για κάθε χ>2, ισχύει f(x-2)<2f(x+1)-f(x+4).
4. **Α.** Δίνεται η συνάρτηση = , με χ≥0. Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το g(x). **Β.** Δίνεται η συνάρτηση = , με χ∈R. Να μελετήσετε την μονοτονία της f με τη βοήθεια της g και να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της Cf όταν χ→+∞, χ→-∞. **Γ.α)** Να υπολογίσετε το και να δείξετε ότι το σημείο Κ(0, 1) είναι κέντρο συμμετρίας της Cf  **β)** Να λύσετε την εξίσωση f(x)=0 **γ)** Να βρείτε την εφαπτομένη της Cf στο Κ(0, 1) **Δ.** Δίνεται η συνάρτηση F(x)=4ln(ex+1)-x, ορισμένη στο R. **α)** Να δείξετε ότι η F είναι μια παράγουσα της f **β)** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την Cf, τον χ΄χ και τις ευθείες χ=0, χ=3.

1. Δίνεται η συνάρτηση f(x)=ln(1+ex)-x. **Α.** Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της **Β.** Να δείξετε ότι ο χ΄χ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f΄΄ στο -∞ και στο +∞ **Γ.** Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις της f και της ψ=χ, τέμνονται σε ένα ακριβώς σημείο στο (0, 1) **Δ.** Να αποδείξετε ότι f΄΄(ex)<f΄΄(x2+1), για κάθε χ>0 **Ε.** Αν α,β,γ∈ℝ με α<β<γ ώστε 2β=α+γ, να δείξετε ότι **1.**f(α)+f(γ)>2f(β)και **2.** (1+eα)(1+eγ)>(1+eβ)2

1. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [0, +∞), με σύνολο τιμών το [0, +∞) για την οποία ισχύει +f(x)= (1), για κάθε χ≥0. **α)** Να αποδείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα και ότι f(0)=0 **β)** Να αποδείξετε ότι f(x)≤x, για κάθε χ≥0. **γ)** Να αποδείξετε ότι ≥- **δ)** Να αποδείξετε ότι η αντίστροφη της f έχει τύπο (x)=ln(x+) **ε)** Να μελετήσετε την μονοτονία της **στ)** Να υπολογίσετε το .
2. Έστω μια συνάρτηση f με συνεχή f΄, για την οποία ισχύουν: 0≤f(x)+4≤(x-1)f΄(χ) (1), για κάθε χ∈ℝ και η f΄είναι γνήσια αύξουσα. **α)** Να βρείτε την εφαπτομένη της Cf στο σημείο Μ(1, f(1)) **β)** Αν Ε είναι το εμβαδόν μεταξύ της Cf, της παραπάνω εφαπτομένης και της χ=3, να αποδείξετε ότι Ε<f(3)+4 **γ)** Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια και τη μονοτονία την g(x)= **δ)** Αν α>0, να αποδείξετε ότι **1.**= **2.**<
3. Έστω ότι χf΄(χ)-f(x)=(x-1)ex+1 (1), για κάθε χ∈ℝ και f΄(0)=2. **α)** Να αποδείξετε ότι f(x)= ex+x-1 **β)** Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της Αν επιπλέον η f-1 είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της: **γ)** Να βρείτε το εμβαδόν μεταξύ της Cf-1, του χ΄χ και της χ=e **δ)** Να βρείτε την εφαπτομένη της Cf-1 στο χ0=e

1. Δίνεται η συνάρτηση f με f(x)=x3-x2+x, για κάθε χ∈R. **α)** Να δείξετε ότι η f είναι «1-1» και το Α(1,1) είναι κοινό σημείο των Cf, Cf-1 **β)** Να βρείτε την εφαπτομένη της Cf στο Α(1,1) και να δείξετε ότι έχει και άλλο κοινό σημείο με την Cf **γ)** Να βρείτε την εφαπτομένη της Cf-1 στο Α(1,1) **δ)** Να βρείτε το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της Cf-1 και την εφαπτομένη της Cf-1 στο Α(1,1).
2. Δίνονται οι συναρτήσεις f(x)=ln(x+1), g(x)=, x>-1 **α)** Να λυθεί η f(x)+g(x)=0 και να βρεθεί το πρόσημο της Φ(χ)= f(x)+g(x) **β)** Να δείξετε ότι οι Cf, Cg δέχονται στο Ο(0, 0) κοινή εφαπτομένη την ψ=χ **γ)** Να βρεθεί το εμβαδόν μεταξύ της Cf, της ψ=χ και της χ=3 **δ)** Ένα σημείο Μ με θετική τετμημένη κινείται στην Cf και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/sec. Αν Ν η προβολή του Μ στον χ΄χ και Α(0, α) σημείο του άξονα ψ΄ψ, α>0: **1.** Να δείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΑΜΝ, είναι Φ(χ(t)) **2.** Να βρείτε την τετμημένη του σημείου Μ, όταν ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του ΑΜΝ, είναι cm2/sec.
3. Δίνεται η συνάρτηση f με f(x)= , x≤0. **α)** Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της **β)** Ένα σημείο Α(α, ), α<0 κινείται στην Cf, με ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του α΄(t)=-α(t). Επίσης σημείο Μ(χ, ψ), χ>0 κινείται στην ψ=χ **1.** Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της =, τη χρονική στιγμή t0 που είναι (ΟΑ)= **2.** Να βρείτε το εμβαδόν μεταξύ της ψ= , x≤0, της ψ=χ, χ≥0 και της ψ=α΄(t0) **3.** Να βρείτε ευθεία παράλληλη στον ψ΄ψ που να χωρίζει το παραπάνω εμβαδόν σε δύο ισεμβαδικά χωρία.
4. Δίνεται η συνάρτηση f:ℛ⟶ℛμε f(ℛ)=ℛ , η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

e2f(x)+ef(x)+1+f(x)-2e2 =x , για κάθε x∈ℛ. **α)** Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο ℛ.

**β)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε τη συνάρτηση .

**γ)** Nα αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ∈(0, 1) τέτοιο, ώστε eξ+e=(2e2-ξ)e-ξ.

**δ)** Nα αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο χ0=1.

**ε)** Να λύσετε την ανίσωση f(x)≤x και να αποδείξετε ότι f(x)-1≥0, για κάθε x≥1.

1. Έστω η συνάρτηση f(x)=exlnx-x , χ>0

**α)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

**β)** Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης xxe-x=κ (1), χ>0, για τις διάφορες τιμές του κ>0.

**γ)** Να αποδείξετε ότι =.

**δ)** Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ξ1, ξ2∈(e-1, e) τέτοια, ώστε να ισχύει: f(ξ1)lnξ1+ef(ξ2)lnξ2=.

1. Έστω f:ℛ⟶ℛμια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο ℛ, με f΄(χ)≠0, για κάθε x∈ℛ, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

 • f΄΄(χ)e-x-(f΄(χ))2=0 (1), για κάθε x∈ℛ,

 • 2f΄(0)+1=0 και

 • f(0)=ln2

**α)** Να αποδείξετε ότι ισχύει f΄(χ)+1=, x∈ℛ.

**β)** Να αποδείξετε ότι: f(x)=ln(1+ex)-x, x∈ℛ.

**γ)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

**δ)** Να αποδείξετε ότι ισχύει: 2f(x)+x≥ln4, για κάθε x∈ℛ.

**ε)** Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

**στ)** Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της f και να υπολογίσετε τα όρια:

1. (x) **ii) **(x)
2. Δίνεται η συνάρτηση f(x)=|lnx| , x>0.

**α)** Να κάνετε τη γραφική παράσταση Cf της συνάρτησης f και να βρείτε την παράγωγό της.

**β)** Να βρείτε:

**i)** Τα κοινά σημεία της Cf με την ευθεία ψ=α, α>0.

**ii)** Τις εξισώσεις των εφαπτόμενων εΑ και εΒ της Cf στα σημεία της Α(eα, α) και Β(e-α, α)

 αντιστοίχως και να αποδείξετε ότι είναι κάθετες μεταξύ τους για κάθε α>0.

**γ)** Έστω Μ και Ν τα σημεία τομής της εΒ με τους άξονες χ΄χ, ψ΄ψ. Να δείξετε ότι, όταν το εμβαδόν του τριγώνου ΟΜΝ γίνεται μέγιστο, τότε η εΑ διέρχεται από το Ο(0,0)

1. Έστω μια συνεχής συνάρτηση f:ℛ⟶ℛ, της οποίας η γραφική παράσταση Cf διέρχεται από το σημείο Α(0,1).

**α)** Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο χ0=0 , τότε:

**i)** Να υπολογίσετε το

**ii)** Να αποδείξετε ότι =4032f΄(0).

**β)** Αν επιπλέον για την f ισχύει f2(x)-8f(x)=x2-7 (1), για κάθε x∈ℛ, να βρείτε τον τύπο της.

**γ)** Αν f(x)=4- ,x∈ℛ, τότε:

**i)** Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης Cf της συνάρτησης f στο -∞.

**ii)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

**iii)** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της Cf, η οποία διέρχεται από το σημείο Β(-1, 3).

**iv)** Να αποδείξετε ότι <.

1. **Α.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση xlnx-1=0, με x>1 έχει ακριβώς μία λύση.

**Β.** Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f:(1, +∞)⟶ℛ , η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

 • f(x)=xlnx(f(x)-f΄(χ)) (1), για κάθε χ>1 και

 • f(e)=ee

**α)** Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

**β)** Αν f(x)= , 

 **i)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να υπολογίσετε τα όρια:

f(x) και f(x)

**ii)** Αν Ε(α) είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση Cg της

 συνάρτησης g(x)=f(x)+xlnx∙f΄(χ) , τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = 2 και χ=α με α>2, να υπολογίσετε το .

1. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f:ℛ⟶ℛ, της οποίας η γραφική παράσταση Cf, διέρχεται από το σημείο M(1, 2e). Αν η εφαπτομένη της Cf, σε κάθε σημείο της (x0, f(x0)) διέρχεται από το σημείο A(x0+1, 2)

**α)** Να αποδείξετε ότι f(x)=ex+e2-x

**β)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

**γ)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση + =2016, α, β∈ℛ, έχει μία τουλάχιστον λύση στο

 διάστημα (α, β).

**δ)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση Cf της

 συνάρτησης f και την ευθεία ψ=e2+1

**ε)** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει άξονα συμμετρίας την χ=1.

1. Δίνονται οι συναρτήσεις f , g :(0, +∞)⟶ℛ με f(x)=(1-x)lnx+ και g(x)=.

**α)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**β)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει δύο μόνο ρίζες ρ1∈(0, 1) και ρ2∈(1, +∞),

**γ)** Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ξ1, ξ2∈(ρ1, ρ2) τέτοια ώστε f΄(ξ1)+ f΄(ξ2)=ln(ρ1ρ2)

**δ)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g έχει ένα τοπικό ελάχιστο και ένα τοπικό μέγιστο.

1. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f :ℛ⟶ℛ, με f(0)=1, η οποία ικανοποιεί τη σχέση: f΄(χ)=4f(x)+32x2-16x (1), x∈ℛ

**α)** Να αποδείξετε ότι f(x)=-8x2, x∈ℛ .

**β)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

**γ)** Να αποδείξετε ότι 4f(2x)<3f(x)+f(5x) , για κάθε x>0.

**δ)** Να αποδείξετε ότι (e2-2)ln2<<(e4-8)ln2.

**ε)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση 2x-(x-1)( 3f(x)+f(5x)-4f(2x))=(-2)ln4 έχει μια

 τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα .

1. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f :ℛ⟶ℛ, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

 •= -

 • 4f2(x)-4xf(x)=αχ+β (1), για κάθε χ∈ℛ, όπου β>.

**α)** Να αποδείξετε ότι α=1.

**β)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

**γ)** Αν επιπλέον ισχύει f(1)<0 να αποδείξετε ότι:

**i)** f(x)=

**ii)** Η εξίσωση 10χf(x)=3ημ(πχ)-3χ+4 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (1, +∞).

1. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f :ℛ⟶ℛ, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

 • f(-1)=-

 • xf΄(χ)=f(x)+x2(2e2x-1) (1), για κάθε χ∈ℛ.

**α)** Να αποδείξετε ότι f(x)=xe2x-x2-x, για κάθε χ∈ℛ.

**β)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**γ)** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ένα μόνο σημείο καμπής.

**δ)** Ένα σημείο M(x, ψ) κινείται στο επίπεδο χωρίο Ω και για τις συντεταγμένες του ισχύουν :

 0≤χ≤1 και -χ2-3χ≤ψ≤f(x). Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που διαγράφει το σημείο Μ.

1. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f :ℛ⟶ℛ, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

 • f(0)=0

 • |f΄(χ)|≤1 για κάθε χ∈ℛ.

**α)** Να αποδείξετε ότι -2≤f(2)≤2.

**β)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=x2(1) έχει το πολύ μια ρίζα στο διάστημα .

**γ)** Αν f(x)=ln(x2+1), χ∈ℛ.

**i)** Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την παραβολή ψ=χ2 .

**ii)** Να υπολογίσετε το όριο .

**iii)** Αν g :ℛ⟶ℛ είναι μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο ℛ της οποίας η γραφική

 παράσταση εφάπτεται στον άξονα x΄x στο σημείο Μ(1, 0) και για κάθε χ∈ℛ ικανοποιεί τη

 σχέση g΄΄(χ)= , να αποδείξετε ότι = f(1).

1. Δίνεται μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f :ℛ⟶ℛ, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

f3(x)+f(x)=x+1 (1), για κάθε χ∈ℛ.

**α)** Να βρείτε την τιμή της συνάρτησης f για x=-1 και x=1.

**β)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το πρόσημό της.

**γ)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

**δ)** Αν α > 1 , να αποδείξετε ότι f(α)+f<1+ (2)

**ε)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση +=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (-2, 0).

**στ)** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της

 συνάρτησης f , τον άξονα x΄x και την ευθεία x=1 είναι E(Ω)=

1. Δίνονται οι συναρτήσεις f , g: (0, +∞)⟶ℛ με f(x)=και g(x)=1+x(1-lnx).

**α)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

**β)** Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης Cg της συνάρτησης g

 που να είναι παράλληλες. Στη συνέχεια να βρείτε σημεία της Cg με τετμημένες αντίστροφες

 στα οποία οι εφαπτόμενες είναι μεταξύ τους κάθετες.

 **γ)** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ρ>1 τέτοιο, ώστε η συνάρτηση f να λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της

 ότανχ=ρ και επιπλέον ισχύει f(ρ)=.

**δ)** Θεωρούμε επίσης την εξίσωση f(x)= . Να αποδείξετε ότι:

**i)** Η εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες α ,β με 0<α<β.

**ii)** Υπάρχει ξ∈(α, β) τέτοιο, ώστε f(ξ)+f΄(ξ)=.

1. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f :ℛ\*⟶ℛ με f΄(1)=1 και f΄(-1)=-1 , η οποία ικανοποιεί τη σχέση: χ2(χf΄(χ)-4)=1-2χ2f(x) (1) για κάθε χ∈ℛ\*.

**α)** Να αποδείξετε ότι f(x)= +2 για κάθε χ∈ℛ\*.

**β)** Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

**γ)** Αν E(α) είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση Cf της

συνάρτησης f , την οριζόντια ασύμπτωτη της Cf και την ευθεία χ=α με α>1, τότε να βρείτε

το Ε(α).

**δ)** Να υπολογίσετε το .

1. Δίνεται η συνάρτηση f : (0, +∞)⟶ℛ με f(x)=x-1+lnx.

**α)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

**β)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να λύσετε την ανίσωση ≥x (1).

**γ)** Θεωρώντας γνωστό ότι η συνάρτηση είναι συνεχής, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη , την ευθεία με εξίσωση ψ=χ, τον άξονα y΄y και την χ=e.

1. Δίνονται οι συναρτήσεις f(x)=2, x≥0 και g(x)= – lnx, x>0.

**α)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και (x)=2 , x∈(0, 2].

**β)** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα I=.

**γ)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**δ)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση +ln=0έχει μοναδική λύση στο διάστημα (0, 2).

1. Δίνεται η συνάρτηση fα: ℛ⟶ℛ με fα(χ)= , α>0

**α)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση fα ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

**β)** Να αποδείξετε ότι για κάθε α>0 η γραφική παράσταση Cα της συνάρτησης fα έχει ένα μόνο

 σημείο καμπής, στο οποίο η εφαπτομένη της Cα έχει σταθερό συντελεστή διεύθυνσης.

**γ)** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Εα(λ), λ>0 , του χωρίου που περικλείεται από την Cfα, την

 ευθεία ψ=3και τις ευθείες χ=λ και χ=-λ είναι Εα(λ)=3ln

**δ) i)** Να αποδείξετε ότι η καμπύλη C4 βρίσκεται πάνω από την καμπύλη C1.

**ii)** Αν ζ(λ) είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C1, C4 και τις ευθείες χ=λ

 και χ=-λ, να βρείτε το .

1. **Α.** Οι f,g είναι παραγωγίσιμες στο ℜ με exf΄(χ)=g΄(χ)-g(x) (1), για κάθε χ∈ℜ, f(0)=g(0)=0 **α)** Να δείξετε ότι f(x)=g(x)/ex, για κάθε χ∈ℜ **β)** Αν η f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο +∞ την ψ=χ-2, να δείξετε ότι =-1/2 **Β.** Αν η f με f(x)=αχ+ έχει ασύμπτωτη στο +∞ ευθεία παράλληλη στην ψ=2χ-11 και στο -∞ οριζόντια ασύμπτωτη την ψ=-1, να βρεθούν τα α,β,γ∈ℜ
2. **Α.** Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με f΄΄ συνεχή στο [0, +∞) **α)** Αν f(3)=6 και f(5)=10, να δείξετε ότι υπάρχει χ0∈(3, 5), ώστε η εφαπτομένη της Cf στο σημείο (χ0, f(χ0)), να διέρχεται από την αρχή των αξόνων **β)** Να δείξετε ότι =f(0) **Β.** Η f είναι συνεχής στο [0, +∞), παραγωγίσιμη στο (0, +∞), με f΄(χ)>1, για κάθε χ>0 **α)**Να δείξετε ότι f(x)≥x+f(0), για κάθε χ≥0 **β)** Αν f(0)<0, να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό ξ>0, τέτοιο ώστε f(ξ)=0 **Γ.** Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο [α, β] με g(α)+g(β)=2g. Να δείξετε ότι υπάρχει ξ∈(α, β), έτσι ώστε g΄΄(ξ)=0.
3. **Α.** Δίνονται οι f,g με τύπους f(x)=, g(x)=xex-(1+ex)ln(1+ex). Να δείξετε ότι: **α)** η g είναι γνήσια φθίνουσα στο ℜ **β)** g(x)<0, για κάθε χ>0 **γ)** η f είναι γνήσια φθίνουσα στο (0, +∞) **Β.** Έστω f(x)=, χ∈ℜ. **α)** Να βρεθεί η f΄(χ) **β)** Να δείξετε ότι f(x)=x+ημχ **γ)** Να δείξετε ότι υπάρχει η f-1:[0, π]⟶ [0, π] **δ)** Να δείξετε ότι το εμβαδόν που περικλείεται από τις Cf, , x=0, x=π ισούται με 4 μον.
4. **A.** Δίνεται η f(x)=eλχ, λ>0 **α)** Να δείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα στο ℜ **β)** Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της Cf που περνάει από το Ο(0,0) είναι η ψ=λex. Στη συνέχεια να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής Μ **γ)** Να δείξετε ότι το εμβαδόν Ε(λ) που περικλείεται από την Cf, την εφαπτομένη και τον ψ΄ψ ισούται με Ε(λ)= **δ)** Να βρείτε το **Β.** Δίνεται η f(x)=χ3 και το σημείο της Μ(α, α3), α>0 που απομακρύνεται από τον ψ΄ψ με σταθερή ταχύτητα 3m/sec. **α)** Να βρείτε την εφαπτομένη της Cf στο Μ και να δείξετε ότι έχει και άλλο κοινό σημείο Ν με την Cf  **β)** Να εκφράσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΜΒΝ με διαγώνιο την ΜΝ και πλευρές παράλληλες στους άξονες, σαν συνάρτηση του α **γ)** Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου ΑΜΒΝ τη χρονική στιγμή t0 κατά την οποία το Μ απέχει από τον ψ΄ψ απόσταση 2 m.

**

1. **Α.** Δίνεται η f με f΄ συνεχή στο [0, 1] και +6= 24 (1). Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του f(1). Για αυτή την τιμή να βρείτε την f **B.** Η f είναι παραγωγίσιμη στο ℜ με 2f΄(χ)=ex-f(x) (2), για κάθε χ∈ℜ, f(0)=0. **α)** Να δείξετε ότι f(x)=ln **β)** Να βρείτε το **γ)** Δίνονται οι h(x)=, g(x)=. Να δείξετε ότι h(x)=g(x), για κάθε χ∈ℜ. **δ)** Να δείξετε ότι η = (3), έχει μοναδική λύση στο (0, 1).
2. **Α.** Να δείξετε ότι για χ0≠0, ισχύει: =λ ⇔=λ **Β.** Δίνεται συνάρτηση f:(0, +∞)⟶ℛ, με f(xψ)=f(x)+f(ψ) (1), για κάθε χ,ψ∈ℜ. Να δείξετε ότι: **α)** Αν η f είναι συνεχής στο χ0=1, τότε η f είναι συνεχής στο (0, +∞) **β)** Αν η f είναι συνεχής στο χ0=α∈(0,1)∪(1, +∞), τότε η f είναι συνεχής στο (0, +∞) **γ)** Αν η f είναι συνεχής στο χ0=1 και =1, να δείξετε ότι = , όπου α∈(0,1)∪(1, +∞).
3. Δίνονται οι συναρτήσεις f(x)=ex, g(x)=-x2-x, x∈R. **α)** Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της Cf στο Α(0,1), εφάπτεται της Cg  **β)** Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό α∈(-1, 0), έτσι ώστε eα+2α+1=0 **γ)** Αν h(x)=f(x)-g(x), να δείξετε ότι: **1.**h(x)≥α2-α-1, για κάθε x∈R, α∈(-1, 0). **2.** Η h(x)=2012, έχει δύο ακριβώς λύσεις.
4. Δίνονται η f συνεχής και η g γνήσια αύξουσα στο R, με lnf(x)=g(x), για κάθε x∈R. **α)** Να δείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα στο R **β)** Να δείξετε ότι: **1.**  =0 **2.**  =+∞ **γ)** Αν  =2g(1), f(1)≠1, να δείξετε ότι g(1)=ln2 **δ)** Αν f(1)=2, g(x)=+∞, να δείξετε ότι υπάρχει ξ∈(1, +∞), έτσι ώστε f(ξ)=2012
5. Δίνεται συνάρτηση f, με f΄΄(χ)≠0, για κάθε χ∈R, f(0)=f(1). Να δείξετε ότι: **α)** η f΄ αντιστρέφεται **β)** η Cf δέχεται μία μόνο οριζόντια εφαπτομένη **γ)** η f(x)=0 έχει το πολύ δύο ρίζες **δ)** υπάρχει ξ∈(0, 1): f΄(ξ)+(2ξ-1)f(ξ)=0 **ε)** υπάρχει ξ1∈[0, 1]: f(ξ1)=
6. Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με f΄(χ)f(x)-e-x(f(x)-f΄(χ))-e-2x=0, f(0)=2 **α)** Να δείξετε ότι f(x)=3-e-x  **β)** Να εξετάσετε αν υπάρχει διάστημα της μορφής [α, β] που να ισχύει το θ. Rolle **γ)** Να δείξετε ότι e-β(β-α)≤e-α-e-β≤e-α(β-α), για κάθε α,β∈R **δ)** Να δείξετε ότι = **ε)** Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό ξ∈R: f(f(ξ))=
7. Δίνονται οι συναρτήσεις f(x)=1/x και g(x)=x2  **α)** Να βρεθεί η εφαπτομένη της Cf που διέρχεται από το σημείο Α(8, -1) **β)** Να βρεθεί η εφαπτομένη της Cgπου είναι παράλληλη στην ψ=-χ+9 **γ)** Να βρεθεί η κοινή εφαπτομένη των Cf, Cg  **δ)** Κινητό ξεκινά από το Ο(0,0) και κινείται κατά μήκος της Cg με χ>0. Σε ποιο σημείο ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι διπλάσιος από τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του;
8. Δίνεται συνεχής στο R συνάρτηση f, με f(x)=f(x+4), =- **α)** Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 2 **β)** Να βρεθεί η εφαπτομένη της Cf στο χ0=6 **γ)** Να βρεθεί το λ∈R, ώστε η εφαπτομένη της Cf στο χ0=2, να εφάπτεται της Cg με g(x)=x2+2x+2λ **δ)** Έστω Α,Β τα σημεία τομής της εφαπτομένης της Cf στο χ0=2, με τους άξονες. Δοκάρι με μήκος ίσο με το (ΑΒ) ολισθαίνει στους άξονες. Αν το κάτω άκρο του δοκαριού ολισθαίνει στον χ΄χ με ρυθμό 1m/sec, τη χρονική στιγμή t0 που το άνω άκρο απέχει από το Ο(0,0) 3m, να βρείτε: **1.** το ρυθμό μεταβολής της οξείας γωνίας θ του δοκαριού με τον χ΄χ **2.** Την ταχύτητα με την οποία πέφτει το άνω άκρο
9. Δίνονται οι f,g ορισμένες στο R, με f3(x)+f(x)=x, για κάθε x∈R, g(x)=ex+x+1, f(A)=R **α)**Να δείξετε ότι οι f,g αντιστρέφονται **β)** Να βρείτε το (f-1)΄(0) **γ)** Αν η g-1παραγωγίζεται, να βρείτε το (g-1)΄(2) **δ)**Να δείξετε ότι f΄(0)=1
10. Δίνεται η f(x)=αlnx+βx2-2, x>0, α,β∈R, με σημείο καμπής το Α(1,-1) **α)** Να δείξετε ότι α=2, β=1 **β)** Να λυθεί η εξίσωση ln +(x2-1)2=0 (1) **γ)** Να βρείτε το πλήθος των ριζών της f(x)=κ, κ∈R **δ)** Να δείξετε ότι 2lnx+x2≥2 x-e2+2, x≥1
11. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, με f΄(χ)(2f΄(χ)-f(x))=f(x)(f΄(χ)-2f΄΄(χ)) (1), f(0)=2f΄(0)=1, f(g(x))+g(x)=x, για κάθε x∈R,όπου η g έχει σύνολο τιμών το R **α)**Να δείξετε ότι f(x)=ex/2 **β)**Να δείξετε ότι η g είναι γνήσια αύξουσα **γ)**Να δείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να βρείτε την g-1 **δ)** Αν ορίζεται στο R η gog, να λυθεί η εξίσωση +g(g(x))-g(x2)>0 (2) **ε)**Να βρεθεί η εφαπτομένη της Cg στο χ0=1 **στ)** Αν η g είναι παραγωγίσιμη στο R, να δείξετε ότι 3g(x)+2-2x≤0
12. Η f είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞) με χf΄(χ)-χf(χ)=ex, x>0 (1), f(1)=e **α)** Να δείξετε ότι f(x)=ex(lnx+1), x>0 **β)** Να δείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα στο (0, +∞) **γ)** Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της lnx-κe-x+1=0 (2), για τα διάφορα κ∈R **δ)** Να δείξετε ότι η Cf, έχει μοναδικό σημείο καμπής
13. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο [1, +∞) με f(1)=0, f(2)=ln2, f(3)=ln3 **α)** Να δείξετε ότι υπάρχει ξ∈(1,3): (f΄(ξ))2+f(ξ)f΄΄(ξ)= Έστω ότι f΄΄(χ)<0, για κάθε x>1 και =0. Να δείξετε ότι: **β)**[f(x+1)-f(x)]=0 **γ)** f(x)≥0, για κάθε x≥1
14. **α)** Να δείξετε ότι ln(x2+1)<x, για κάθε x>0. Έστω η f(x)=3(x2+1)[ ln(x2+1)-1]-2x3+3 **β)** Να λύσετε την εξίσωση f(x)=0 **γ)** Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης ln(x2+1)= +1 (1), λ∈R **δ)** Να δείξετε ότι (α2+1)(β2+1)<eα+β, α,β>0.
15. Η f είναι παραγωγίσιμη στο R, με f(0)=0, f(2)=2, f΄(0)<0. Να δείξετε ότι: **α)** υπάρχει ρ1∈(0, 2): f(ρ1)=0 **β)** αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, τότε υπάρχει ξ∈(0, 2): f΄΄(ξ)>0 **γ)** αν η f είναι κυρτή στο (-∞,0], να δείξετε ότι =+∞ **δ)** αν η f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο -∞ την ψ=χ, να δείξετε ότι =1
16. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο [α,β], με f(α)<0<f(β), f=, f΄(χ)≠0, για κάθε x∈[α,β]. Να δείξετε ότι: **α)** η f είναι γνήσια αύξουσα στο [α,β] **β)** υπάρχει ξ∈(α,β): f΄΄(ξ)=0 **γ)** υπάρχει χ0∈(α,β): f(χ0)=f + f
17. Κινητό σημείο Μ κινείται την καμπύλη ψ=, x≥0. Παρατηρητής είναι στο σημείο Π(0,1) ενός συστήματος συντεταγμένων Οχψ. Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ είναι χ΄(t)=16 m/min, t≥0. **α)** Να δείξετε ότι η τετμημένη του σημείου Μ είναι χ(t)=16t, t≥0 **β)** Να δείξετε ότι το σημείο της καμπύλης μέχρι το οποίο έχει οπτική επαφή ο παρατηρητής είναι Α(4,2) και να βρείτε πόσο χρόνο θα διαρκέσει η οπτική επαφή **γ)** Να βρείτε το εμβαδόν που διαγράφει η οπτική ακτίνα **δ)** Να δείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή t0∈(0,), ώστε η απόσταση (ΠΜ) να παίρνει ελάχιστη τιμή.
18. Η f:[0,2]⟶R, είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, με f΄΄(χ)-4f΄(χ)+4f(x)=κxe2x, για κάθε χ∈[0,2], f΄(0)=2f(0), f΄(2)=2f(2)+12e4, f(1)=e2, κ∈R. Να δείξετε ότι: **α)** η g(x)=3x2- , 0≤x≤2, ικανοποιεί το θ. Rolle στο [0,2] **β)** υπάρχει ξ∈(0,2): f΄΄(ξ)+4f(ξ)=6ξe2ξ +4f΄(ξ) **γ)** κ=6 και g(x)=0, για κάθε χ∈[0,2] **δ)**f(x)=x3e2x, χ∈[0,2]
19. Δίνεται η f(x)=ln[(λ+1)χ2+χ+1]-ln(x+2), x>-1, λ≥-1 **α)** Να βρεθεί το λ, ώστε να υπάρχει το στο R. Αν λ=-1, τότε: **β)** να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της **γ)** να βρεθούν οι ασύμπτωτες της C f**δ)** η εξίσωση f(x)+α2=0, έχει μοναδική λύση, για κάθε α≠0
20. Δίνεται η f(x)= , x∈R. **α)** Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία **β)** Να υπολογιστεί το Ι= **γ)** Για κάθε χ<0 να δείξετε ότι f(5x)+f(7x)<f(6x)+f(8x)
21. Δίνεται η f(x)=xln(x+1)-(x+1)lnx, x>0. **α)**Να δείξετε ότι **1.**ln(x+1)- lnx<1/χ, χ>0 **2.**η f είναι γνήσια φθίνουσα για χ>0 **β)** Να υπολογιστεί το **γ)** Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό α∈R, ώστε (α+1)α=αα+1 (1)
22. Η f είναι συνεχής στο R, με =2005. **α)** Να δείξετε ότι f(0)=0, f΄(0)=1 **β)** Να βρεθεί το λ∈R, αν =3 **γ)** Αν επιπλέον η f΄είναι συνεχής στο R και f΄(χ)>f(x), για κάθε x∈R, να δείξετε ότι: **1.**xf(x)≥ 0, για κάθε x∈R **2.**<f(1)
23. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, με ex(f΄(χ)+f΄΄(χ)-1)=f΄(χ)+χf΄΄(χ), για κάθε x∈R,f(0)=f΄(0)=0. **α)**Να δείξετε ότι f(x)=ln(ex-x), x∈R **β)** Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και τα σημεία καμπής **γ)** Να δείξετε ότι η ln(ex-x)=συνχ, έχει μία μόνο λύση στο

1. Δίνεται η f(x)=αχ-ln(x+1), x>-1, α≠1, α>0. **α)** αν f(x)≥1, για κάθε x>-1, να δείξετε ότι α=e. Για α=e: **β)**να δείξετε ότι η f είναι κυρτή και να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία **γ)** αν β,γ>-1, β,γ≠0, να δείξετε ότι η + =0, έχει μια ρίζα στο (1,2)
2. Δίνεται η . **α)** Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0 **β)**Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της **γ)** Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης χ=eα/x, για τις διάφορες τιμές του α∈R **δ)** Να δείξετε ότι f΄(χ+1)>f(x+1)-f(x), x>0

1. Η f είναι συνεχής στο R, με f(x)=(10x3+3x)-45 **α)** Να δείξετε ότι f(x)=20x3+6x-45 **β)** Αν η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, να δείξετε ότι =g΄΄(χ) **γ)** Αν =f(x)+45, g(0)=g΄(0)=1, να δείξετε ότι g(x)=x5+x3+x+1
2. Δίνονται οι συναρτήσεις f(x)= -lnx, x>0 και g(x)=, x>0. **Α) i)** Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα **ii)** Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. Έχει η Cf κατακόρυφη ασύμπτωτη; **Β)** Να βρείτε το σημείο της Cf στο οποίο η εφαπτομένη της διέρχεται από το Α(0,3) και να βρείτε την εφαπτομένη αυτή. **Γ)** Να δείξετε ότι η f2(x)+2xf(x)-3f(x)=0, έχει ακριβώς μια ρίζα στο (1,e). Πόσες ρίζες έχει η προηγούμενη εξίσωση στο (0,+∞); **Δ)** Να δείξετε ότι: **i)** η g έχει ολικό μέγιστο, **ii)** =+∞, όπου ρ η ρίζα της εξίσωσης του (Γ) ερωτήματος **Ε)** Να βρείτε τη σχετική θέση των Cf, Cg **ΣΤ)** Ένα υλικό σημείο Μ(α,f(α)), 0<α, κινείται στην ψ=f(x), x>0. Την χρονική στιγμή t0 που περνάει από το Ν(1,1), ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι 1 μ/s. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη της Cf, στο σημείο Μ με τους άξονες, τη χρονική στιγμή t0.
3. Έστω f συνεχής στο [0,+∞), παραγωγίσιμη στο (0,+∞), με f΄(χ)=, x>0 και f΄(x)=+∞. Να αποδείξετε ότι: **α)** f(0)=0 **β)** f(x)=, x≥0 **γ)** >f΄(χ), χ>0 **δ) 1)** 2019>2f2018(2)-f2018(1) **2)** Η εξίσωση 2019(x-1) =2f2018(x)-(x-1)f2018 έχει ρίζα στο (1,2) **ε)** υπάρχει μοναδικό χ0∈(0,2), ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ να γίνεται μέγιστο στο χ0, όπου Α(x,f(x)), B(2,f(x)) και Γ,Δ οι προβολές των Β,Α στον χ΄χ.
4. Έστω f παραγωγίσιμη στο (0,+∞), με  = , x>0, =1 και g(x)=(2x2+4x)lnx-5x2+4x+1, x>0. **α)** Να δείξετε ότι f(x)=(x+1)lnx, x>0. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε το σημείο καμπής της. Να βρείτε το εμβαδόν μεταξύ της Cf, της εφαπτομένης της στο σημείο καμπής και τις ευθείες χ= , x=e **β)** Να μελετήσετε την g ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και να λύσετε τις εξισώσεις: **1)** = , x>0 **2)** = **γ)** Θεωρούμε τα σημεία Α(x,f(x)), B(2-x,f(2-x)), 1<x<2. Να δείξετε ότι για κάθε χ∈(1,2) η κλίση της ευθείας ΑΒ είναι μεγαλύτερη του 2. Ποιο είναι το όριο της κλίσης της ευθείας ΑΒ όταν το χ τείνει στο 1;
5. Έστω πολυωνυμική συνάρτηση f, με f(0)=1, =1 και =6 **α)** Να δείξετε ότι f(x)=x3-3x+1 **β)** Να δείξετε ότι η f έχει δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα **γ)** Αν ρ είναι η αρνητική ρίζα να δείξετε ότι το εμβαδόν μεταξύ της Cf, τους άξονες και την ευθεία χ=ρ, είναι **δ)** Να βρείτε τα όρια  και 
6. Έστω η f παραγωγίσιμη στο (0,+∞) με f(1)=1 και f(x)+xf΄(χ)>0, χ>0. Να δείξετε ότι: **α)** >-1 **β)** f(x)<, για κάθε χ∈(0,1) και f(x)>, για κάθε χ∈(1,+∞) **γ)** υπάρχει ξ∈ ώστε f΄(ξ)>-1 **δ)** Ε(λ)>lnλ, όπου Ε(λ) το εμβαδόν μεταξύ της Cf, του x΄x, και των ευθειών x=1, x=λ, λ>1.
7. Έστω συνάρτηση f κυρτή στο ℛ, με f(1)=1 και =200. **α)** Να βρείτε την εφαπτομένη της στο Α(1,f(1)) **β)** Να δείξετε ότι **≥**16 **γ)** Να δείξετε ότι υπάρχει ξ∈ ώστε 2f(ξ)f΄(ξ)=f2(2)-1 **δ)** Αν επιπλέον μία παράγουσα F της f είναι περιττή, να δείξετε ότι =0
8. Έστω συνάρτηση f με f΄΄ συνεχή στο ℛ, ώστε f(1)=1, f΄(1)=0, f΄΄(χ)≠0 για κάθε χ∈ℛ και  =0. **α)** Να δείξετε ότι f(0)=0 και ότι υπάρχει χ0∈(0,1) τέτοιο ώστε f΄(χ0)=1 **β)** Να δείξετε ότι η f είναι κοίλη **γ)** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να λύσετε την ανίσωση f΄(2f(x)-1)≤0 **δ)** Να βρείτε τα κοινά σημεία των Cf και Cg, με g(x)=x
9. Έστω η f παραγωγίσιμη στο (0,+∞) με f(1)=-1 και τέτοια ώστε χ2f΄(χ)=2-χf(x), χ>0. **α)** Δείξτε ότι f(x)= , x>0 **β)** Να βρείτε τα σημεία καμπής της f **γ)** Να δείξετε ότι ισχύει 3f(x+1)<2f(x)+f(x+3), (1) για κάθε χ>e2 **δ)** Αν επιπλέον F είναι μια αρχική της f στο (0,+∞), να δείξετε ότι: **(1)** F=F(x)+c, x>0, όπου f(x)≥f(1) **(2)** e=+ce(e-1)
10. Δίνεται συνάρτηση f, με f΄΄ γνήσια αύξουσα στο ℛ, =-18 και f΄(χ)>0, για κάθε χ∈(-∞,3)∪(3,+∞). Να δείξετε ότι: **α)** f(3)=1, f΄(3)=0, f΄΄(3)=0, f(1)=-3 **β)** το σημείο Κ(3,f(3)) είναι σημείο καμπής της f **γ)** η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς μια ρίζα ρ∈(1,3) και =1-f(2)
11. Ένα ορθογώνιο ΚΛΜΝ ύψους χ cm είναι εγγεγραμμένο σε τρίγωνο ΑΒΓ, βάσης ΒΓ=10 cm και ύψους ΑΔ=5 cm. **α)** Να δείξετε ότι το εμβαδόν Ε και η περίμετρος Ρ του ΚΛΜΝ, δίνονται από τις συναρτήσεις: Ε(χ)=-2χ2+10χ, Ρ(χ)=2(10-χ), 0<χ<5.  **β)** Να βρείτε την εφαπτομένη της Ε(χ), που είναι παράλληλη στην Ρ(χ) **γ)** Να υπολογίσετε το  **δ)** Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της Ε(χ) και μια οριζόντια ευθεία που τέμνει την καμπύλη σε δύο σημεία. Να βρείτε την εξίσωση αυτής της ευθείας ψ=c, ώστε τα εμβαδά Ε1 και Ε2 να είναι ίσα.
12. Δίνεται η συνάρτηση f(χ)=χlnx , x≥1. **α)** Να δείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της **β)** Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη **γ)** Να μελετηθεί η f ως προς τη κυρτότητα και να δείξετε ότι f(x)≥2x-e, για κάθε χ≥1 **δ)** Να βρείτε το  και το Ι=

1. Δίνεται η συνάρτηση f(χ)=x-εφχ, χ∈. **α)** Να βρείτε το σύνολο τιμών της, τα σημεία καμπής, τις ασύμπτωτες και τα διαστήματα κυρτότητας της f **β)** Να βρείτε την εφαπτομένη της Cf στο σημείο με τετμημένη και να δείξετε ότι για κάθε χ∈ ισχύει εφχ≥2χ+1- **γ)** Να δείξετε ότι η f(x)=-x, έχει ακριβώς τρεις ρίζες στο εκ των οποίων οι δυο είναι αντίθετες **δ)** Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των f, f-1 **ε)** Αν ρ η θετική ρίζα της f(x)=-x, να υπολογίσετε συναρτήσει του ρ, το εμβαδόν μεταξύ της Cf και της ευθείας χ+ψ=0.