**ΕΛΛΕΙΨΗ**

**ΟΡΙΣΜΟΣ**

**Έλλειψη λέγεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία του Ε΄και Ε είναι σταθερό , (ΜΕ΄)+(ΜΕ)=2α και μεγαλύτερο του (Ε΄Ε)=2γ , α > γ .Τα Ε΄και Ε λέγονται εστίες της έλλειψης και το 2γ=(Ε΄Ε) λέγεται εστιακήαπόσταση .**

**Ι.**

**A) Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες στον χ΄χ τις Ε΄(-γ,0) , Ε(γ,0) είναι :**

**= 1 (Ι) με β² = α² - γ² . Είναι -α≤χ≤α , -β ≤ψ≤β .**

Η έλλειψη τέμνει τον άξονα χ΄χ στα σημεία Α΄(-α,0) και Α(α,0),**τα Α , Α΄λέγονται**

**κορυφές της έλλειψης και το ευθύγραμμο τμήμα Α΄Α με (Α΄Α)=2α λέγεται**

**μεγάλος άξονας της έλλειψης .**

Η έλλειψη τέμνει τον άξονα ψ΄ψ στα σημεία Β΄(0,-β) και Β(0,β) .**Το ευθύγραμμο**

**τμήμα Β΄Β με (Β΄Β) = 2β λέγεται μικρός άξονας της έλλειψης .**

**B)Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες στον ψ΄ψ τις Ε΄(0,-γ) , Ε(0,γ) είναι :**

**= 1 (ΙΙ)με β² = α² - γ² . Είναι -α≤ψ≤α , -β ≤χ≤β .**

Η έλλειψη τέμνει τον άξονα χ΄χ στα σημεία Β΄(-β,0) κα Β(β,0) **. Το ευθύγραμμο**

**τμήμα Β΄Β με (Β΄Β)=2β λέγεται μικρός άξονας της έλλειψης .**

Η έλλειψη τέμνει τον άξονα ψ΄ψ στα σημεία Α΄(0,-α) και Α(0,α) **, τα Α΄, Α λέγονται**

**κορυφές της έλλειψης και το ευθύγραμμο τμήμα Α΄Α με (Α΄Α)=2α λέγεται**

**μεγάλος άξονας της έλλειψης .**

**II.Εκκεντρότητα ε μίας έλλειψης λέγεται το πηλίκο της εστιακής απόστασης**

**προς το μήκος του μεγάλου άξονα , δηλαδή ε=με 0<ε<1 .**

**Έχουμε =1-ε² (\*) .**

**• Αν ε→1 η έλλειψη τείνει σε ευθύγ.τμήμα .**

**• Αν ε→0 η έλλειψη τείνει να γίνει κύκλος .**

**ΙΙΙ) Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της έλλειψης στο σημείο της Μ(κ,λ) είναι:**

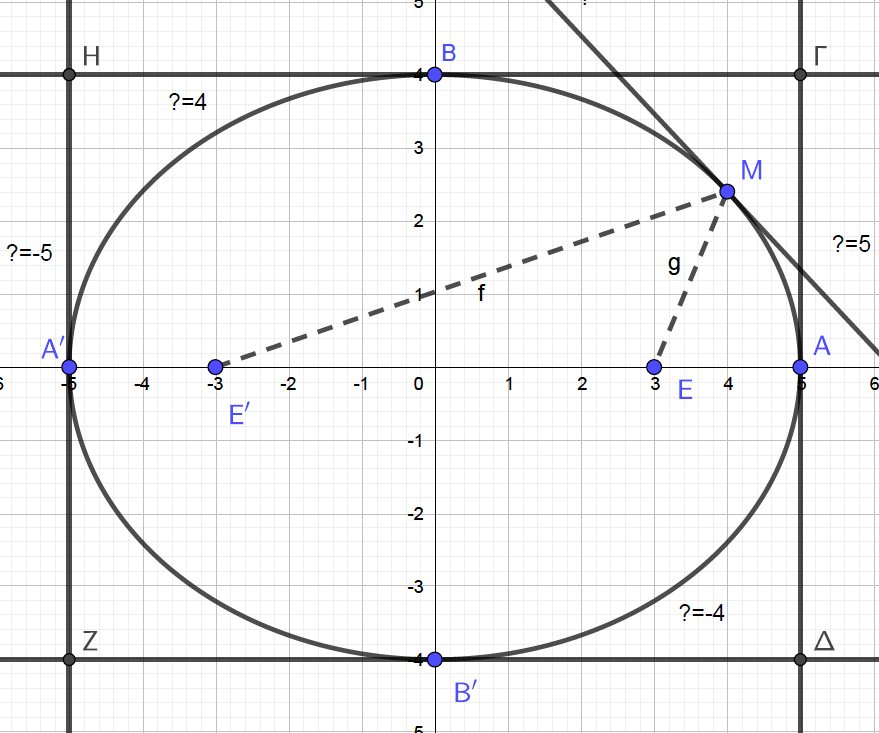
**•για την (Ι) , (ε) :=1 •για την (ΙΙ) , (ε) : =1**

**ΙV)** Οι εφαπτόμενες της έλλειψης στα Α΄ , Α , Β΄, Β τέμνονται στα σημεία Γ , Δ , Ζ , Η και

ορίζουν ορθογώνιο το οποίο λέγεται **ορθογώνιο βάσης με μήκος 2α και ύψος 2β.**

Άρα το ορθογώνιο βάσης καθορίζει την μορφή της έλλειψης , αφού το πηλίκο καθορίζει

την εκκεντρότητα (\*) .

**Παραδείγματα**

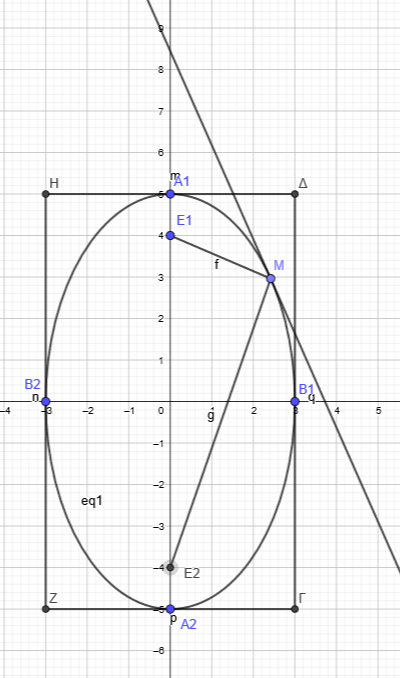
1., ,

= - , άρα

Ε(3,0) , Ε΄(-3,0) οι εστίες

(ΜΕ)+(ΜΕ΄)=10 = 2 α = (ΑΑ΄)

Μ(4, , εΜ : 16χ+15ψ=100



2. , ,

= - , άρα

Ε1(0,4) , Ε2(0,-4) οι εστίες

Μ(,(ΜΕ1)+(ΜΕ2)=2α=10=(Α1Α2)

εΜ :20χ+9ψ=75

**ΥΠΕΡΒΟΛΗ**

**ΟΡΙΣΜΟΣ**

**Υπερβολή λέγεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου των**

**οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία**

**του Ε΄και Ε είναι σταθερή , |(ΜΕ΄)-(ΜΕ)|=2α και μικρότερη του (Ε΄Ε)=2γ , α<γ.**

**Τα Ε΄και Ε λέγονται εστίες της υπερβολής , το2γ=(Ε΄Ε) λέγεται εστιακή**

**απόσταση.**

**Ι)**

**Α)Η εξίσωση της υπερβολής με εστίες στον χ΄χτις Ε΄(-γ,0) , Ε(γ,0) είναι**

**= 1(Ι΄) με β² = γ² - α² . Είναι χ≤-α ή χ≥α .**

Η υπερβολή τέμνει τον άξονα χ΄χ στα σημεία **Α΄(-α,0) και Α(α,0) , τα Α΄ , Α**

**λέγονταικορυφές της υπερβολής και είναι (Α Ά)=2α .**

Η υπερβολή δεν τέμνει τον ψ΄ψ .

**Β)Η εξίσωση της υπερβολής με εστίες στον ψ΄ψτις Ε΄(0,-γ) , Ε(0,γ) είναι**

**= 1 (ΙΙ΄)με β² = γ² - α² . Είναι ψ≤-α ή ψ≥α .**

Η υπερβολή τέμνει τον άξονα ψ΄ψ στα σημεία  **Α΄(0,-α) και Α(0,α) ,τα Α΄ , Α**

**λέγονται κορυφές της υπερβολής και είναι (Α Ά)=2α .**

Η υπερβολή δεν τέμνει τον άξονα χ΄χ .

**II) Εκκεντρότητα ε μίας υπερβολής λέγεται το πηλίκο της εστιακής απόστασης**

**προς την απόσταση των κορυφών της , δηλαδή ε=με ε>1 .**

**Έχουμε = ε² - 1 (\*\*) .**

**•Αν ε →1 η υπερβολή τείνει σε δύο ημιευθείες στον άξονα συμμετρίας με**

**αρχές τις κορυφές .**

**•Αν ε→+∞ η υπερβολή τείνει να γίνει δύο ευθείες κάθετες στίς κορυφές .**

**ΙΙΙ) Ασύμπτωτες λέγονται οι ευθείες , που για μεγάλες ή μικρές τιμές του χ ,**

**πλησιάζουν απεριόριστα την γραφική παράσταση χωρίς να την τέμνουν.**

* **Για την (Ι΄) είναι οι (ε) :ψ****=()·χ και (η):ψ=-()·χ .**
* **Για την (ΙΙ΄) είναι οι (ε) :ψ=()·χ και (η):ψ=-()·χ .**

**ΙV)Η εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής στο σημείο της Μ(κ,λ) είναι:**

**• για την (Ι΄) :=1**

**•για την (ΙΙ΄) :=1**

**Α) Οι υπερβολές : = 1και= 1 λέγονται συζυγείς**

**και έχουν ασύμπτωτες τις ευθείες** **(ε) :ψ=()·χ και (η):ψ= - ()·χ .**

**Β) Αν α=β η υπερβολή , λέγεται ισοσκελής , έχει εξίσωση χ²-ψ²=α²**

**(ή ψ²-χ²=****α²) , εκκεντρότητα ε² = 2 και ασύμπτωτες τις ευθείες**

**ψ=χ και ψ=-χ .**

**V)** Οι εφαπτόμενες της υπερβολής στις κορυφές Α΄ , Α τέμνουν τις ασύμπτωτες

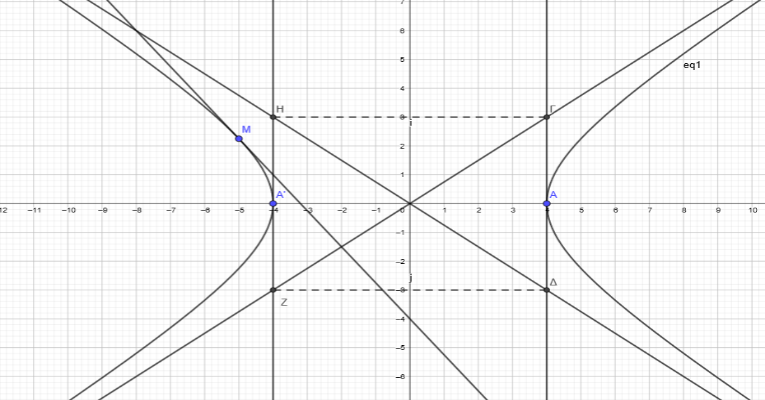
στα σημεία Γ , Δ , Ζ , Η και ορίζουν ορθογώνιο το οποίο λέγεται **ορθογώνιο βάσης**

με **μήκος 2α** και **ύψος 2β**.  **Άρα το ορθογώνιο βάσης καθορίζει την μορφή της**

**υπερβολής** , αφού το πηλίκοκαθορίζει την εκκεντρότητα (\*\*) .

**Παραδείγματα**

**1.**



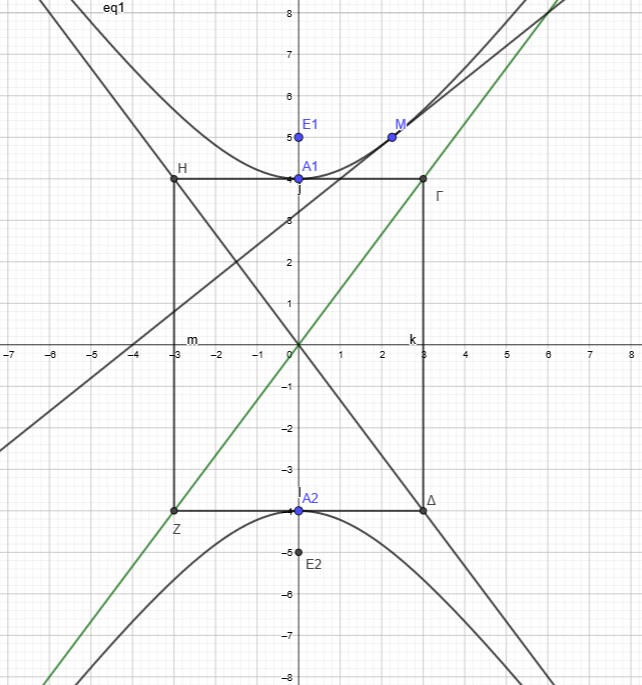
, **α²=16 ,=9**

**=25 , Ε(5,0) ,Ε΄(-5,0)**εστίες

|(ΜΕ)-(ΜΕ΄)|=2α = 8 ,εκκεντρότητα: ε=

Μ(5,- ), εΜ : 5χ+4ψ=16

Ασύμπτωτες:ψ= και ψ=-



2.

, **α²=16 ,=9**

**=25 , Ε1(0,5) ,Ε2(-5,0)**εστίες

|(ΜΕ1)-(ΜΕ2)|=2α = 8 ,εκκεντρότητα: ε=

Μ( ), εΜ : 5ψ-4χ=16

Ασύμπτωτες:ψ= και ψ=-