**ΕΛΛΕΙΨΗ**

**ΟΡΙΣΜΟΣ**

**Έλλειψη λέγεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία του Ε΄και Ε είναι σταθερό , (ΜΕ΄)+(ΜΕ)=2α και μεγαλύτερο του (Ε΄Ε)=2γ , α > γ .Τα Ε΄και Ε λέγονται εστίες της έλλειψης και το 2γ=(Ε΄Ε) λέγεται εστιακήαπόσταση .**

**Ι.**

**A) Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες στον χ΄χ τις Ε΄(-γ,0) , Ε(γ,0) είναι :**

$\frac{χ^{2}}{α^{2}} + \frac{ψ^{2}}{β^{2}}$**= 1 (Ι) με β² = α² - γ² . Είναι -α≤χ≤α , -β ≤ψ≤β .**

Η έλλειψη τέμνει τον άξονα χ΄χ στα σημεία Α΄(-α,0) και Α(α,0),**τα Α , Α΄λέγονται**

**κορυφές της έλλειψης και το ευθύγραμμο τμήμα Α΄Α με (Α΄Α)=2α λέγεται**

**μεγάλος άξονας της έλλειψης .**

Η έλλειψη τέμνει τον άξονα ψ΄ψ στα σημεία Β΄(0,-β) και Β(0,β) .**Το ευθύγραμμο**

**τμήμα Β΄Β με (Β΄Β) = 2β λέγεται μικρός άξονας της έλλειψης .**

**B)Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες στον ψ΄ψ τις Ε΄(0,-γ) , Ε(0,γ) είναι :**

$\frac{ψ^{2}}{α^{2}} + \frac{χ^{2}}{β^{2}}$**= 1 (ΙΙ)με β² = α² - γ² . Είναι -α≤ψ≤α , -β ≤χ≤β .**

Η έλλειψη τέμνει τον άξονα χ΄χ στα σημεία Β΄(-β,0) κα Β(β,0) **. Το ευθύγραμμο**

**τμήμα Β΄Β με (Β΄Β)=2β λέγεται μικρός άξονας της έλλειψης .**

Η έλλειψη τέμνει τον άξονα ψ΄ψ στα σημεία Α΄(0,-α) και Α(0,α) **, τα Α΄, Α λέγονται**

**κορυφές της έλλειψης και το ευθύγραμμο τμήμα Α΄Α με (Α΄Α)=2α λέγεται**

**μεγάλος άξονας της έλλειψης .**

**II.Εκκεντρότητα ε μίας έλλειψης λέγεται το πηλίκο της εστιακής απόστασης**

 **προς το μήκος του μεγάλου άξονα , δηλαδή ε=**$\frac{γ}{α}$**με 0<ε<1 .**

 **Έχουμε** $\frac{β^{2}}{α^{2}}$**=1-ε² (\*) .**

 **• Αν ε→1 η έλλειψη τείνει σε ευθύγ.τμήμα .**

 **• Αν ε→0 η έλλειψη τείνει να γίνει κύκλος .**

**ΙΙΙ) Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της έλλειψης στο σημείο της Μ(κ,λ) είναι:**

**•για την (Ι) , (ε) :**$\frac{κ·χ}{α^{2}} + \frac{λ·ψ }{β^{2}}$**=1 •για την (ΙΙ) , (ε) :**$\frac{λ·ψ}{α^{2}} + \frac{κ·χ }{β^{2}}$ **=1**

**ΙV)** Οι εφαπτόμενες της έλλειψης στα Α΄ , Α , Β΄, Β τέμνονται στα σημεία Γ , Δ , Ζ , Η και

 ορίζουν ορθογώνιο το οποίο λέγεται **ορθογώνιο βάσης με μήκος 2α και ύψος 2β.**

 Άρα το ορθογώνιο βάσης καθορίζει την μορφή της έλλειψης , αφού το πηλίκο $\frac{β}{α }$καθορίζει

την εκκεντρότητα (\*) .

**Παραδείγματα**

1.$\frac{χ^{2}}{25}+\frac{ψ^{2}}{16}=1$, $α^{2}=25$, $β^{2}=16$

$β^{2}$=$α^{2}$ - $γ^{2}$ , άρα $γ^{2}=9$

Ε(3,0) , Ε΄(-3,0) οι εστίες

(ΜΕ)+(ΜΕ΄)=10 = 2 α = (ΑΑ΄)

Μ(4,$\frac{12}{5})$ , εΜ : 16χ+15ψ=100



 2.$\frac{χ^{2}}{9}+\frac{ψ^{2}}{25}=1$ , $α^{2}=25$ , $β^{2}=9$

$β^{2}$=$α^{2}$ - $γ^{2}$ , άρα $γ^{2}=16$

Ε1(0,4) , Ε2(0,-4) οι εστίες

Μ($\frac{12}{5},3)$,(ΜΕ1)+(ΜΕ2)=2α=10=(Α1Α2)

εΜ :20χ+9ψ=75

**ΥΠΕΡΒΟΛΗ**

**ΟΡΙΣΜΟΣ**

**Υπερβολή λέγεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου των**

**οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία**

**του Ε΄και Ε είναι σταθερή , |(ΜΕ΄)-(ΜΕ)|=2α και μικρότερη του (Ε΄Ε)=2γ , α<γ.**

**Τα Ε΄και Ε λέγονται εστίες της υπερβολής , το2γ=(Ε΄Ε) λέγεται εστιακή**

**απόσταση.**

 **Ι)**

 **Α)Η εξίσωση της υπερβολής με εστίες στον χ΄χτις Ε΄(-γ,0) , Ε(γ,0) είναι**

$\frac{χ^{2}}{α^{2}} - \frac{ψ^{2}}{β^{2}}$**= 1(Ι΄) με β² = γ² - α² . Είναι χ≤-α ή χ≥α .**

Η υπερβολή τέμνει τον άξονα χ΄χ στα σημεία **Α΄(-α,0) και Α(α,0) , τα Α΄ , Α**

 **λέγονταικορυφές της υπερβολής και είναι (Α Ά)=2α .**

Η υπερβολή δεν τέμνει τον ψ΄ψ .

**Β)Η εξίσωση της υπερβολής με εστίες στον ψ΄ψτις Ε΄(0,-γ) , Ε(0,γ) είναι**

$\frac{ψ^{2}}{α^{2}} - \frac{χ^{2}}{β^{2}}$**= 1 (ΙΙ΄)με β² = γ² - α² . Είναι ψ≤-α ή ψ≥α .**

Η υπερβολή τέμνει τον άξονα ψ΄ψ στα σημεία  **Α΄(0,-α) και Α(0,α) ,τα Α΄ , Α**

**λέγονται κορυφές της υπερβολής και είναι (Α Ά)=2α .**

Η υπερβολή δεν τέμνει τον άξονα χ΄χ .

**II) Εκκεντρότητα ε μίας υπερβολής λέγεται το πηλίκο της εστιακής απόστασης**

 **προς την απόσταση των κορυφών της , δηλαδή ε=**$\frac{γ}{α}$**με ε>1 .**

 **Έχουμε** $\frac{β^{2}}{α^{2}}$**= ε² - 1 (\*\*) .**

 **•Αν ε →1 η υπερβολή τείνει σε δύο ημιευθείες στον άξονα συμμετρίας με**

**αρχές τις κορυφές .**

**•Αν ε→+∞ η υπερβολή τείνει να γίνει δύο ευθείες κάθετες στίς κορυφές .**

 **ΙΙΙ) Ασύμπτωτες λέγονται οι ευθείες , που για μεγάλες ή μικρές τιμές του χ ,**

 **πλησιάζουν απεριόριστα την γραφική παράσταση χωρίς να την τέμνουν.**

* **Για την (Ι΄) είναι οι (ε) :ψ****=(**$\frac{β}{α}$**)·χ και (η):ψ=-(**$\frac{β}{α}$**)·χ .**
* **Για την (ΙΙ΄) είναι οι (ε) :ψ=(**$\frac{α}{β}$**)·χ και (η):ψ=-(**$\frac{α}{β}$**)·χ .**

 **ΙV)Η εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής στο σημείο της Μ(κ,λ) είναι:**

 **• για την (Ι΄) :**$\frac{κ·χ}{α^{2}} - \frac{λ·ψ }{β^{2}}$**=1**

 **•για την (ΙΙ΄) :**$\frac{λ·ψ}{α^{2}} - \frac{κ·χ }{β^{2}}$**=1**

 **Α) Οι υπερβολές :** $\frac{χ^{2}}{α^{2}} - \frac{ψ^{2}}{β^{2}}$**= 1και**$\frac{ψ^{2}}{β^{2}} - \frac{χ^{2}}{α^{2}}$**= 1 λέγονται συζυγείς**

**και έχουν ασύμπτωτες τις ευθείες** **(ε) :ψ=(**$\frac{β}{α}$**)·χ και (η):ψ= - (**$\frac{β}{α}$**)·χ .**

 **Β) Αν α=β η υπερβολή , λέγεται ισοσκελής , έχει εξίσωση χ²-ψ²=α²**

**(ή ψ²-χ²=****α²) , εκκεντρότητα ε² = 2 και ασύμπτωτες τις ευθείες**

**ψ=χ και ψ=-χ .**

**V)** Οι εφαπτόμενες της υπερβολής στις κορυφές Α΄ , Α τέμνουν τις ασύμπτωτες

 στα σημεία Γ , Δ , Ζ , Η και ορίζουν ορθογώνιο το οποίο λέγεται **ορθογώνιο βάσης**

με **μήκος 2α** και **ύψος 2β**.  **Άρα το ορθογώνιο βάσης καθορίζει την μορφή της**

**υπερβολής** , αφού το πηλίκο$\frac{β}{α}$καθορίζει την εκκεντρότητα (\*\*) .

**Παραδείγματα**

 **1.**



$\frac{χ^{2}}{16}-\frac{ψ^{2}}{9}=1$, **α²=16 ,**$β^{2}$**=9**

$γ^{2}=α²+β^{2}$**=25 , Ε(5,0) ,Ε΄(-5,0)**εστίες

 |(ΜΕ)-(ΜΕ΄)|=2α = 8 ,εκκεντρότητα: ε=$\frac{5}{4}$

Μ(5,-$\frac{9}{4}$ ), εΜ : 5χ+4ψ=16

Ασύμπτωτες:ψ=$\frac{3}{4}χ$ και ψ=- $\frac{3}{4}χ$



 2.

$\frac{ψ^{2}}{16}-\frac{χ^{2}}{9}=1$, **α²=16 ,**$β^{2}$**=9**

$γ^{2}=α²+β^{2}$**=25 , Ε1(0,5) ,Ε2(-5,0)**εστίες

 |(ΜΕ1)-(ΜΕ2)|=2α = 8 ,εκκεντρότητα: ε=$\frac{5}{4}$

Μ($\frac{9}{4},5)$ ), εΜ : 5ψ-4χ=16

 Ασύμπτωτες:ψ=$\frac{4}{3}χ$ και ψ=- $\frac{4}{3}χ$