***-Μαθηματικά Γ3 .***(25/3)

1. Δίνεται η f(x): με f’(0)=1 ,f(0)=0 και

 f΄΄(x)-4f΄(x)+4f(x)=0.

Ν.Δ.Ο f(x)=xe2x

Δίνεται η f(x):[0, για την οποία ισχύουν:

Α) είναι συνεχής

Β) f ’(x)= , x>0 και f(1)=e.

Nα βρείτε την f .

Nα υπολογίσετε τα όρια:

 .

4.

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f : AR όταν :

* F’(x)=3x-συνx+ , x>0 και f(π)=
* F’’(x)=-ημx , xεR και f ‘(0)=f(0)=1
* F’(x)=x(2συνx-xημx), xεR και f(0)=1
* F’(x)= , xεR και f(0)=2
* , A= (0,) και f()= .F’(x)=

5.

Δίνεται η συνάρτηση f(x)=ln.

Α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

Β. Να βρείτε το σύνολο τιμών.

Γ. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

6.

Δίνεται η συνάρτηση f(x)=x-ln(x2+1) και η g(x):

για την οποία ισχύει: g(g(x))+eg(x)+ ln(x2+1)=x , x ε R.

Α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία , να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημό της.

Β. Να δείξετε ότι η g είναι “1-1”.

Γ. Να λύσετε την εξίσωση g(ex)-g(x2+1)=0.

7.

Δίνεται η συνάρτηση f(x)=2ex+ x και η g(x):

για την οποία ισχύει: g3(x)+g(x)-x=2ex .

α. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό xo ε (-1,0) ώστε f(xo)=0

β. Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το πρόσημό της.

γ. Να λύσετε την ανίσωση g(f(x))>1.

1. Η θέση x(t) ενός υλικού σημείου που κινείται πάνω σε άξονα

δίνεται από τη σχέση: , t ε [0,4]

α) Ποια η ταχύτητα κ’ η επιτάχυνση του υλικού σημείου για t=2s;

β) Πότε το σημείο είναι στιγμιαία ακίνητο;

γ) Πότε κινείτε στη θετική κατεύθυνση και πότε στην αρνητική;

δ) Να βρείτε το ολικό διάστημα που διένυσε κατά τα πρώτα 4 sec.

1. Ένα σημείο Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης y=2x2+1 ώστε

η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό 2cm/sec.Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του Μ τη χρονική στιγμή t0 που η τετμημένη του ισούται με -1.

1. Ένα κινητό Κ κινείται πάνω στη καμπύλη με εξίσωση y=.

Α)Nα βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του κινητού Κ όταν αυτό διέρχεται από το Α(-2,-1) και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 2μον/s.

Β)Να βρείτε σε ποια σημεία της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης είναι οκταπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης(ρυθμός μεταβολής τετμημένης θετικός).

1. Έστω η συνάρτηση f(x)=lnx και Α το σημείο της Cf που η εφαπτομένη ε σ’ αυτό διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ε.

β) Αν ένα κινητό Μ κινείται κατά μήκος της Cf και καθώς περνάει από το Α η τετμημένη του ελαττώνεται κατά 2 μονάδες το δευτερόλεπτο, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το Α.

1. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση

g:(0,), η f(x)=g(), x>0 και η ευθεία ε:y=2x που εφάπτεται της Cg στο σημείο Α(1,g(1)).

α) Να δείξετε ότι η Cf διέρχεται από το Α και να βρείτε την εφαπτομένη της Cf στο Α.

β) Έστω ένα κινητό Μ που κινείται στη Cf και θ η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της Cf στο Μ με τον άξονα x’x. Aν η τετμημένη του Μ αυξάνεται με ρυθμό 2cm/sec και καθώς το Μ διέρχεται από το Α η κλίση της Cg αυξάνει με ρυθμό 2,τοτε να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της θ, καθώς το Μ διέρχεται από το Α.

1. Δίνεται ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=x3+β

εφάπτεται στον άξονα x’x.

α) Να βρείτε το β.

β) Έστω ότι ένα κινητό Μ(α,f(α)), α>0 ξεκινά από το Ο και κινείται κατά μήκος της Cf .Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του Μ δίνεται από τον τύπο α’(t)=2 να βρείτε την ταχύτητα με την οποία απομακρύνεται από το Ο το σημείο τομής της εφαπτομένης της Cf με τον άξονα x’x τη στιγμή που το Μ έχει τετμημένη 1.

1. f΄΄(x)-4f΄(x)+4f(x)=0. f΄΄(x)-2f΄(x)=2f ‘(x)-4f(x)

(f ‘(x)-2f(x))’=2(f ’(x)-2f(x))

g’(x)e-2x -2 e-2xg(x)=0

g’(x)e-2x+(e-2x)’g(x))=0

(g(x)e-2x)’=0=(c)’ g(x)e-2x=cg(0)0=c1=c g(x)e-2x=1 g(x)= e2x

f ’(x)*-2f*(x) = e2x f ’(x)-2f(x)= e2x

( f(x))’=1=(x)’

 f(x)=x+c1 0= c1 f(x)=x f(x)=x.

**2)** Δίνεται η f(x):[0, για την οποία ισχύουν:

Α) είναι συνεχής

Β) f ’(x)= , x>0 και f(1)=e.

Nα βρείτε την f .

**ΛΥΣΗ**

f ’(x)= xf ‘(x)=(x+1)f(x)

 xf ‘(x)=xf(x)+f(x) xf ‘(x)- f(x)= xf(x)

==

g’(x)=g(x)

*f(x)=x*f(1)=ce1

f(x)=x , x>0

Επειδή f συνεχής τότε:

f(0)== x=0

f(x)=x , x0 .

=

 ==-5

**ΛΥΣΗ**

-

4.

* F’(x)=3x-συνx+ , x>0 και f(π)=

F’(x)=3

(-ημx+2lnx)’

F’(x)= (-ημx+2lnx)’

F(x)=-ημx+2lnx+c

=-ημπ+2lnπ+c

C=-2lnπ

F(x) =-ημx+2lnx-2lnπ

* F’’(x)=-ημx , xεR και f ‘(0)=f(0)=1

F’’(x)=(+συνx)’

F’(x)=+συνx+c

1=+συν0+c

1=1+1+c-1 F’(x)=+συνx-1

F’(x)=+ημx-x

F(x)=+ημx-x+c1

1=e0+ημ0-0+ c1

1=1+ c1 c1=0 F(x)=+ημx-x

* F’(x)=x(2συνx-xημx), xεR και f(0)=1

F’(x)=2xσυνx-x2ημx

F’(x)=(x2)’συνx+x2(συνx)’

F’(x)=( x2συνx)’

F(x)= x2συνx+c

1=c F(x)= x2συνx+1

* F’(x)= , xεR και f(0)=2

F’(x)=

F’(x)=

F’(x)=

F’(x)=

F’(x)=

F(x)=+c

2=c F(x)=+2

* F’(x)= , A= (0,) και f()= .

F’(x)=(

F(x)=

=c=c=c=c

F(x)=, A= (0,)

5.

 f(x)=ln

1. Πρέπει >0

|  |  |
| --- | --- |
| **x** | **- 0 1**  |
|  |  **-**  | + | **-** |

Αρα 0<x<1

F’(x)=( ln=()’===

===-

|  |  |
| --- | --- |
| **x** | **- 0 1**  |
| **F’** |  ***IIIII* *IIIIIIIII***  | **-** | ***IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII*** |
| **F** |  ***IIIIIIII II I II***  |  | ***IIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIIII*** |

=+ =-

Af =(-

Γ.

ln

 x= , x ε R

6.

Α.

f(x)=x-ln(x2+1) x ε R διότι x2+1>0 x ε R.

F’(x) =1- x2+1)’=1-==

Για xf R.

f(x)=0f R αρα x=0

μοναδική ρίζα.

f(x)>0f(x)>f(0) x>o

Β.

g(x1)=g(x2)g(g(x1))=g(g(x2)) (1) και (2)

Προσθέτοντας τις 1+2 έχω:

g(g(x1))+eg(x1)= g(g(x2))+eg(x2)(x1)=f(x2)x1=x2 αρα g “1-1”.

Γ.

g(ex)-g(x2+1)=0 g(ex)= g(x2+1) ex= x2+1x=ln(x2+1)

x-ln(x2+1)=0f(x)=0

7.

α)f(x)=2ex+ x

 f(0) x0 ε (-1,0): f(x0)=0

f’(x)=2ex+1>0 f R άρα η ρίζα x0 είναι μοναδική.

β)

g3(x)+g(x)-x=2ex g3(x)+g(x)= 2ex+x g3(x)+g(x) =f(x) (1)

g3(x)+g(x))’ =f’(x) =(2ex+x)’=2ex+1>0

 3g2(x)+g’(x)>0 g’(x) >0 g’(x)>0

g R.

 g3(x)+g(x) =f(x) g3(x0)+g(x0)=f(x0)=0 g(x0)2(x0) +1]=0

g(x0)=0.

g(x)>0= g(x0) x >x0.

γ)

 g3(0)+g(0)=f(0)=2 g3(0)+g(0)-2=0 το g(0) είναι ρίζα της :

x3+x-2=0 (x-1) (x2+x+2)=0 άρα g(0)=1

g(f(x))>1=g(0) f(x)>0=f(x0) x> x0 .

* v(t)=6t2-24t+18v(2)=-6μ/s

α(t)= v’(t)=12t-24α(2)=0μ/s2

* v(t)=06t2-24t+18=0t1=1sec , t2=3sec

|  |  |
| --- | --- |
| t |  1 3 4 |
| v(t) |  + 0 - 0 + |

* S1==3-(-5)=8

S2===8

S3===8

Sολ=24μ

y’(t)=4x(t)x’(t) y’()=4x()x’()=4(-1)2=-8cm/sec

α) y’(t)=x2(t)x’(t) y’()=x2()x’()==4cm/sec

β) 8x’(t)=x2(t)x’(t)16x’(t)= x2(t)x’(t) x2(t)=16x(t)=

B(4,11) Γ(-4,-)

**α) Α(**x0, ln x0), x>0

**ε : y-** ln x0=(x- x0)**-** ln x0=(- x0) ln x0=1 x0=e

**ε : y-** 1=(x- e)  **y**=x

**β) y’(t)=**  **y’(t0)=** **y’(t0)=**  μον/s.

**α)Για να διέρχεται** η Cf από το Α πρέπει f(1)=g(1)

**f**(x)=g( f(1)=g(1)=2 (y=2x  y=g(1)=2 1=2)

**y-f(1)**=f’(1)

**[f**(x)=g( f’(x)=g’(

f’(x)=g’(f’(1)=-2]

**y-**2=-2(x-1)y-2=-2x+2

**+β)** εφθ**(t)=f’(x(t))**

εφ’θ(t)=f”(x(t))

(-’g’(x’(t)+ g”( (=

(g’(x’(t)+ g”(

2=

=

1.

α) f(x)=x3+β

f’(x)=3x2=0x=0

3

β) y-α3=3(x-α)-α3=3(x-α)=x-α

x’(t)= x’(t)==μ/s

**ΣΥΝΟΠΤΙΚΟ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΠΡΟΟΔΩΝ**

 **Α.Π Γ.Π**

**………………………………….. ΟΡΙΣΜΟΣ…………………………………….**

 αν+1 = αν + ω αν+1 = αν ∙ λ ….........................**ΜΟΡΦΗ ν-ΟΣΤΟΥ ΟΡΟΥ……………………………**

αν = α1 + (ν-1) ω αν = α1 ∙ λν-1

…………………………. **ΣΧΕΣΗ ΔΙΑΔΟΧΙΚΩΝ ΟΡΩΝ…………………………**

**β= β2=α**∙**γ**

**………………………ΑΘΡΟΙΣΜΑ ν ΠΡΩΤΩΝ ΟΡΩΝ………………………..**

**Sν=(α1+αν)**∙ **Sν=**

**Sν=[2**∙α1+(ν-1)∙ω]