* Σ Υ Ν Α Ρ Τ Η Σ Ε Ι Σ

Μία σχέση f:ΑΒ με Α,ΒR λέγεται πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής, αν για κάθε x1,x2A με f(x1)f(x2) ισχύει x1x2

# Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Να βρεθεί η τιμή του λR, ώστε η σχέση που δίνεται από τον παρακάτω τύπο, να είναι συνάρτηση: f(x)=

**3λ-2 λ-1**

2x-1

x2+1

*Α π ό δ ε ι ξ η: πρέπει 3λ-2λ-12λ1λ1/2.*

 *Αν 3λ-2<λ-1 τότε θα υπήρχε ένα x, που θα*

 *πήγαινε σε δύο διαφορετικά ψ.*

1. Δίνεται η συνάρτηση f:RR, για την οποία ισχύει: f(x+ψ)=f(x)+f(ψ), για κάθε x,ψR. Nα δείξετε ότι ισχύουν τα παρακάτω: α.f(0)=0 β.f(-x)=-f(x), για κάθε xR γ.f(x1+x2+…+xv)=f(x1)+f(x2)+…+f(xv), για κάθε x1,x2,…,xvRδ. f(vx)=vf(x), για κάθε xR και νΝ\*. ε.f(μx)=μf(x), για κάθε xR και μΖ. στ. f(ρx)=ρf(x), για κάθε xR και ρQ. *ΥΠΟΔΕΙΞΗ: στ. Θέτω ρ=μ/ν, μ,νΖ, οπότε μ=νρ και από το (ε) έχω: f(νρx)=νρf(x)  νf(ρx)= νρf(x).*



1. Δίνεται η συνάρτηση f(x)=.

 Να σχεδιάσετε τις Cf, C|f|.

1. Δίνονται οι συναρτήσεις f:RR, g:RR, με τύπους f(x)=2x+ και g(x) = -2x+. Να δείξετε ότι: α.f(x)=g(-x) και f(x)g(x)=1 β. Αν x0, τότε f(x)>0 και αν x0, τότε g(x)>0. γ. f(x)>0, για κάθε xR.
2. Δίνεται η συνάρτηση f:RR, για την οποία ισχύει: f+2f= x, για κάθε xR-{-1,2}. Να δείξετε ότι f(x)=, για κάθε xR-{-1,1,2}.

*ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Θέτω ψ = , οπότε = και ψ(x-2)=x+1*

*(ψ-1)x=2ψ+1*

1. Δίνεται η συνάρτηση f:RR, για την οποία ισχύει : f(x) x, για κάθε xR και f(x+ψ) f(x)+f(ψ), για κάθε x,ψR. Να δείξετε ότι η f είναι η ταυτοτική. *ΥΠΟΔΕΙΞΗ: για ψ = 0 f(x) f(x)+f(0) f(0)0 για ψ = -xf(0) f(x)+f(-x) f(-x) -f(x) -x*
2. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει xf(x)+(x+1)f(-x)=x+2, για κάθε xR. Να δείξετε ότι: α)f(x)+f(-x)=4, για κάθε xRβ) Να βρεθεί ο τύπος της f
3. Σε μία χώρα ο φόρος στα εισοδήματα υπολογίζεται ως εξής: σε κάθε εισόδημα τα πρώτα 3000 EURO φορολογούνται με 5% και το υπόλοιπο ποσό με 40%. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης εισοδήματος, το πεδίο ορισμού και πόσο φόρο θα πληρώσει ένας πολίτης με εισόδημα α) 2500 EURO β) 4000 EURO. Είναι δίκαιο το φορολογικό σύστημα της χώρας;
4. Δίνονται οι συναρτήσεις f:RR, g:RR, με τύπους f(x)=x2+(α-1)x-α+β και g(x)=(α-1)x2+αx-β+2. Να προσδιορίσετε τα α,βR ώστε οι καμπύλες ψ= f(x) και ψ= g(x) να τέμνονται πάνω στον άξονα x΄x και στην ευθεία x=1. Για τις τιμές των α, β που βρήκατε να προσδιορίσετε τα xR για τα οποία ισχύει α) f(x)g(x) β)f(x)>g(x)
5. Να βρεθεί ο τύπος της f, αν f(x)-x≤x2≤f(x-1)+x, για κάθε xR
6. Έστω συνάρτηση f:RR,για την οποία ισχύειf(χ+ψ)≥f(x)f(ψ)≥ex+ψ, για κάθε x,ψR. Να αποδείξετε ότι: α)f(0)=1και f(χ)f(-x)=1, για κάθε xR β)Να βρείτε τον τύπο της f. *ΥΠΟΔΕΙΞΗ: a)f(0)≥1, f(0)≥f2(0), f(0)≥f(x)f(-x)≥1 β)f(x)≥ex&f(-x)≥e-x.*
7. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της fλ(χ)=λ2χ2+(2λ-λ2)χ+1-2λ, διέρχεται από ένα σταθερό σημείο, καθώς το λ διατρέχει το R. *ΥΠΟΔΕΙΞΗ: ψ=(χ2-χ)λ2+2(χ-1)λ+1.*
8. Οι συνολικές πωλήσεις ενός μοντέλου αυτοκινήτου προσεγγίζονται με ακρίβεια από τη συνάρτηση f(t)= -15, όπου t[0,10] είναι ο χρόνος σε μήνες από την έναρξη των πωλήσεων. α) Να βρείτε πόσα αυτοκίνητα πουλήθηκαν τους 6 πρώτους μήνες και πόσα τους επόμενους δύο μήνες. β) Ποιες ήταν οι συνολικές πωλήσεις του δεκάμηνου; Πόσος χρόνος χρειάστηκε για να ολοκληρωθεί το ένα τρίτο των συνολικών πωλήσεων; (Θεωρήστε ότι log2=2,8)
* Π Ε Δ Ι Ο Ο Ρ Ι Σ Μ Ο Υ Μ Ι Α Σ Σ Υ Ν Α Ρ Τ Η Σ Η Σ

**1. Πολυωνυμική συνάρτηση:** f(x)=ανxv+αν-1xv-1+…+α0  **Α=R**

π.χ. η f(x)=2x2-5x+6, έχει πεδίο ορισμού Α=R

**2. Ρητή συνάρτηση:** f(x)=. Πρέπει **P(x)0**

π.χ. η f(x)=, για να έχει νόημα, πρέπει 3x+20x-2/3.

 Άρα Α=R-{-2/3}=(-,-2/3)(-2/3,+ )

**3. Άρρητη συνάρτηση:** f(x)=. Πρέπει **f(x)0**

π.χ. η f(x)=. Πρέπει 3-x0x3. Άρα Α=(-,3]

**4. Τριγωνομετρικές:** *α) Ημίτονο και Συνημίτονο:* f(x)=ημx&f(x)=συνx

**Α=R** και **f(A)=[-1,1]**

*β) Εφαπτομένη :* f(x)=εφx**Α=R-{κπ+} κΖ** και **f(A)=R**

*γ) Συνεφαπτομένη :* f(x)=σφx**Α=R-{κπ} κΖ** και **f(A)=R**

π.χ. η f(x)=εφ5x. Πρέπει 5x κπ+x. Άρα Α=R-{}

ψ΄

ψ

f1/2(x)=

x

f2(x)=2x

x΄

**5. Εκθετική:** fα:RR:xRfα(x)=αxR

**A=R** και**f(A)= R**

Aν **0<α<1,** τότε η εκθετική συνάρτηση είναι

**γνήσια φθίνουσα**

Αν **α>1**, τότε η εκθετική συνάρτηση είναι

**γνήσια αύξουσα**

*Σημείωση: επειδή για 0 <α1 η εκθετική είναι γνήσια μονότονη, θα είναι 1 προς 1, οπότε υπάρχει η αντίστροφή της, που λέγεται λογαριθμική*

π.χ. η f(x)=ex έχει Α=R.

Ο

1

ψ

x΄

ψ΄

x

f(x)=log2x

f(x)=log 1/2x

**6. Λογαριθμική:**f: RR: xRf(x)=logxR.

**A= R** και **f(A)= R**

Aν **0<α<1**, τότε η λογαριθμική συνάρτηση είναι

**γνήσια φθίνουσα**

Αν **α>1**, τότε η λογαριθμική συνάρτηση είναι

**γνήσια αύξουσα**

π.χ. η f(x)=ln(x2-3x+2). Πρέπει x2-3x+2>0. Δ=1 και x1=1 &x2=2

x -∞ 1 2 +∞

x2-3x+2 + - + Άρα Α=(-,1)(2,+ )

# Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων, με τύπους: **α)** f(x)= **β)** f(x)= **γ)** f(x)=  **δ)**f(x)= + **ε)**f(x)= **στ)**f(x)= + **ζ)**f(x)= **η)**f(x)= +
2. Όμοια για τις συναρτήσεις: **α)**f(x)= **β)**f(x)=ln(1+lnx) **γ)** f(x)= **δ)**f(x)=**ε)**f(x)= **στ)**f(x)=ln **ζ)**f(x)= **η)**f(x)=ln(2ημχ-1)
3. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων, με τύπους: **α)**f(x)= **β)**f(x)=logx-3(x2-4) **γ)** f(x)= **δ)**f(x)=
	* **Ι Σ Ο Τ Η Τ Α Σ Υ Ν Α Ρ Τ Η Σ Ε Ω Ν**

Δύο συναρτήσεις είναι ίσες, όταν ορίζονται στο ίδιο πεδίο και έχουν τον ίδιο τύπο

# Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Να βρεθεί η τιμή του kR, ώστε να είναι ίσες οι συναρτήσεις, με τύπους

f(x)=  και g(x)=

1. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους f(x)= και g(x)=. Nα βρεθεί ο κR, ώστε να είναι f=g.
2. Σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις να βρείτε το κατάλληλο πεδίο στο οποίο οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες: **α)**f(x)=x , g(x)= **β)**f(x)=, g(x)=x **γ)**f(x)=, g(x)= 
3. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g, με (f2+g2)(x)≤2(f+g)(x)-2 (1), για κάθε x∈ℛ. Να δείξετε ότι f=g
4. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g, h με g(x)=ex+f(x)-1, h(x)=x2+xf(x), για κάθε x∈ℛ. Να δείξετε ότιοι g, h δεν είναι ίσες.
5. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g, με f(x)=ln(αχ2+βχ+2) και g(x)=2ln(|x-1|). Να βρείτε τους α,β∈ℛ ώστε να είναι f=g.
6. Να βρεθούν οι τιμές του χ, για τις οποίες η γραφική παράσταση της f(x)=ln βρίσκεται κάτω από τον χ΄χ και της g(x)=3ln(χ+2)-2-1 βρίσκεται πάνω από τον χ΄χ.
7. Δίνονται οι συναρτήσεις f(x)=2x3+x2-5x+4 και g(x)=x3+2x2+5x+12. Να βρεθούν οι τιμές του χ, για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g.
8. Δίνονται οι συναρτήσεις f(x)=2αχ2+βχ-2 και g(x)=χ3+ αχ2+3βχ+1. Να βρείτε τα α,β∈ℛ ώστε οι γραφικές παραστάσεις των f και g να τέμνονται πάνω στις χ=-2 και χ=1.
9. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f(x)=λχ3+(λ2+3λ+1)χ2+(2λ2-λ+2)χ-3λ2-3λ-2 διέρχεται από δύο σταθερά σημεία για κάθε λ∈ℛ. ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:****f(x)=(χ2+2χ-3)λ2+(χ3+3χ2-χ-3)λ+χ2+2χ-2*
10. Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις ισχύει f=g. Αν είναι f≠g, να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του ℛ, για το οποίο ισχύει f=g. **α)**f(x)= , g(x)= **β)**f(x)= , g(x)= **γ)**f(x)=ln(-1)-ln(x-1), g(x)=- ln(+1) **δ)**f(x)= , g(x)= –x-1
11. Αν οι γραφικές παραστάσεις των f(x)=χ4-(α+1)χ2+βχ+3 και g(x)=(α+2)χ2+(2-)χ-1, τέμνονται πάνω στις ευθείες χ=-1 και χ=2, να βρείτε: **α)** τις τιμές των α, β **β)** τα άλλα κοινά σημεία των Cf και Cg.
12. Δίνοται οι συναρτήσεις f, g με f(x)=4x-2x-1 και g(x)=2x+2-8. **α)**Να βρεθούν τα κοινά σημεία των Cf και Cg. **β)** Να βρεθούν τα διαστήματα, στα οποία η Cf βρίσκεται πάνω από την Cg.
	* **Π Ρ Α Ξ Ε Ι Σ Μ Ε Σ Υ Ν Α Ρ Τ Η Σ Ε Ι Σ**

Για να μπορέσουμε να κάνουμε μια πράξη μεταξύ δύο ή περισσοτέρων συναρτήσεων (άθροισμα, αφαίρεση, πολ/σμός, διαίρεση), τότε πρέπει να δουλέψουμε στο κοινό πεδίο ορισμού των συναρτήσεων.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Ονομασία**συνάρτησης** | Συμβολισμός | Τύπος | Πεδίο ορισμού |
| Άθροισμα | f+g | (f+g)(x)=f(x)+g(x) | **AfAg** |
| Αφαίρεση | f-g | (f-g)(x)=f(x)-g(x) |
| Πολ/σμός | f·g | (f·g)(x)=f(x) ·g(x) |
| Διαίρεση | f/g | (f/g)(x)=f(x)/g(x) | **AfAg από το οποίο εξαιρούνται τα x για τα οποία ισχύει g(x)=0** |

# Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους f(x)= και g(x)=. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις f+g, f-g, f/g.
2. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους f(x)=, g(x)=, και h(x)= . Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις f/g, g/h, h/f.
3. Δίνονται οι συναρτήσεις f(x)=, g(x)=. Να βρείτε τη συνάρτηση (f+g)(x).
4. Αν ισχύει 2f(x-1)-xf(1-x)=x2+x-2, τότε: **α)** Να βρείτε την f **β)** Να βρείτε τα x∈ℛ, για τα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g, όπου g(x)=f(-x). ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:****θέτω όπου χ τα χ+1, -χ+1.*
* **Α Ρ Τ Ι Α και Π Ε Ρ Ι Τ Τ Η Σ Υ Ν Α Ρ Τ Η Σ Η**
	+ Μία συνάρτηση f:ΑΒ λέγεται **άρτια** στο Α, όταν **για κάθε x∈Α,** ισχύουν: **-xA**

και **f(-x) = f(x)**

* + Μία συνάρτηση f:ΑΒ λέγεται **περιττή** στο Α, όταν **για κάθε x∈Α,**ισχύουν: **-xA** και **f(-x) = -f(x)**

# Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Έστω συνάρτηση f τέτοια ώστε 3f(x)+f(-x)=4ημxσυνx, για κάθε xR. Να δείξετε ότιf(-x) = -f(x)
2. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει f(-x)+xf(x)=x2+x+1, για κάθε xR, να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f.
3. Έστω συνάρτηση f:R→R\* για την οποία ισχύει f(χ+ψ)+f(χ-ψ)=2f(χ)f(ψ), για κάθε χ,ψR. Να δείξετε ότι f(0)=1 και η f είναι άρτια.
4. Δίνεται η συνάρτηση f(x)=x2-8x+11. Να αποδείξετε ότι για κάθε xR ισχύει f(4-x)=f(4+x). Πως ερμηνεύετε τη σχέση αυτή γεωμετρικά;
5. Να βρεθεί ο τύπος της f, αν η f είναι περιττή και ισχύει (x2+1)f(x)≤3x, για κάθε xR
6. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει χ[f(χ)+f(-χ)+2]+2f(-x)=0, για κάθε x∈ℛ, τότε: **α)** Να δείξετε ότι η f είναι περιττή **β)** Να βρείτε τον τύπο της f.
7. Αν για την f ισχύει: 3f(x)+f(-x)=2ημ2χ, για κάθε x∈ℛ, να δείξετε ότι η f είναι περιττή
8. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει f(χ+ψ)=χf(x)+ψf(ψ), για κάθε χ,ψR, να δείξετε ότι f(0)=0 και ότι η f είναι άρτια.
9. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει f2(x)=f(x)f(-x), για κάθε x∈ℛ, να δείξετε ότι η f είναι άρτια.
10. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει f2(x)=-f(x)f(-x), για κάθε x∈ℛ, να δείξετε ότι η f είναι περιττή.
11. Έστω συνάρτηση f:RR, μη σταθερή για την οποία ισχύουν f(χψ)=f(x)f(ψ) και f(x+ψ)=f(x)+f(ψ)+2χψ, για κάθε x,ψR. Να αποδείξετε ότι: α)f(0)=0, f(1)=1 και f(-1)=1 β) η f είναι άρτια γ)f(x)=x2, για κάθε xR *ΥΠΟΔΕΙΞΗ:α) χ=ψ=0, χ=ψ=1, χ=1, ψ=-1 β) ψ=-1 γ)f(2x)=2f(x)+2x2, f(2x)=f(x)f(2), f(2)=2f(1)+2=4. Άρα 4f(x)=2f(x)+2x2.*
* **Μ Ο Ν Ο Τ Ο Ν Ι Α Σ Υ Ν Α Ρ Τ Η Σ Η Σ**
	+ Μία συνάρτηση f:ΑΒ λέγεται **γνήσια αύξουσα** στο Α, όταν για κάθε x1, x2A με **x1<x2 ισχύει f(x1) <f(x2)**
	+ Μία συνάρτηση f:ΑΒ λέγεται **γνήσια φθίνουσα** στο Α, όταν για κάθε x1, x2A με **x1<x2 ισχύει f(x1) >f(x2)**

# Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο f(x)=ln(x-1)-e2-x, x∈(1, +∞). **α)** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία **β)** Να δείξετε ότι <1+ln2
2. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με f(x)=ex+x5+x3+x-1, g(x)=2-x-x3-lnx. **α)** Να δείξετε ότι οι f, g είναι γνήσιαμονότονες. **β)** Να λυθούν οι ανισώσεις f(x)>0 και g(x)<0
3. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο f(x)=+ -1. **α)** Να δείξετε ότι η f είναι γνήσια φθίνουσα. **β)** Να λυθεί η εξίσωση 3χ+4χ=5χ. **γ)** Να λυθεί η ανίσωση 3χ+4χ>5χ.
4. Η f:R→R είναι γνήσια μονότονη και διέρχεται από τα σημεία Α(2, 0) και Β(3, 1). **α)** Να δείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα. **β)** Να λυθεί η ανίσωση f(1+f(x))>0.
5. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο f(x)=2x+x. **α)** Να δείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα. **β)** Να λυθεί η ανίσωση -x2>26-2x-5x+6.
6. Έστω συνάρτηση f:R→R με f(x)=x7+7x-7. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα και να λύσετε την ανίσωση f(f(x))<1. ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:*** *είναι f(1)=1.*
7. Έστω συνάρτηση f:R→R με f(x)=x+. **α)** Να δείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα. **β)** Να λυθεί η ανίσωση - >x-x2-1. ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:***  *+x2+x > +2x-1*
8. Έστω συνάρτηση f:R→R γνήσια φθίνουσα. Να δείξετε ότι η g: R→Rμε g(x)=f(x)-x, είναι γνήσια φθίνουσα. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την h(x)=αχ-χ, για κάθε xR και 0<α<1 και να βρείτε το λR, ώστε να ισχύει: -α5λ-20=(λ2-4λ)-(5λ-20).
9. Έστω συνάρτηση f:R→R με f(χ+ψ)=f(x)+f(ψ), για κάθε x, ψR. Αν f(x)>0 για κάθε x>0, να δείξετε ότι: **α)**f(0)=0 **β)** η f είναι περιττή  **γ)** η f είναι γνήσια αύξουσα. ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ: α)*** *χ=ψ=0* ***β)*** *ψ=-χ* ***γ)****λ=*
10. Η f:R→R είναι περιττή και στο χ0 παρουσιάζει μέγιστο. Να αποδείξετε ότι στο –χ0, η f παρουσιάζει ελάχιστο. Αν η f είναι άρτια και στο χ0 παρουσιάζει ελάχιστο, να βρείτε το είδος του ακροτάτου της στο –χ0. ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:****f(-x)=-f(x), f(x)≤f(x0), για κάθε xR.*
11. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με f(x)=2+(g(x)+1)2, για κάθε xR. Αν η γραφική παράσταση της g διέρχεται από το σημείο Α(1, -1), να δείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:****f(1)=2, f(x)≥2.*
12. **α)** Αν οι συναρτήσεις f, g, h είναι γνήσια αύξουσες στο Α και θετικές, για κάθε xA, να δείξετε ότι η φ(χ)=f(x)g(x)- είναι γνήσια αύξουσα στο Α. **β) 1.** Να αποδείξετε ότι η φ(χ)=(χ+1)ex- είναι γνήσια αύξουσα στο [2, +∞) **2.** Να λύσετε στο [2, +∞) την εξίσωση: [-∙ln(λ2ln(3λ))=ln ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:****φ(λ2)=*  - , *φ(3λ)=e3λ(3λ+1) - και = = - .*
13. Μια συνάρτηση f είναι περιττή στο ℛ. Αν η f είναι γνήσια αύξουσα στο [α, β] με α,β>0, να δείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα και στο [-β, -α].
14. Έστω συνάρτηση f, τέτοια ώστε: |f(x)-f(ψ)|≤λ|χ-ψ|, για κάθε χ,ψ∈R, λ∈(0, 1). Να δείξετε ότι η g(x)=x-f(x), είναι γνήσια αύξουσα. ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:*** *είναι -λ≤ ≤λ<1 και =1- >0.*
15. Η γραφική παράσταση μιας γνήσιας μονότονης συνάρτησης f, διέρχεται απο τα σημεία Α(1, 3) και Β(-1, 1).  **α)** Να δείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα **β)** Να λύσετε την ανίσωση f(2-f(2-lnx))<3.
16. Έστω συνάρτηση f, με f(x)=πχ/ef(x), χ∈R.

**α)** Να δείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα **β)** Να λύσετε την ανίσωση: <,χ≠0. ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ: α)*** *έστω f(x1)<f(x2)⇔f(x1)/f(x2)<1⇔<1⇔<<1* ***β)*** *πχ/ef(x)< π1/χ/ef(1/x).*

1. Έστω συνάρτηση f, τέτοια ώστε: (f(x))3+f(x)+ef(x)+2=x3, για κάθε χ∈R. **α)** Να δείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα στο R **β)** Να δείξετε ότι η g(x)=f(2-3x)-f(3+2x), χ∈R είναι γνήσια φθίνουσα στο R. **γ)** Να λύσετε την ανίσωση f(g(x2(x-1)))>f(g(x(4-x))).
2. Έστω συνάρτηση f, τέτοια ώστε: f(x)+ef(x)=x, για κάθε χ∈R. **α)** Να δείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα στο R **β)** Αν η Cf τέμνει τον χ΄χ σε σημείο με τετμημένη χ0=ρ, να δείξετε ότι ρ=1. **γ)** Να δείξετε ότι f(x)<x, για κάθε χ∈R. **δ)** Να βρείτε τις τιμές του α∈R, ώστε: f(2α2-1)+ef(α)=α.
3. Έστω συνάρτηση f, τέτοια ώστε: f(x)=χ+ex-1, χ∈R. **A) 1.** Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία. **2.** Να λύσετε την εξίσωση: ex=1-χ **Β)** Δίνεται η συνάρτηση g:R→R για την οποία ισχύει: g(x)+eg(x) 2x+1, για κάθε χ∈R. **1.**Να δείξετε ότι g(0)=0 **2.** Να δείξετε ότι η g είναι γνήσια αύξουσα στο R **3.** Να βρείτε τις τιμές του χ∈R, ώστε: (gof)(x)>0.
4. Έστω συνάρτηση f, με f(x)=lnx+x-1, x>0. **Α) 1.**Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία **2.** Να λύσετε την εξίσωση f(x)=0 **Β)** Έστω συνάρτηση g με g(x)=(2-x)f(x), x>0 **1.** Να λύσετε την εξίσωση g(x)=0 **2.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία είναι g(x)<0 ή g(x)>0
5. Δίνονται οι συναρτήσεις f,g:R→R για τις οποίες ισχύει: f(-π/2)=f(π/2)=1 και g(x)= , για κάθε χ∈R.**α)** Να δείξετε ότι |g(x)|≤1, για κάθε χ∈R. **β)** Να βρείτε τα ακρότατα της g.
6. Έστω η συνάρτηση f:R\*→Rμε f(x)-f(ψ)=f(x/ψ), για κάθε χ,ψ∈R\*, τέτοια ώστε η εξίσωση f(x)=0 να έχει μοναδική ρίζα. **α)** Να λύσετε την εξίσωση f(x)=0 **β)** Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και f-1(ψ)f-1(x-ψ)=f-1(x), για κάθε χ,ψ∈R. **γ)1.** Να δείξετε ότι f(x)+f(1/x)=0, για κάθε χ∈R\*. **2.** Να λύσετε την εξίσωση f(x)+f(x2+3)=f(x2+1)+f(x+1). ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:a)****f(1)=0****β)*** *αν f(x1)=f(x2), τότε f(x1)-f(x2)=f(x1/x2)=0. Θέτω: f-1(x)=kκαι f-1(ψ)=λ, οπότε χ=f(k) & ψ=f(λ). Είναι x-ψ=f(k)-f(λ)=f(k/λ)⇔f-1(x-ψ)=k/λ=f-1(x)/f-1(ψ)* ***γ)1.*** *χ=1, ψ=χ* ***2.****f(x)-f(x+1)=f(x2+1)-f(x2+3)*
* **Σ Υ Ν Θ Ε Σ Η Σ Υ Ν Α Ρ Τ Η Σ Ε Ω Ν**

## A

## B

## Γ

f

g

gof

x

f(x)

(gof)(x)=g(f(x))

* 1. Δίνονται οι συναρτήσεις f: ΑΒ και g: ΒΓ.

Τότε ορίζεται η συνάρτηση

**(gof): ΑΓ** που λέγεται ***σύνθεση της f με τη g****.*

## A

## B

## Γ

## Δ

f

g

(gof)(x)=g(f(x))

gof

x

f(x)

* 1. Δίνονται οι συναρτήσεις f: ΑΒ και g: ΓΔ με ΒΓ∅

Τότε ορίζεται η συνάρτηση **(gof): ΑΔ** που λέγεται ***σύνθεση της f με τη g.***

*ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:* για να έχει νόημα η σύνθεση της f με τη g, θα πρέπει η εικόνα f(x) του x μέσω της f να ανήκει στο πεδίο ορισμού Γ της g. Οπότε το πεδίο ορισμού της (gof) είναι το **Αgof={xAf=A και f(x)Ag=Γ}** και ο τύπος της είναι **(gof)(x) = g(f(x)).**

# Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Δίνονται οι συναρτήσεις, με τύπους f(x)=ημx και g(x)=. Nα εξετάσετε αν ορίζονται οι συναρτήσεις fog και gof.
2. Δίνονται οι συναρτήσεις, με τύπους: f(x)= και g(x)=. Να ορισθεί η fog.
3. Δίνεται συνάρτηση f:R→R με f(f(x))+f3(x)=2x+3. **Α)** Να δείξετε ότι η f είναι «1-1» **Β)** Αν f(2x3+x)=f(4-x), να λύσετε την εξίσωση.
4. Αν η f έχει πεδίο ορισμού το [0,6], να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f(x2-2)
5. Nα βρεθεί η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R, αν είναι (fog)(x)=x2+4x-1 και g(x)=x-2.
6. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο f(x)=. Nα βρεθεί ο αR ώστε να ισχύει (fof)(x)=x.
7. Θεωρούμε συνάρτηση f με f(x)=3x-4. Να βρείτε πρωτοβάθμια πολυωνυμική συνάρτηση g, τέτοια ώστε (fog)(g(1))=-10 και fog=gof. ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:*** *είναι: g(x)=αχ+β οπότε f(g(x))=f(αχ+β) και g(f(x))=αf(x)+β*
8. **Α)** Αν η f είναι άρτια στο ℛ και η g είναι περιττή στο ℛ, να δείξετε ότι η fofείναι άρτια και η gog είναι περιττή στο ℛ.

**Β)** Αν η f είναι γνήσια αύξουσα στο ℛ και η g είναι γνήσια φθίνουσα στο ℛ, να δείξετε ότι οι fog και gof είναι γνήσια φθίνουσες στο ℛ.

**Γ)** Αν οι f, g είναι γνήσια αύξουσες ή γνήσια φθίνουσες και οι δυο στο ℛ, τότε να δείξετε ότι οι fog και gofείναι γνήσια αύξουσες στο ℛ.

1. Δίνονται οι συναρτήσεις, με τύπους: f(x)= και g(x)= . Αν για τη συνάρτηση h ισχύει hof =g, να βρεθεί ο τύπος της h. ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:*** *είναι: h(f(x))=g(x) h(x-)=x4+=(x2+)2-2= .*
2. Μια βιομηχανία παρασκευάζει αναψυκτικά χρησιμοποιώντας πορτοκάλια των οποίων το κόστος ανά κιλό είναι α=2t+100 EURO, όπου t[0,5] είναι ο χρόνος σε έτη από την 1/1/1999. Το κόστος παρασκευής κάθε αναψυκτικού είναι β=30lnα+10. Να προσδιορίσετε το κόστος παρασκευής κάθε αναψυκτικού σαν συνάρτηση του χρόνου.
3. Να προσδιορίσετε την συνάρτηση f για την οποία ισχύει f(x+1)=x2+x+1, για κάθε xR. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι f(x)+f(x+1)=2(x2+1).
4. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να ορίσετε (αν γίνεται) τις fog, gof, fof, gog **α)**f(x)= , g(x)=ln2x+lnx+2 **β)** f(x)= , g(x)=
5. Αν το πεδίο ορισμού της f είναι το [-2,11], να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης με τύπο f(x2-3x+1).
6. **Α)** Αν οι f, g έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας τότε οι fog και gof είναι γνήσια αύξουσες **Β)** Αν οι f, g έχουν διάφορο είδος μονοτονίας τότε οι fog και gof είναι γνήσια φθίνουσες **Γ)** Αν οι f, g είναι γνήσια μονότονες τότε οι fof και gog είναι γνήσια αύξουσες
7. Ένα εργοστάσιο κατασκευάζει ψησταριές. Σε t ώρες λειτουργίας κατασκευάζονται f(t)=30t-t2 ψησταριές, όπου t[0,8]. Έστω ότι το κόστος κατασκευής x συσκευών είναι Κ(x)=1+0,005x χιλ. EURO. **α)** Να εκφράσετε το κόστος της κατασκευής σαν συνάρτηση του χρόνου λειτουργίας του εργοστασίου. **β)** Να βρείτε το κόστος της κατασκευής αν το εργοστάσιο λειτουργήσει 4 ώρες. Πόσες ψησταριές θα κατασκευάσει τότε;
8. Αν για την συνάρτηση f:RR ισχύει f(f(x))=3x-2, για κάθε xR, να δείξετε ότι είναι f(1)=1.

***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:*** *είναι: f(f(f(x)))=3f(x)-2f(3x-2)=3f(x)-2f(1)=3f(1)-2*

1. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g τέτοιες ώστε να ισχύει f(x)+f(3-2x)=2g(x), για κάθε xR. **α)** Να δείξετε οτι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο **β)** Αν για κάθε xR ισχύει f(x)+2f(1-x)=x2-x, να βρεθούν οι τύποι των f, g και το κοινό σημείο των Cf και Cg.  ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:α)****f(1)=g(1)*
2. Έστω συνάρτηση f:R⟶R, με την ιδιότητα χ[f(x)+f(-x)+2]+2f(-x)=0, για κάθε xR. **α)** Να δείξετε ότι η f είναι περιττή **β)** Να βρείτε τον τύπο της f
3. Έστω συνάρτηση f:(0, +∞)⟶R, με f≤lnx≤f(x)-1, για κάθε x>0. **α)** Να βρείτε τον τύπο της f **β)** Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f.
4. Δίνεται συνάρτηση f με f(χ)+χ≤χ2≤f(χ+1)-χ, για κάθε xR. Να βρείτε: **α)** τον τύπο της f **β)** το σύνολο τιμών της f
5. Έστω συνάρτηση f:R⟶R, με την ιδιότητα f(χ+ψ)=f(x)-f(ψ), για κάθε x,ψR. Να δείξετε ότι: **α)**f(0)=0 **β)**f(x)=0, για κάθε xR.
6. Να βρεθούν οι συναρτήσεις f:R⟶R, με την ιδιότητα: **α)** f(χ+ψ)+2f(χ-ψ)+f(x)+2f(ψ)=4χ-ψ **β)**f(x)f(ψ)+1=f(x)+f(ψ)+χψ, για κάθε x,ψR.
7. Έστω συνάρτηση f:R⟶R, με f(0)=1 και f(x+ψ)≤exf(ψ), για κάθε x,ψR. Να δείξετε ότι f(x)=ex, για κάθε xR.
8. Έστω συνάρτηση f:R⟶R, με την ιδιότητα f(χψ)+f(x)+f(ψ)χψ+χ+ψ, για κάθε x,ψR. **α)** Να προσδιοριστεί η συνάρτηση f **β)** Να βρεθούν τα κοινά σημεία των Cg, Ch, όπου g(x)=f2(x)+ και h(x)=f(x)+ , xR. ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:α)*** *αν (χ, ψ) το κοινό σημείο, τότε:ψ=f(x)+ , ψ=f2(x)+ = -2= f(x)+ , οπότε ω2-ω-2=0.*
9. Δίνεται συνάρτηση f:R⟶R, με την ιδιότητα (fof)(x)=4-x, για κάθε xR. Να δείξετε ότι: **α)**f(2)=2 **β)**f(x)+f(4-x)=4, για κάθε xR **γ)** η Cf έχει κέντρο συμμετρίας το Κ(2, 2). ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ: α)****f(f(f(x)))=4-f(x)* ***γ)****πρέπει για 2-χ, 2+χ, xR να ισχύει ότι το (0, 2) είναι μέσον του τμήματος ΑΒ, με Α(2-χ, f(2-x)) και Β(2+x, f(2+x)).*
10. Δίνονται οι συναρτήσεις f,g:R⟶R, με (fog)(x)=x2-3x+4, για κάθε xR και (gof)(2)=2. Να δείξετε ότι οι Cf, Cg ΄χουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο. ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:****f(g(f(x)))=f2(x)-3f(x)+4, οπότε f(g(f(2)))= f2(2)-3f(2)+4⟺f(2)= f2(2)-3f(2)+4*
11. Έστω η συνάρτηση f:R⟶R, με την ιδιότητα (fofof)(x)=-x, για κάθε xR. Να δείξετε ότι η f είναι περιττή. ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:****f(f(f(x)))=-x⟺f(f(f(f(x))))=-f(x)*
12. Έστω η συνάρτηση f:R⟶R, με (fof)(x)=4x-3 και (fofof)(x)=8x+9, για κάθε xR. Να βρείτε τον τύπο της f. ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:****f(f(x))=4x-3, f(f(f(x)))=8x+9, οπότε f(4x-3)= 8x+9.*
13. Δίνονται οι συναρτήσεις f,g:R⟶R, με g(0)=0 και 2f(x)+f(1-ψ)+g(x)-g(ψ)=3(χ+1)2-6ψ, για κάθε x,ψR. Να αποδείξετε ότι: **α)** 2f(x)+f(1-x)=3(x+1)2-6x, για κάθε xR. **β)** f(x)=x2+2x, για κάθε xR. **γ)** οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες. ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:α)*** *όπου ψ θέτω το χ* ***β)*** *όπου χ θέτω το 1-χ*
14. Δίνεται συνάρτηση f:R⟶R, με την ιδιότητα (fof)(x)=xf(x), για κάθε xR. Να βρεθεί το f(0).

***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:****f(f(0))=0, f(f(f(x)))=f(x)f(f(x))=xf2(x)⇒f(f(f(0)))=0, f(f(f(0)))=f(0).*

* **Σ Υ Ν Α Ρ Τ Η Σ Η ¨1 – 1¨ (ένα προς ένα)**

Μία συνάρτηση f: ΑΒ είναι ¨1-1¨ όταν κάθε xA (πρότυπο) αντιστοιχεί σε ένα μόνο ψ= f(x)Β (εικόνα), δηλαδή για x1x2 να ισχύει f(x1)f(x2)

*Για τις ασκήσεις* σύμφωνα με τη μέθοδο της αντιθετοαντιστροφής, αρκεί να δείξουμε ότι: αν είναι f(x1)=f(x2)τότε ισχύει x1= x2.

Επίσης μπορούμε να χρησιμοποιούμε και τη μονοτονία για να δείχνουμε ότι μία συνάρτηση είναι ¨1-1¨. Αποδεικνύεται ότι, αν μία συνάρτηση είναι γνήσια μονότονη τότε είναι και ¨1-1¨.

# Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση με τύπο f(x)= είναι ¨1-1¨

**α)** Είναι η συνάρτηση με τύπο f(x)=lnx ¨1-1¨;

 **β)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση με τύπο g(x)=ln(1-lnx) είναι ¨1-1¨

1. Θεωρούμε συνάρτηση f η οποία είναι ¨1-1¨ και τέτοια ώστε να ισχύει για κάθε xR,f(x)f(1-x)=f(αx+β). Να δείξετε ότι α=0 και f(1-β)=1

***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:*** *θέτω όπου x το 1-x.Βρίσκω τα f(0), f(1) και f(1/2)*

1. **α)** Αν οι συναρτήσεις f, g: RR είναι «1-1», να δείξετε ότι η gof είναι «1-1» **β)** Αν η συνάρτηση f: RR είναι «1-1», να δείξετε ότι η συνάρτηση g(x)=(f(x))3+2f(x)-3, είναι «1-1».
2. Αν για την f ισχύει: f(f(x))=3f(x)+ex-2, για κάθε xR, τότε: **α)** να δείξετε ότι η f είναι «1-1» **β)** να λύσετε την εξίσωση f(x2-1)=f(x+1)
3. **α)** Να λύσετε την εξίσωση: ex+x=1 **β)** Να λύσετε την ανίσωση: ex+x>1
4. Η συνάρτηση f ικανοποιεί τη σχέση: f(f(x))+f3(x)=2x+3, xR **α)** να δείξετε ότι η f είναι «1-1» **β)** να λύσετε την εξίσωση f(2x3+x)=f(4-x)
5. Αν για την f ισχύει: 2f(1-x)+1=xf(x), για κάθε xR, να βρείτε τον τύπο της f και τα ακρότατα της f, αν υπάρxουν.
6. Δίνεται η συνάρτηση f με (fof)(x)-2x=3-f3(x), για κάθε xR. **α)** Να δείξετε ότι η f είναι «1-1» **β)** Να λύσετε την εξίσωση f(2x3+x)=f(4-x)
7. Έστω f(f(x))=x+f(x), για κάθε xR. Να αποδείξετε ότι: **α)** η f είναι «1-1» **β)**f(0)=0 **γ)**f(f(x)-x)=x, για κάθε xR. ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:****f(f(0))=f(0)⟺f(0)=0. Θέτω όπου χ το f-1(x).*
8. Έστω οι συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύει f(x)+f(2-x)=2g(x), για κάθε xR.ln[1+f(x)]=x2+ln[1-f(x)]για κάθε xR. **α)** Να αποδείξετε ότι οι Cf, Cg έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο. **β)** Αν επιπλέον ισχύει: f(1+ex)=e2x+ex, για κάθε xR, να βρείτε τους τύπους των f, g και το κοινό σημείο των Cf, Cg  ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:α)*** *f(1)=g(1).****β)*** *θέτω w=1+ex*
9. Έστω η συνάρτηση f, για την οποία ισχύει: ln[1+f(x)]=x2+ln[1-f(x)]για κάθε xR. **Α) 1.** Να δείξετε ότι |f(x)|<1, για κάθε xR **2.**Nα βρείτε την f **B)** Έστω επιπλέον η g(x)=. **1.**Να ορίσετε την w=fog **2.** Να δείξετε ότι η w αντιστρέφεται και να βρείτε την w-1.
* **Α Ν Τ Ι Σ Τ Ρ Ο Φ Η Σ Υ Ν Α Ρ Τ Η Σ Η**

**A**

x= f -1 (ψ)

ψ=f(x)

f

f-1

**B**

Όταν μια συνάρτηση f: ΑΒ είναι ¨1-1¨ τότε ορίζεται και η αντίστροφή της συνάρτησηf -1 : ΒΑ, που αντιστοιχεί ένα στοιχείο ψ****Β σε ένα μόνο xA.

 Είναι f(x)=ψf–1(f(x))= f–1(ψ) f–1(ψ) = x. Παρατηρούμε λοιπόν ότι: αν το σημείο Μ(x,ψ) ανήκει στη γραφική παράσταση της f, τότε το σημείο Μ΄(ψ,x) ανήκει στη γραφική παράσταση της f–1. Τα σημεία όμως Μ(x,ψ) και Μ΄(ψ,x) είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία ψ=x (διχοτόμος 1ου – 3ου τεταρτημορίου). **Άρα οι γραφικές παραστάσεις των f και f –1 είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία ψ=x.** Παράδειγμα αποτελούν οι γραφικές παραστάσεις της εκθετικής και της λογαριθμικής συνάρτησης.

# Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. Να βρεθεί που ορίζεται η αντίστροφη της συνάρτησης με τύπο f(x)=2+ καθώς και ο τύπος της αντίστροφης.

***Α π ό δ ε ι ξ η*: α)Πεδίο ορισμού:** πρέπει x-3x3, οπότε Αf=[3, +)

**β) ¨1-1¨:**  Έστω x1,x2[3, +) με f(x1)=f(x2) 2+=2+=x1-3=x2-3****x1=x2. Άρα η f είναι ¨1-1¨.

**γ) Σύνολο τιμών:** θέτω f(x)=ψψ=2+ψ-2= (1). Πρέπει ψ-20  ψ2. Η (1) (ψ-2)2+3=x (2). Άρα το σύνολο τιμών είναι f(A)=[2, +)

**δ) Τύπος της f–1:** λύνουμε την εξίσωση f(x)=ψ ως προς x, όπως η (2) και θέτουμε όπου x το ψ και όπου ψ το x, δηλαδή ψ=(x-2)2+3.

Άρα f -1 : f(A)=[2, +)Αf=[3, +) με f–1(x) =(x-2)2+3.

1. Δίνεται η συνάρτηση f:[3,6] R, με f(x)=. Η f αντιστρέφεται; Αν όχι να βρείτε κατάλληλο σύνολο αφίξεως ώστε η f να αντιστρέφεται και να βρεθεί η αντίστροφή της.
2. Δίνεται η f(x)=(x+lnx)(ex+2010), x∈(1, +∞). Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
3. Δίνεται η συνάρτηση f:RR, με f(x)=(α-1)x+2β-1, α,βR. Να βρεθεί για ποιες τιμές του α είναι γνήσια μονότονη. Να βρεθούν επίσης οι τιμές των α,βR ώστε να υπάρχει η f –1 και να ισχύει f –1=f.
4. Να εξετάσετε αν οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι «1-1» και για όσες είναι να βρείτε την f-1

**α)**f(χ)=χ2+x+1 **β)**f(x)=(ex-1)(x11-1) **γ)**f(x)= **δ)**f(x)= **ε)** f(x)=x2+4x+5, x∈[-1, 5] **στ)**f(x)= **ζ)**f(x)= , x∈(2, 4] **η)**f(x)=

1. Δίνεται η συνάρτηση f:RR, με f(x)=. Να βρεθεί ο λR, ώστε να υπάρχει η αντίστροφή της και να βρεθεί.
2. Να βρεθεί αν υπάρχει η αντίστροφη της f(x)=. ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ: \*****⟺* **\****⟺⟺⟺*
3. Δίνεται η συνάρτηση f: RR, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με ένα ακριβώς στοιχείο της στήλης Β

|  |  |
| --- | --- |
| Στήλη Α | Στηλη Β |
| f-1(2)+f-1(-2) | 5 |
| f-1(-2)-f(-3) | 3 |
| f(3)+f-1(0) | -1 |

1. Δίνεται η συνάρτηση f:RR για την οποία ισχύει f(f(x))=x+f(x), για κάθε xR. Να δείξετε ότι: **α)** η f είναι ¨1-1¨ **β)**f(0)=0 **γ)** αν το σύνολο τιμών της f είναι το R, τότε ισχύει f(f(x)-x)=x, για κάθε xR.

***ΥΠΟΔΕΙΞΗ: γ)*** *επειδή το σύνολο τιμών της f είναι το R, για κάθε xRθα υπάρχει ωR, τέτοιο ώστε f(x)=ω. Είναι f(ω)=x+ωf(ω) -ω=x.*

1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f:RR για την οποία ισχύει f(f(x))+x=0, για κάθε xR είναι ¨1-1¨, αλλά όχι άρτια.

***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:*** *αν η f είναι άρτια, τότε f(-x)=f(x)f(f(-x))=f(f(x))=-x και f(f(-x))=x*

1. Δίνεται η συνάρτηση f:RR που είναι γνήσια αύξουσα. Αν ισχύει f(f(x))=x, για κάθεxR, να δείξετε ότι f(x)=x, για κάθε xR.

***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:*** *έστω ότι υπάρχειωR, τέτοιο ώστε f(ω)ω και έστω ότι f(ω)>ω .*

1. Δίνεται η συνάρτηση f:A[0,+), με f(x)=ln. **α**)Να δείξετε ότι Α=[0,1) **β)** Να δείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφή της και να βρεθεί.
2. Δίνεται η f(x)=x+. Να δείξετε ότι **α)**f(x)>0, για κάθε xR. **β)** η f είναι «1-1»
3. Δίνεται η f(x)= . **α)** Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f -1  **β)** Να βρείτε τα κοινά σημεία των Cf, Cf -1
4. Αν η συνάρτηση f:RR είναι «1-1» και περιττή, να δείξετε ότι η f -1:f(R)R, είναι περιττή. ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:****f(-x)= -f(x), για κάθε xR. f(x)=ψ ⟺x=f -1(ψ)⟺f(-x)=f(-f -1(ψ))⟺ -ψ=f(-f -1(ψ))⟺ f -1(-ψ)= -f -1(ψ)*
5. Δίνεται η συνάρτηση f:RR με f(x)+f3(x)=x+x3+x5, για κάθε xR. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται. ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:*** *έστω ότι f(x1)=f(x2)⟺f3(x1)=f3(x2).*
6. Δίνεται η συνάρτηση f:RR με f(f(x))=-x, για κάθε xR. Να αποδείξετε ότι: **α)**f(R)=R **β)** Η f είναι ¨1-1¨ **γ)** Η f δεν είναι γνήσια μονότονη **δ)** Η f είναι περιττή **ε)**f-1=f **στ)**f(0)=0.

***ΥΠΟΔΕΙΞΗ: α)*** *έστω ψ∈R. Αρκεί να υπάρχει χ∈R τέτοιο ώστε f(x)=ψ⟺f(f(x))=f(ψ), γιατί η f είναι συνάρτηση ⟺ χ=-f(ψ)∈R.* ***β)*** *αν f(x1)=f(x2)⟺f(f(x1))=f(f(x2))* ***γ)*** *έστω ότι η f είναι γνήσια αύξουσα, τότε για χ1<χ2 είναι f(x1)<f(x2)⟺f(f(x1))<f(f(x2)) ⟺ χ1>χ2, άτοπο.* ***δ)****f(f(f(x)))=-f(x)* ***ε)****f(f(f-1(x)))=f-1(x)* ***στ)****f(0)=-f(0).*

1. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο f(x)=x3+x-1. Nα αποδείξετε ότι η f είναι ¨1-1¨ και να λύσετε την εξίσωση: f(x)=f–1(x).
2. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο f(x)=2x3+3x+6. **α)** Να δείξετε ότι η f είναι ¨1-1¨ **β)** Να βρεθεί το xR ώστε: 1) f -1(x)=1 2) f -1(x)=0 **γ)** Αν f -1(28)=α, να βρεθεί το αR
3. Δίνονται οι f, g: RR με f(R)=R και (fof+gof)(x)=x, για κάθε xR. Να αποδείξετε ότι: **α)** Η f αντιστρέφεται στο R **β)** Ισχύει f–1(x)=f(x)+g(x),για κάθε xR.  ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ: α)****f(x1)=f(x2)* ***β)****f(f(f-1(x)))+ g(g(g-1(x)))= f-1(x)*
4. Θεωρούμε τη συνάρτηση f τέτοια ώστε: f(x2)-[f(x)]2, για κάθε xR. Nα υπολογίσετε τα f(0), f(1) και να αποδείξετε ότι η f δεν αντιστρέφεται.

***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:*** *είναι 4f(0)-4f2(0)1(2f(0)-1)20*

1. Θεωρούμε τη συνάρτηση f τέτοια ώστε: f(f(x))=x2-x+1, για κάθε xR. Nα αποδείξετε ότι f(1)=1 και η συνάρτηση g(x)=x2-xf(x)+1 δεν αντιστρέφεται.

***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:*** *είναι f(f(1))=1f(f(f(1)))=f(1). Θέτω x=f(1).*

1. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους f(x)=+2, g(x)=ln(3x-4). Να προσδιορίσετε τις f –1 και g-1 και να βρείτε τις (f –1οg-1) και (g-1οf –1).
2. Δίνεται η συνάρτηση f με f(x)=x3+x+2. **α)** Να δείξτε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα. **β)** Να λύσετε τις εξισώσεις: f(x)=12 και f-1(x)=-2. **γ)** Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f-1 με τους άξονες και με την ευθεία ψ=χ. **δ)** Να λύσετε την εξίσωση: (2-ημ2χ)3=ημ3χ+ημ2χ+ημχ-2. **ε)** Να λύσετε τις ανισώσεις: f-1(x)<3, f-1(x+1)≥x+5.
3. Δίνεται συνάρτηση f:RR, ώστε να ισχύει f(f(x))=x9, για κάθε xℝ. Να δείξετε ότι: **α)** η f είναι «1-1» **β)** αν f(2)=8, τότε η εξίσωση f(x)=2 έχει μοναδική λύση την x= **γ)** για κάθε αℝ η ευθεία ψ=α έχει ακριβώς ένα μόνο κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της f και το σύνολο τιμών της f είναι το f=ℝ.
4. Δίνεται συνάρτηση f:RR, ώστε να ισχύει f(f(x))=f(x)+2x-2, για κάθε xℝ. **α)** Να δείξετε ότι η f είναι «1-1» και να βρείτε το f(1) **β)** Αν το σύνολο τιμών της f είναι το ℝ και f(2)=3, τότε: (1) να δείξετε ότι f(x)=x-2+2f-1(x), για κάθε xℝ. (2) να βρείτε το f(3) και να λύσετε την εξίσωση f(x)=2.
5. Δίνεται συνάρτηση f:RR, ώστε να ισχύει ef(x)+f(x)=x, για κάθε xℝ. **α)** Να δείξετε ότι η f είναι «1-1» και να βρείτε την f-1  **β)** Να υπολογίσετε τους αριθμούς f(1), f(2+ln2), f **γ)** Να λύσετε την εξίσωση f(x)=0 **δ)** Να λύσετε την εξίσωση ex-4-e2x+1=x+5 **ε)** Να λύσετε την ανίσωση -(x+6)≥e6-x2
6. Αν f, f-1 ορίζονται στο R και η f-1 είναι περιττή, να αποδείξετε ότι και η f είναι περιττή. ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:****f-1(-x)=-f-1(x)⟺f-1(-f(x))=-x⟺ -f(x)=f(-x)*
7. Δίνεται συνάρτηση f με (fof)(x)=4x-9, για κάθε xℝ. **α)** Να δείξετε ότι η f είναι «1-1» **β)** Να βρείτε το αℝ ώστε f(α)=α. ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:a)*** *αν f(x1)=f(x2)⟺f(f(x1))=f(f(x2))* ***β)****f(α)=α ⟺f(f(α))=f(α)⟹ α=3. Για χ=3, έχω f(f(3))=3, οπότε f(3)=3⟹f(f(3))=f(3)⟹f(3)=3.*
8. **α)** Έστω f:A→ℝ γνήσια αύξουσα, με Β=Α∩f(A)≠∅. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις f(x)=f-1(x) και f(x)=x είναι ισοδύναμες, για κάθε xΒ. **β)** Αν f(x)=χ5+χ3+χ, xℝ να δείξετε ότι ορίζεται η f-1 και να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των fκαι f-1. ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:a)*** *αν f(x)>x, τότε f(f(x))>f(x)⟺x>f(x), άτοπο.*
9. Δίνεται συνάρτηση f:RR, με f(R)=R και (fof)(x)=x, για κάθε xℝ. Αν η g(x)=f(x)+x,xℝ είναι αντιστρέψιμη, τότε: **α)** να βρείτε τις f, g**β)** να δείξετε ότι η fog είναι αντιστρέψιμη και ότι (fog)-1=g-1of-1. ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:a)****g(f(x))=f(f(x))+f(x)=g(x), οπότε f(x)=x και g(x)=2x.****β)****f(g(x))=2x*
10. Δίνεται συνάρτηση f:RR, με f(R)=R γνήσια μονότονη, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από σημεία Α(3, 2) και Β(5, 9). **α)** Να λύσετε την εξίσωση f(2+f-1(x2+x))=9 **β)** Να λύσετε την ανίσωση f(f-1(x2-8x)-2)<2 ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:a)****f(3)=2<9=f(5), 2+f-1(x2+x)=5* ***β)****f-1(x2-8x)-2<3*
11. Δίνεται συνάρτηση f:R\*R, ώστε να ισχύει f(x)-f(ψ)=f(x/ψ), για κάθε x,ψℝ\*. Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει μια ακριβώς ρίζα, τότε: **α)** Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται **β)** Να λύσετε την εξίσωση f(x)+f(x2+3)=f(x2+1)+f(x+1) **γ)** Αν επιπλέον είναι f(x)>0, για κάθε x>1, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα στο (0, +∞). ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:a)*** *αν ρ η ρίζα, τότε f(1)=0 και αν f(x1)=f(x2) τότε x1=x2.* ***β)****f = f* ***γ)*** *χ1/χ2>1*
12. Δίνεται συνάρτηση f:RR, με f(R)=R και f(x)=x3+8x-8. **α)** Να δείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα **β)** Να λύσετε την ανίσωση f(f(x))>1 **γ)** Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται **δ)** Να υπολογίσετε την τιμή f-1(-8) **ε)** Να λύσετε την ανίσωση f-1(x)≥2.  ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:****f(1)=1, f-1(-8)=c⟺ f(c)=-8⟺ c=0*
13. Δίνεται συνάρτηση f:RR, με f(x)+f(ψ)=f(xψ), για κάθε x,ψℝ και η f είναι αντιστρέψιμή στο R. Να δείξετε ότι f-1(x+ψ)=f-1(x)f-1(ψ), για κάθε x,ψℝ. ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:****f(x)=k⟺f-1(k)=x, f(ψ)=z⟺f-1(z)=ψ. f-1(k+z)=f-1(f(x)+f(ψ))=f-1(f(xψ))=xψ*
14. Αν f:RR, με f(χ+ψ)= f(x)+f(ψ), για κάθε x,ψℝ, να αποδείξετε ότι: **α)**f(0)=0 **β)** η f είναι περιττή **γ)** Αν η f έχει μοναδική ρίζα την χ0=0, τότε η f είναι 1-1. ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:****f(χ1-χ2)=f(x1)+f(-x2)=f(x1)-f(x2).*
15. Αν f(f(x))=3x+2, για κάθε xℝ, να δείξετε ότι: **α)** η f είναι 1-1 **β)** 3f-1(x)=f(x)-2, για κάθε xℝ **γ)**f(3x+2)=3f(x)+2, για κάθε xℝ.
16. Δίνεται η f(x)=, x≥0. **α)** Να δείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα και να βρείτε το f-1() **β)** Να λυθεί η ανίσωση <, x≥0 **γ)** Να δείξετε ότι η g(x)=∙x-f(x), x≥0 δεν είναι «1-1» **δ)** Δίνεται η συνάρτηση h:[0, +∞)→R με h(x)≥0, για κάθε x≥0. Αν γνωρίζετε ότι h(h(x))=h(x)+, x≥0 **1.** Να δείξετε ότι η h αντιστρέφεται **2.** Να δείξετε ότι h(0)=0 **3.**Να λύσετε την εξίσωση h(h(x)+x)=0 ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:a)****f-1()=c⟺f(c)=⟺c=1* ***β)****<* ***γ)****g(0)=g(1)=0* ***δ) 1.*** *έστω h(x1)=h(x2)⟺h(h(x1))=h(h(x2))⟺h(x1)+=h(x2)+* ***2.****h(h(0))=h(0)* ***3.****h(h(x)+x)=h(0)⟺h(x)=-x≥0 ⟺x≤0. Άρα χ=0.*
17. Αν f:Q\*R, με f(χψ)= f(x)+f(ψ), για κάθε x,ψQ\*, να αποδείξετε ότι: **α)**f(1)=0 **β)**f(1/x)=-f(x), για κάθε xQ\* **γ)** Αν ο μοναδικός ρητός για τον οποίο ισχύει f(ρ)=0 είναι ρ=1, τότε η f είναι 1-1 **δ)** Αν η f είναι 1-1 να δείξετε ότι δεν υπάρχει ρητός ρ τέτοιος ώστε 2f(ρ)=f(2). ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:a)*** *χ=ψ=1* ***β)*** *ψ=1/χ* ***γ)****f(x1/x2)=f(x1)+f(1/x2)= f(x1)-f(x2)* ***δ)*** *ρ2=2*
18. Αν f:RR, με f(χψ)= f(x)+f(ψ), για κάθε x,ψℝ, να αποδείξετε ότι: **α)**f(1)=0 **β)**f(x/ψ)=f(x)-f(ψ), για κάθε x,ψℝ, ψ≠0 **γ)** Αν f(x)>0 για κάθε x>1, να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο (0, +∞). ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:β)****ψ=1/χ, οπότε f(1/x)=-f(x). f(x∙)=f(x)-f(ψ).* ***γ)****f(x1/x2)=f(x1)-f(x2)*
19. Αν f:(0+∞)R, με f(χ/ψ)= f(x)-f(ψ), για κάθε x,ψ>0, να αποδείξετε ότι: **α)**f(1)=0 **β)**f(xψ)=f(x)+f(ψ), για κάθε x,ψ>0 **γ)** Αν επιπλέον ισχύει η ισοδυναμία f(x)=0 ⟺x=1, να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και ότι δεν υπάρχει θετικός ρητός κ, ώστε 2f(κ)=f(3). ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:****f(1/ψ)=-f(ψ), για κάθε ψ>0. Για ψ το 1/ψ.*
20. **Α)** Να λυθεί η εξίσωση: -x=1. **B)** Δίνεται συνάρτηση f, ορισμένη στοℝ με-f(x)=x+1, για κάθε xℝ.**α)** Να δείξετε ότι f(0)=0 **β)** Να δείξετε ότι η f είναι γνήσια φθίνουσα στο ℝ **γ)** Να λυθούν οι ανισώσεις: 2f(x)(f(x)+6)>1 και f(2f(x)(16f(x)-3))>f(16). ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:****χ=0. -f(0)=1. Αν f(x1)<f(x2), τότε χ1>χ2.*
21. Αν f:RR, με (fof)(x)=4x+9, για κάθε xℝ, να αποδείξετε ότι: **α)** η f αντιστρέφεται **β)**f-1(x)= [f(x)-9], για κάθε xℝ **γ)**f(4x+9)=4f(x)+9, για κάθε xℝ **δ)** υπάρχει χ0ℝ, ώστε f(x0)=x0. ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ: a)****αν f(x1)=f(x2)⇔f(f(x1))=f(f(x2))* ***β)*** *θέτω όπου χ το f-1(x)* ***γ)****θέτω όπου χ το f(x)* ***δ)****χ0=-3*
22. Δίνεται η f(x)=lnx+x, x>0 **α)** Να δείξετε ότι η f είναι γνήσια αύξουσα **β)** Να λυθεί η x2+lnx<x
23. Δίνεται ότι f(f(x)=-x, για κάθε xℝ **α)** Να δείξετε ότι η f είναι «1-1» **β)** Να δείξετε ότι η f δεν είναι γνήσια μονότονη **γ)** Να δείξετε ότι η f είναι περιττή
24. Η f είναι γνήσια μονότονη στο R και διέρχεται από τα σημεία Α(1, 2), Β(3, -2) **α)** Να δείξετε ότι f(1)=2, f(3)=-2 **β)** Να βρείτε την μονοτονία της f **γ)** Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται **δ)** Να λυθεί η f(3x-1)+2<0 **ε)** Να λυθεί η f(ex-1)=2 **στ)** Να βρεθούν οι f-1(2), f-1(-2) **ζ)** Να λυθεί η f(-2+f-1(x+2))=2