Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

**1.** Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

**α.  β.  γ. **

**δ.  ε.  στ. **

**ζ.  η.  θ. **

1. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

**α. **β. γ. **

1. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

**α.  β.  γ. **

**δ.  ε. **

**4.** Βρείτε το λR ώστε να ισχύει: ****f(x)=kR όπου f(x)=

1. Για τις διάφορες τιμές του λR βρείτε το ****f(x) όπου f(x)=
2. Βρείτε τα κ,λR αν **=-**2
3. Αν **=**2 και **=**k, να βρεθεί το P(x) και το kR
4. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια: **α)** **β)** **γ)**() **δ)**()
5. Αν ισχύει: (2x+3)f(x)ex+1, για κάθε xR, να βρεθεί το f(x) και το ****.
6. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια: **α)** **β)**
7. Αν **=**5, να βρεθεί το f(x).
8. Να βρείτε τα όρια: **α)** **β)** **γ)** **δ)**

1. Να βρείτε τα όρια: **α)** **β)** **γ)**, α>0
2. Αν (x2+1)f(x)x4εφ, για κάθε xR\* , να βρεθεί το f(x) και το



1. Αν x3 ημ(x+1)f(x) να βρεθούν τα f(x) και 
2. Αν , για κάθε xR\* , να βρεθεί το f(x)
3. Αν **=**4, να βρεθεί το f(x)
4. Αν xf(x)+f(1-x)=2x+3, για κάθε xR, να βρεθεί το f(x) και το f(x)
5. Αν f(x)+xf(-x)=ημx, για κάθε xR, να βρεθεί το f(x) και το f(x)
6. **α.** Αν υπάρχουν τα όρια (f+g)(x), f(x) και είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε υπάρχει και το g(x). **β.** Αν υπάρχουν τα όρια (f∙g)(x), f(x)≠0και είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε υπάρχει και το g(x).
7. Αν [f(x)+g(x)]=2 και [f(x)∙g(x)]=0, να υπολογίσετε τα όρια: **α.**[f2(x)+g2(x)] **β.** **γ.**|f(x)-g(x)|
8. Να υπολογίσετε το όριο: ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:***
9. Αν υπάρχει στο R το f(x) και xf(x)<ημχ, για κάθε χ≠0, να δείξετε ότι f(x)=1
10. Να υπολογίσετε τα όρια: **α)**[(χ-1)συν ] **β)**
11. **Α.** Έστω συνάρτηση f, τέτοια ώστε: |ημχ|≤f(x)≤|x|, για κάθε χ∈(-π, π). Να δείξετε ότι δεν υπάρχει το όριο: **B.**Έστω συνάρτηση f, τέτοια ώστε:f2(x)+9συν2χ≤6f(x), για κάθε χ∈R. Να δείξετε ότι υπάρχει το f(x).
12. Έστω οι συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύει: f2(x)+g2(x)+συν2χ=2(f(x)ημχ-g(x)συνχ), για κάθε χ∈R. Να υπολογίσετε τα όρια: f(x) και g(x).
13. Αν για τις συναρτήσεις f, gισχύει: f(x)+3g(x)≤0≤6g(x), για κάθε χ≠χ0 και (2f(x)-3g(x))=0, να αποδείξετε ότι: f(x)= g(x)=0.
14. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει: f2(x)(f(x)-2x)=x2(ημ6χ-3f(χ)), για κάθε χ∈R και υπάρχει στο R το  , να βρείτε τα όρια: , , ,  ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:***=
15. Αν  =+∞, να βρείτε την τιμή του λ∈R. ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:*** *αν f(x)= , τότε f(x)= +∞ και =0, οπότε λ=-4. Αν λ=-4, τότε f(x)= +∞*
16. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

**α.** **β.  γ.  δ. **

**ε.  στ.  ζ.  η.**

**θ.**(προσθαφαιρώ 3) **ι.** (θέτω =ω)

**κ.** **λ.** **μ.**

1. Να βρεθούν τα όρια: **α.  β.  γ. **
2. Για τις διάφορες τιμές του λR να βρεθούν τα όρια: **α.  β. **
3. Δίνεται η f(x)= Βρείτε το f(x)
4. Δίνεται η f(x)= Βρείτε το f(x)
5. Δίνεται η f(x)= Βρείτε το f(x)
6. Δίνεται η f(x)= Βρείτε το f(x)
7. Δίνεται η f(x)=. Αν υπάρχουν τα f(x) και f(x),

να βρεθούν τα κ,λR

1. Να βρεθούν τα όρια:

**α.**  **β.**  **γ.  δ. **

1. Να βρεθούν τα όρια: **α.  β.** 

**γ.  δ.**  **ε**. ****

1. Βρείτε το f(x) όπου f(x)= 
2. Δίνεται η f(x)= . Αν υπάρχουν τα f(x), f(x) να δείξετε ότι α+β=2
3. Να βρεθεί ο ν∈ℕ\* αν: **α)** =28 **β)** = 120
4. Βρείτε το , αν α+β+γ=0
5. Να βρεθούν τα α,βR αν =3
6. Δίνεται η f(x)=. Να βρείτε τα α,β∈ℛώστε να υπάρχει το f(x). ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:*** *επειδή* *(χ-1)=0, πρέπει* *(χ3-β)=0*
7. Δίνεται η f(x)=. Να βρείτε το f(x) για λ,μ∈ℛ
8. Δίνεται η f που ικανοποιεί τη σχέση 3f(x+1)-2f(2-x)=x2+14x-5. Να βρείτε το  ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:****θέτω όπου χ τα 1-χ και 2-χ.*
9. **Α)**Να βρείτε τα α,β∈ℛώστε  =1 **Β)**Να βρείτε το α∈ℛώστε να υπάρχει το  **Γ)**Να βρείτε τα α,β∈ℛώστε  =+∞. ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Α)*** *επειδή* *(χ+1)=0, πρέπει* *(αχ2+βχ+3)=0* ***Β)*** *αν α=2, τότε δεν υπάρχει το όριο.* ***Γ)*** *πρέπει* *(3χ2+αχ+β)=0 και 3χ2+αχ+β≥0*
10. Αν f(x)= με α∈ℛ, τότε για τις διάφορες τιμές του α: **α)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f **β)** Να βρείτε το f(x) **γ)** να εξετάσετε αν υπάρχει το (f(x)). ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ: α)*** *αν α<0 το* ℛ*, αν α=0 το* ℛ*\*, αν α>0 το* ℛ*-{±α}* ***β)*** *αν α<0 τότε f(x)=1, αν α=0 τότε f(x)=1,αν α>0 τότε f(x)=0* ***γ)*** *δεν υπάρχει.*
11. Αν ** =2 και (f(x)-2x)=5, να βρείτε το μ∈ℛ, αν  =1. ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:****διαιρώ με χ≠0.*
12. Δίνεται η f(x)=ln , κ>0. **α)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f **β)** Να βρείτε τα όρια **f(x), **f(x) **γ)** Να δείξετε ότι f(x)-lnx>0 και να βρείτε το **[f(x)-lnx]
13. Δίνεται η f, ορισμένη στο (0, +∞), με χf2(x)+f(x)=x2+ και f(x)= α∈ℛ. **α)** Να βρείτε το α **β)**Να υπολογίσετε το  **γ)** Αν γνωρίζετε ότι f(x)>0, με χ>0 και ότι υπάρχει το f(x), να δείξετε ότι f(x)=+∞ ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:γ)*** *επειδή f(x)>0, τότε f(x)=+∞ ή f(x)=κ≥0. Αν f(x)=κ≥0 τότε f2(x)+ =x+ οπότε: =κ2∈ℛ και =+∞, άτοπο.*
14. Να βρεθεί το**f(x), αν ** =+∞
15. Να βρεθεί το όριο: * =l*.

***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:****l=*

1. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το ℛ, για τις οποίες ισχύουν: f(x)<0<g(x) κοντά στο 0 και [f(x)-g(x)]=0. Να δείξετε ότι f(x)=g(x)=0. ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:*** *Θέτω h(x)=f(x)-g(x), οπότε h(χ)=0 και f(x)=h(x)+g(x). Είναι f(x)-g(x)<-g(x)<0.*
2. Να υπολογίσετε τα όρια στις παρακάτω περιπτώσεις: **α)**f(x), όταν ημχ≤χf(x)≤x2+x, για κάθε χ∈ℛ **β)**f(x), όταν |χf(x)|≤|συνχ-1|,για κάθε χ∈ℛ **γ)**f(x), ότανχ-χ2≤ημ(πχ)f(χ)≤χ+χ2, για κάθε χ∈ℛ **δ)****f(x), όταν |f(x)-3|≤(x+1)2, για κάθε χ∈ℛ **ε)**f(x), g(x) όταν x2(f(x))2+(g(x))2≤x4ημ2, για κάθε χ≠0.
3. Ανγιατηνfισχύει: f(x)-x≤x2≤f(x-1)+x, για κάθε χ∈ℛ **α)**Να βρεθεί ο τύπος της f **β)**Να υπολογιστεί το όριο 
4. Αν f2(x)+2f(x)+συν2χ≤0, για κάθε χ∈ℛ, να αποδείξετε ότι f(x)=-1.
5. Δίνεται η f, ορισμένη στο ℛ, για την οποία ισχύει: 3χ≤(x2-4)f(x)+9x≤6x2-11x+16, για κάθε χ∈(1, 3). Να υπολογίσετε τα όρια: **α)** f(x) **β)** 
6. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το ℛ, για τις οποίες ισχύουν: g(x)+3f(x)<0<2g(x) κοντά στο 0 και [3f(x)-2g(x)]=0. Να δείξετε ότι f(x)=g(x)=0. ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:*** *3f(x)-2g(x)<-3g(x)<-g(x)⇒>g(x) >0. Θέτω h(x)=3f(x)-2g(x), οπότε h(χ)=0 και 3f(x)=h(x)+2g(x).*
7. Έστω η f με πεδίο ορισμού το ℛ, για την οποία ισχύει: χ+|ημχ|≤f(χ)≤|χ|+χ, για κάθε χ∈ℛ. Να βρείτε το f(x) και να δείξετε ότι δεν υπάρχει το .
8. Έστω η f με 2≤f(x)≤x+2, για κάθε χ≥0. Να υπολογίσετε τα: ,
9. **Α)** Αν (f2(x)+g2(x))=0, να δείξετε ότι f(x)= g(x)=0. **Β)** Αν για την f ισχύει f2(x)+ συν2χ≤2f(x),για κάθε χ∈ℛ, να βρείτε το f(x). ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Α)****f2(x)+g2(x)≥f2(x)≥0* ***Β)*** *(f(x)-1)2≤ημ2χ*
10. Δίνονται οι f, g:R→R με [f(x)+g(x)]=0 και [f(x)∙g(x)]=0. Να δείξετε ότι ισχύουνf(x)=g(x)=0. ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:****[f(x)+g(x)]2=0⇒[f2(x)+g2(x)]=0. Είναι f2(x)+g2(x)>f2(x)>0.*
11. Αν για την f ισχύει χ2ημ ≤x∙f(x), κοντά στο 0 και γνωρίζετε ότι υπάρχει το f(x)=α∈ℛ, να βρείτε το α. ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:*** *διακρίνω περιπτώσεις για το χ*
12. Αν για την f ισχύει f(x)> , για κάθε χ∈ℛ, να βρείτε το f(x). ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:****=+∞ και 0<< .*
13. Αν (g(x)(x-1))=2 και  =5, να βρείτε το (g(x)f(x)). ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:*** *θέτω φ(χ)=g(x)(x-1) και σ(χ)=*
14. Αν =-1, να βρείτε το  .
15. Αν (5f(x)+2g(x))=2 και(7f(x)+3g(x))=1, να βρείτε τα f(x), g(x).
16. Αν =3, να βρείτε το  . ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:****f2(x)+f(x)-6=(f(x)+3)(f(x)-2) και f(x)-2x2=f(x)-2-2(x-1)(x+1). Θέτω h(x)=.Είναι =3⟺.*
17. Να βρεθεί το λR, αν =12
18. Αν f:RR περιττή συνάρτηση και =4, να βρεθεί το f(x)
19. Αν f:RR άρτια συνάρτηση και =7, να βρεθεί το f(x)
20. Αν για κάθε xR ισχύει: 3x2-f(x)3x3+2(x-1)2, να βρεθεί το f(x)
21. **Α.** Δίνεται η συνάρτηση f ώστε ≤(x-2)f(x)+3≤3-6, για κάθε χ∈(1, 3). Να υπολογίσετε το **Β.** Δίνεται η συνάρτηση f ώστε 3≤(x-1)f(x)≤-4, για κάθε χ∈(0, 2). Να υπολογίσετε το f(x).
22. Δίνεται η συνάρτηση f ώστε να ισχύει: 4χ≤ (x-1)f(x)+6x≤ 6x2-(x-2)3συν , για κάθε χ≠2, να υπολογίσετε τα όρια: **α)**f(x) **β)**
23. Αν για κάθε χ>0 ισχύει: f2(x)+4<x+4f(x), να δείξετε ότι f(x)=2
24. Αν ισχύει: f2(x)-2f(x)+συν2χ≤0, για κάθε χ∈R, να δείξετε ότι f(x)=1
25. Αν ισχύει: 2xημχ+f2(x)≤2xf(x)+ημ2χ, για κάθε χ∈R, να δείξετε ότι f(0)=0 και να βρείτε το f(x).
26. Δίνεται η συνάρτηση f ώστε να ισχύει: ημ2χ+2χf(x)≤f2(x)≤ημ2χ+χ(χ+2f(x)), για κάθε χ∈R. Να δείξετε ότι f(x)=f(0).
27. Αν για τις f, g ισχύει: f2(x)+g2(x)≤2f(x)ημχ, για κάθε χ∈R, να δείξετε ότι: f(x)= g(x)=0.
28. Αν για τις f, g ισχύει: f2(x)+g2(x)+2f(x)-4g(x)+5≤, για κάθε χ∈R, να υπολογίσετε τα όρια f(x), g(x).
29. Για τις συναρτήσεις f, g να δείξετε ότι ισχύουν: **α)** Αν |f(x)|=0, τότε f(x)=0 **β)** Αν f2(x)=0, τότε f(x)=0 **γ)** Αν κοντά στο α είναι f(x)≥0 και g(x)≥0 και ισχύει [f(x)+g(x)|=0, τότε f(x)= g(x)=0. **δ)** Αν [f2(x)+g2(x)]=0, τότεf(x)= g(x)=0. ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ: α)****-|f(x)|≤f(x)≤|f(x)|****β)****f2(x)=h(x)⟺ |f(x)|=****γ)****f(x)+g(x)=h(x)* ***δ)****f2(x)≤f2(x)+g2(x)*
30. Δίνεται η συνάρτηση f:R⟶R με (f(x)+x2-x+2)=3. Να δείξετε ότι  =2 ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:****f(x)=g(x)-x2+x-3 και =*
31. Δίνεται η συνάρτηση f:R⟶R μεx+f(x)=f(α-χ), για κάθε χ∈R, α∈R. Αν (2f(x)+2x-α)=1, να υπολογίσετε το όριο f(x). ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:****f(x)=[g(x)-2x+α]/2,* *f(x)=(1-a)/2 και f(x)=[f(u)+u-α]*
32. Αν για την f:R⟶R είναι  =2, να βρείτε το όριο . ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:****f(x)=g(x)(x-1)-x,* *f(x)=-1*
33. Αν για τις f, g:R⟶R ισχύουν: [f(x)+g(x)]=0 και [f(x)g(x)]=0, να δείξετε ότι: f(x)= g(x)=0. ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:****f2(x)+g2(x)=[f(x)+g(x)]2-2f(x)g(x)*
34. Αν για την f:R⟶R είναι** =3, να υπολογίσετε τα όρια: **α)**** ***β)***** ***γ)*****
35. Δίνεται η συνάρτηση f:R⟶R με f(χ+ψ)=f(x)συν2ψ+f(ψ)συν2χ, για κάθε χ,ψ∈R. Αν =1να δείξετε ότι * =*συν2α, για κάθε α∈R. ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:*** *θέτω χ-α=u*
36. Δίνεται η συνάρτηση f:R⟶R με f(χ+ψ)=f(x)συν2ψ+f(ψ)ημ2χ+f(χψ), για κάθε χ,ψ∈R. Αν **=1, να δείξετε ότι: * =-α-ημ*2α, για κάθε α∈R. ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:*** *θέτω χ-α=u, οπότε  == (θέτω x=α, ψ=-u) *
37. Δίνεται η συνάρτηση f:R⟶R με f(χ∙ψ)=ψf(x)+xf(ψ), για κάθε χ,ψ∈R. Αν =κ, να δείξετε ότι * =* κ+ , για κάθε α∈R. ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:*** *θέτω χ/α=u⟺x=αu.*
38. Δίνεται η συνάρτηση f:R⟶R με f(χ/ψ)=f(x)-f(ψ), για κάθε χ,ψ∈R\*. Αν =κ, να δείξετε ότι * =* κ/α, για κάθε α∈R. ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:*** *θέτω α/χ=u⟺x=α/u.*
39. Δίνεται η συνάρτηση f:R⟶R με f(x)ημ2χ≤χ4ημ(2/χ3), για κάθε χ∈R\*. Αν υπάρχει το **f(x) και είναι πραγματικός αριθμός, να βρείτε το **f(x) και το ** ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:****διαιρώ με χ.*
40. Να δείξετε ότι η απολύτως μικρότερη ρίζα της εξίσωσης tx2+αχ-β=0, α≠0, έχει όριο τον αριθμό β/α, όταν t⟶0. ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:****Δ=α2+4tβ. Όταν t⟶0 τότε Δ>0.*
41. Δίνεται η συνάρτηση f:R⟶R με *=*κ και **=λ, μ,ν∈Ν\* και κ,λ∈R\*. Να δείξετε ότι μ=ν και κ=λ. ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:*** *αν f(x)≠0, τότε =±∞, ΑΤΟΠΟ. Αν το α είναι ρίζα της f(x)=0, πολ/τας μικρότερης του μ τότε =±∞, ΑΤΟΠΟ. Αν το α είναι ρίζα της f(x)=0, πολ/τας μεγαλύτερης του μ τότε =0, ΑΤΟΠΟ. Άρα το αείναι ρίζα της f(x)=0, πολ/τας μ. Όμοια το αείναι ρίζα της f(x)=0, πολ/τας ν.*
42. Αν για κάθε χ∈R ισχύουν: f3(x)+2x2f(x)=3ημ3χ και **=α, τότε: **α)** Να δείξετε ότι α=1 **β)** Να βρείτε τα όρια: **, **,** ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:*** *διαιρώ με χ3.*
43. Για τη συνάρτηση f, έχουμε ότι για κάθε χ κοντά στο -2 ισχύει 2f(x)+g2(x)<0 και **(2g2(x)-f(x))=0. Να δείξετε ότι **f(x)= **g(x)=0. ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:****2g2(x)-f(x)=h(x)⇔f(x)= 2g2(x)- h(x).*
44. Αν =3 και |g(x)-1|≤|f(x)|, να βρείτε τα όρια: **α)**f(x)  **β)**g(x) **γ)** ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:*** *θέτω h(x)= ⇔f(x)=h(x)(x-1). Είναι g(x)<3 κοντά στο 1*
45. Να υπολογίσετε το 
46. Δίνεται η συνάρτηση f:R⟶R με = -4 και η g:R\*⟶R με = + . Να υπολογίσετε το **g(x).
47. Αν f(x)= , α,β∈R και f(x)=κ∈R, να βρείτε τις τιμές των α,β,κ.
48. Αν για κάθε χ∈R ισχύει: ημ(αχ)≥ημ(βχ)+ημ(γχ), να δείξετε ότι α=β+γ. ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:*** *διαιρώ με χ.*
49. Δίνεται η συνάρτηση f:R⟶R με  =κ, κ∈R. Να βρείτε την τιμή του κ, ώστε να ισχύει:  =4α2, α≠0. ***ΥΠΟΔΕΙΞΗ:*** *θέτω =g(x).*
50. Αν **=2008, να βρεθεί το **
51. Έστω συνάρτηση f, τέτοια ώστε (f(x))3+3x2f(x)=4x3, για κάθε χ∈R. Αν **=λ, να βρεθεί το λ∈R.
52. Δίνεται η συνάρτηση f:R⟶R, για την οποία υπάρχει το **f(x) και ισχύει xf(x)≤ημχ+χ2, για κάθε χ∈R. Να υπολογίσετε το **f(x).
53. **α)** Να δείξετε ότι  =100 **β)**Να δείξετε ότι  =1
54. Δίνεται η f(x)= . Να βρείτε τις τιμές του α, ώστε f(x)=1.