

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ



ΟΡΙΣΜΟΣ



Έστω ένας πραγματικός αριθμός $\lambda \in \mathbb{R}$ και ένα διάνυσμα $\vec{a} \neq \vec{0}$. Ορίζουμε σαν γινόμενο του λ με το $\vec{a}$ και συμβολίζουμε $\lambda \cdot \vec{a}$ ή $\lambda \vec{a}$ ένα διάνυσμα το οποίο:

1. Έχει μέτρο $|\lambda| |\vec{a}|$, δηλαδή ισχύει ότι $|\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$.
2. α. Αν $\lambda > 0$, τότε $\lambda \cdot \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{a}$,
β. Αν $\lambda < 0$, τότε $\lambda \cdot \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{a}$,
γ. Αν $\lambda = 0$, τότε $\lambda \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

Επίσης ορίζουμε $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$.



Πρόσεξε ότι αν $\lambda \cdot \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{a}$ και $\vec{a} \neq \vec{0}$ τότε και $\lambda > 0$.



Πρόσεξε ότι αν $\lambda \cdot \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{a}$ και $\vec{a} \neq \vec{0}$ τότε και $\lambda < 0$.



Πρόσεξε ότι αν $\lambda \cdot \vec{a} = \vec{0}$ τότε ή $\lambda = 0$ ή $\vec{a} = \vec{0}$.



Πρόσεξε ότι το γινόμενο $\frac{1}{\lambda} \cdot \vec{a}$ με $\lambda \neq 0$ το συμβολίζουμε και με $\frac{\vec{a}}{\lambda}$.

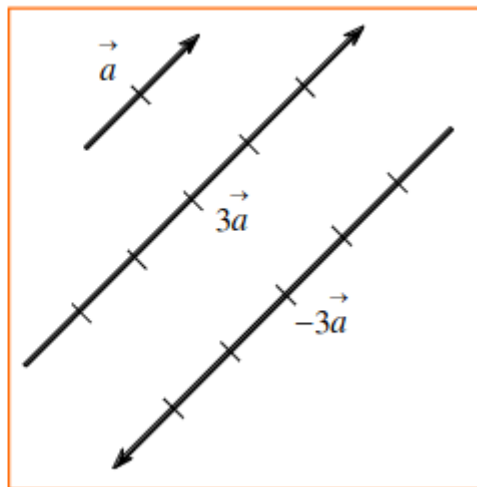
ΟΡΙΣΜΟΣ



Παράδειγμα

Αν το διάνυσμα $\vec{a}$ έχει μέτρο 2, τότε:

- Το διάνυσμα $3\vec{a}$ είναι ομόρροπο με το $\vec{a}$ και έχει μέτρο $|3\vec{a}| = 3|\vec{a}| = 3 \cdot 2 = 6$.
- Το διάνυσμα $-3\vec{a}$ είναι αντίρροπο με το $\vec{a}$ και έχει μέτρο ίσο $|-3\vec{a}| = |-3||\vec{a}| = 3 \cdot 2 = 6$.



Ιδιότητες Πολλαπλασιασμού Αριθμού με Διάνυσμα



Για το γινόμενο πραγματικού αριθμού με διάνυσμα ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες (χωρίς απόδειξη):

1. $\lambda(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$
2. $(\lambda + \mu)\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\alpha}$
3. $\lambda(\mu\vec{\alpha}) = (\lambda\mu)\vec{\alpha}$
4. $\lambda\vec{\alpha} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \quad \text{ή} \quad \vec{\alpha} = \vec{0}$
5. $(-\lambda\vec{\alpha}) = \lambda(-\vec{\alpha}) = -(\lambda\vec{\alpha})$
6. $\lambda(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha} - \lambda\vec{\beta}$
7. $(\lambda - \mu)\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} - \mu\vec{\alpha}$
8. Αν $\lambda\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$ και $\lambda \neq 0$, τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$
9. Αν $\lambda\vec{\alpha} = \mu\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, τότε $\lambda = \mu$.

Γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων



Ονομάζεται **γραμμικός συνδυασμός** δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ κάθε διάνυσμα της μορφής $\vec{v} = \kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

Για παράδειγμα τα διανύσματα $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$, όπου $\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha} + 5\vec{\beta}$ και $\vec{\delta} = -2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ είναι γραμμικοί συνδυασμοί των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Ανάλογα ορίζεται και ο γραμμικός συνδυασμός τριών ή περισσότερων διανυσμάτων. Έτσι, για παράδειγμα, το διάνυσμα $\vec{v} = 3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} + 5\vec{\gamma}$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΟΥ Α ΟΜΑΔΑΣ ΣΕΛ 26

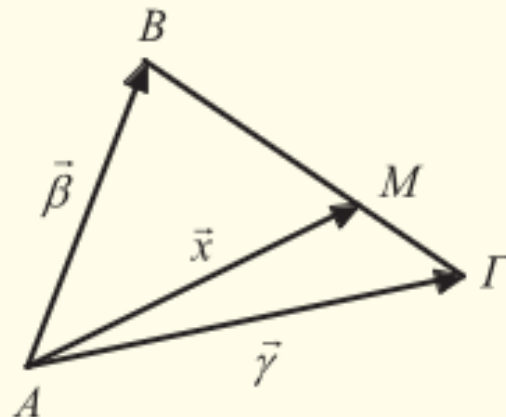


2. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{x}$ σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:

$$(i) \frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{\alpha}) = \frac{1}{3}(\vec{x} + \vec{\beta}) \quad (ii) \vec{x} + 3(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = 4(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) - 3\vec{x}.$$

3. Αν στο διπλανό σχήμα είναι $(BM) = 2(M\Gamma)$,

να αποδείξετε ότι $\vec{x} = \frac{1}{3}(\vec{\beta} + 2\vec{\gamma})$.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΟΥ Α ΟΜΑΔΑΣ ΣΕΛ 27

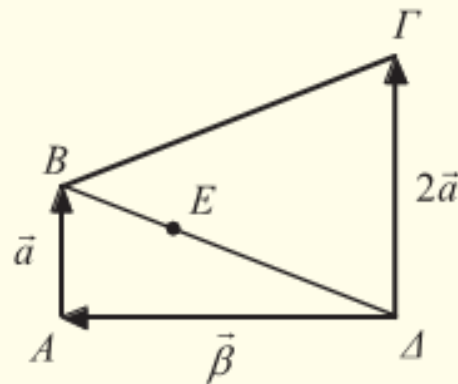


4. Στο διπλανό σχήμα έχουμε:

$$\Delta E = 2EB, \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{\Delta\Gamma} = 2\vec{a} \text{ και } \overrightarrow{\Delta A} = \vec{\beta}.$$

(i) Να εκφράσετε συναρτήσει των $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta B}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{\Gamma B}$, $\overrightarrow{AE}$ και $\overrightarrow{E\Gamma}$.

(ii) Από τις εκφράσεις των $\overrightarrow{AE}$ και $\overrightarrow{E\Gamma}$ ποιο συμπέρασμα προκύπτει για τα σημεία A , E και Γ ;



Συνθήκη Παραλληλίας Διανυσμάτων



Αποδείξτε ότι αν $\vec{a}, \vec{\beta}$ δύο διανύσματα με $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ τότε
 $\vec{a} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{\beta}, \lambda \in \mathbb{R}$

⇒ (Ευθύ) Αν τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα και $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε θα δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός λ τέτοιος ώστε $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{\beta}$.

Θέτουμε $\kappa = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{\beta}|}$, όπου $\kappa \geq 0$, τότε $|\vec{a}| = \kappa |\vec{\beta}|$. Συνεπώς:

- Αν $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{a} = \kappa \vec{\beta}$, οπότε αν θέσουμε $\lambda = \kappa > 0$, έχουμε $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{\beta}$.
- Αν $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{a} = -\kappa \vec{\beta}$, οπότε αν θέσουμε $\lambda = -\kappa < 0$, έχουμε $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{\beta}$.
- Αν $\vec{a} = \vec{0}$, τότε $\vec{a} = 0 \cdot \vec{\beta}$, οπότε αν θέσουμε $\lambda = \kappa = 0$, έχουμε $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{\beta}$.

⇒ (Αντίστροφο) Αν ισχύει η σχέση $\vec{a} = \lambda \vec{\beta}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε όπως γνωρίζουμε από τον ορισμό του πολλαπλασιασμού αριθμού με διάνυσμα, τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα.

ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑ -ΣΥΝΕΥΘΕΙΑΚΑ ΣΗΜΕΙΑ



Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα, με $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}, \lambda \in \mathbf{R}$.

- Ειδικότερα :

- Αν $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} = \kappa \vec{\beta} \quad \kappa \geq 0$

- Αν $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} = -\kappa \vec{\beta} \quad \kappa \geq 0$

Αν πρέπει να δείξετε ότι τρία σημεία, ας πούμε τα Κ, Λ, Μ είναι συνευθειακά, αρκεί να αποδείξετε ότι δύο οποιαδήποτε διανύσματα που σχηματίζονται με τα τρία σημεία είναι παράλληλα. Δηλαδή ισχύει ότι:

- Κ, Λ, Μ συνευθειακά $\Leftrightarrow \vec{KM} = \lambda \cdot \vec{KL} \text{ ή } \vec{KM} = \nu \cdot \vec{LM} \text{ ή } \vec{LK} = \rho \cdot \vec{ML}$

δηλαδή αν δείξετε ότι δύο διανύσματα που έχουν ένα κοινό σημείο, είναι παράλληλα, τότε τα τρία σημεία με τα οποία φτιάχνονται τα διανύσματα είναι συνευθειακά

ΣΥΝΕΥΘΕΙΑΚΑ ΣΗΜΕΙΑ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ



(Άσκηση 6 σελ. 27 σχολικό βιβλίο Α΄ ΟΜΑΔΑΣ)

Αν $\vec{AK} + 3\vec{BK} - 2\vec{BA} = \vec{BL} + 3\vec{AM}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία K, Λ, και M είναι συνευθειακά.

11. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Αν $\overrightarrow{AD} = \kappa \overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AE} = \lambda \overrightarrow{AB} + \kappa \overrightarrow{A\Gamma}$ να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{B\Gamma}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΚΤΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ



Ασκηση Α

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} + \vec{\gamma}$, $\overrightarrow{OB} = 5\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} + 4\vec{\gamma}$ και $\overrightarrow{OG} = 13\vec{\alpha} + 7\vec{\beta} + 10\vec{\gamma}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ είναι συνευθειακά.

Ασκηση Β

Δίνεται τρίγωνο ABΓ και τα σημεία Δ, E και Z τέτοια ώστε: $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{GE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BG}$

και $\overrightarrow{AZ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AG}$.

α) Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{AG} = \vec{\beta}$ να εκφράσετε τα $\overrightarrow{DE}$ και $\overrightarrow{DZ}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, E, Z είναι συνευθειακά.

Διανυσματική Ακτίνα του Μέσου Τμήματος



Αποδείξτε ότι για την διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM}$ του μέσου M ευθύγραμμου τμήματος AB ισχύει: $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$.

Ας πάρουμε ένα διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ και ένα σημείο αναφοράς O . Επειδή $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, έχουμε

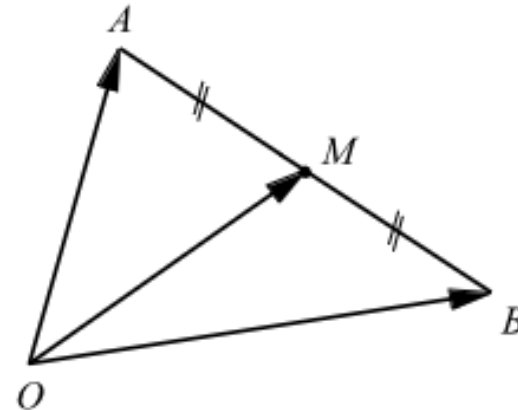
$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM},$$

οπότε

$$2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

και άρα

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$



Διανυσματική Ακτίνα του Μέσου Τμήματος



(Άσκηση 7 σελ. 27 σχολικό βιβλίο Α΄ ΟΜΑΔΑΣ)

Αν $\Delta\Delta$, BE και ΓZ είναι διάμεσοι τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι : $\vec{A\Delta} + \vec{BE} + \vec{\Gamma Z} = \vec{0}$.

(Άσκηση 8 σελ. 27 σχολικό βιβλίο Α΄ ΟΜΑΔΑΣ)

Αν K, Λ, M είναι τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$, ΓA , AB αντιστοίχως, τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο O ισχύει : $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OG} = \vec{OK} + \vec{OL} + \vec{OM}$.

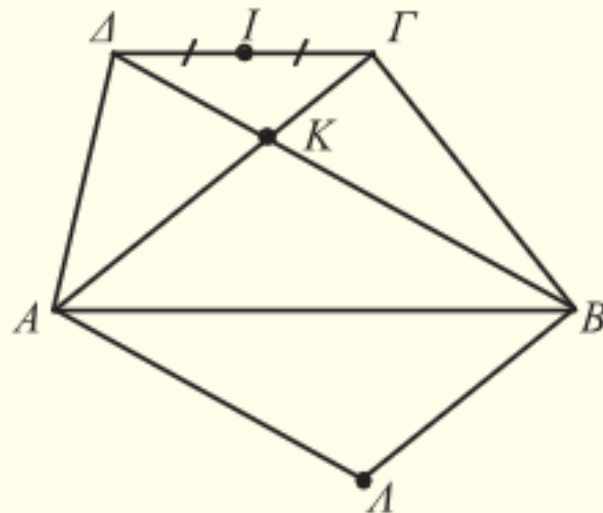
9. Αν M και N είναι τα μέσα των διαγωνίων AG και BD , αντιστοίχως, ενός τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$, να αποδείξετε ότι $\vec{AB} + \vec{A\Delta} + \vec{\Gamma B} + \vec{\Gamma\Delta} = 4\vec{MN}$.



9. Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο με $(AB) = 2(\Gamma\Delta)$, το $K\Lambda\Lambda B$ παραλληλόγραμμο και το I μέσο του $\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

(i) $\overrightarrow{K\Gamma} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{K\Lambda}$ και $\overrightarrow{K\Delta} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{K\Lambda}$

(ii) τα σημεία I, K, Λ είναι συνευθειακά.



ΣΗΜΕΙΑ ΠΟΥ ΤΑΥΤΙΖΟΝΤΑΙ



Για να αποδείξουμε ότι δυο σημεία A, B ταυτίζονται αρκεί να δείξουμε ότι οι διανυσματικές τους ακτίνες ταυτίζονται, δηλαδή αν $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow A \equiv B$ ή ότι το διάνυσμα που σχηματίζουν είναι το μηδενικό διάνυσμα $\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow A = B$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν ισχύει $\vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MG} = \vec{NA} + 2\vec{NB} + 3\vec{NG}$, να δείξετε ότι τα σημεία M, N ταυτίζονται.

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΘΕΣΗΣ ΣΗΜΕΙΟΥ



Για προσδιορίσουμε τη θέση ενός σημείου M από μια διανυσματική ισότητα, αρκεί να βρούμε ένα διάνυσμα $\vec{AM}$ (A : γνωστό σημείο) , συναρτήσει γνωστών διανυσμάτων. Για να το πετύχω αυτό, στη σχέση που δίνεται παίρνω ως σημείο αναφοράς ένα από τα σταθερά σημεία, όχι όμως το M .

Συχνά :

- Αν $\vec{AM} = \vec{0}$ τότε το M ταυτίζεται με το A
- Αν $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{0}$ ή $\vec{AM} = \vec{MB}$ τότε το M είναι μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB .

(Άσκηση 5 σελ. 28 σχολικό βιβλίο Β' ΟΜΑΔΑΣ)

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Να βρείτε σημείο M τέτοιο, ώστε να ισχύει :

$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{M\Gamma} = \vec{M\Delta}$$

ΣΤΑΘΕΡΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑ



Β ΟΜΑΔΑ ΣΕΛ 29

8. Δίνονται τα σημεία A, B και Γ . Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο M το διάνυσμα $3\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MG}$ είναι σταθερό.