

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β ΛΥΚΕΙΟΥ



1. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

2. ΕΥΘΕΙΑ

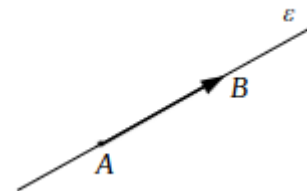
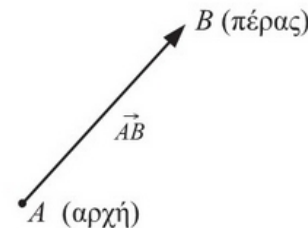
3. ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

- 1.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ
- 1.2 ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ
- 1.3 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ
- 1.4 ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ
- 1.5 ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

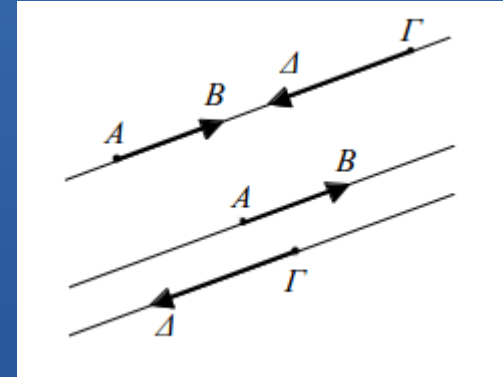
1.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

- ✓ **Διάνυσμα** $\vec{AB}$: λέμε το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το A και πέρας το B.
- ✓ **Μηδενικό Διάνυσμα** : λέμε το διάνυσμα στο οποίο η αρχή και το τέλος (πέρας) ταυτίζονται. $\vec{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow A \equiv B$. π.χ. $\vec{AA} = \vec{0}$.
- ✓ **Μέτρο Διανύσματος** $|\vec{AB}|$: λέμε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB. Συμβολίζουμε με $|\vec{AB}|$. Ισχύει $|\vec{AB}| = |\vec{BA}| \geq 0$.
- ✓ **Μοναδιαίο Διάνυσμα** : λέμε το διάνυσμα με μέτρο ίσο με ένα.
- ✓ **Φορέας Διανύσματος** : λέγεται η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται ένα μη μηδενικό διάνυσμα.



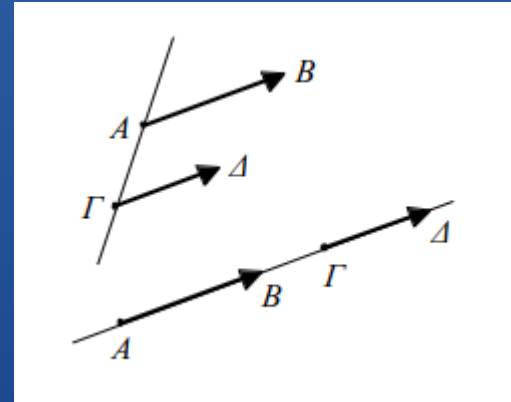
- Παράλληλα – Συγγραμμικά Διανύσματα :

- Παράλληλα – Συγγραμμικά Διανύσματα :
λέγονται τα διανύσματα τα οποία
- είτε έχουν τον ίδιο φορέα,
- είτε έχουν παράλληλους φορείς



Ομόρροπα Διανύσματα :

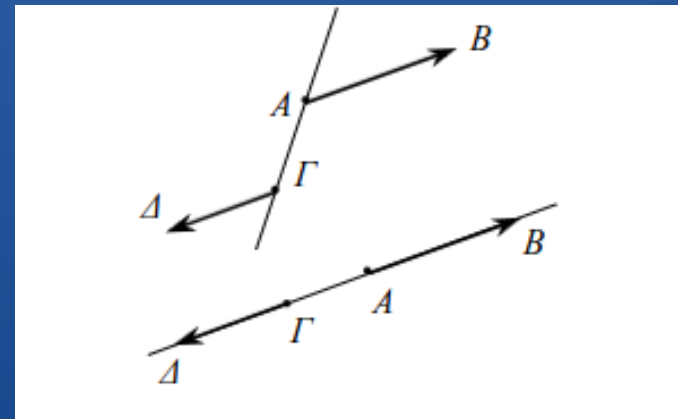
- Δυο διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ λέγονται ομόρροπα όταν :
 - i. Έχουν παράλληλους φορείς και βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΓ που ενώνει τις αρχές τους ή
 - ii. Έχουν τον ίδιο φορέα και μια από τις ημιευθείες $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ περιέχει την άλλη.
- Συμβολίζονται $\vec{AB} \uparrow\uparrow \vec{\Gamma\Delta}$.



Αντίρροπα Διανύσματα

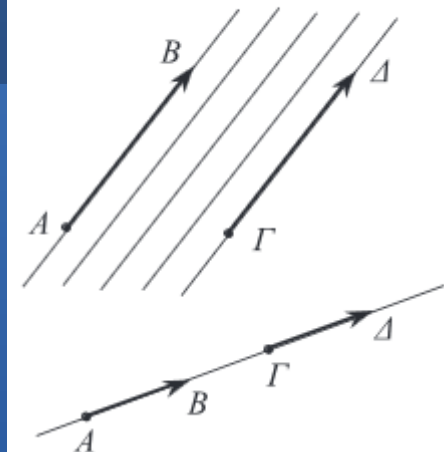
- Δυο διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ λέγονται αντίρροπα όταν είναι συγγραμμικά αλλά δεν είναι ομόρροπα.
- Συμβολίζονται

$$\vec{AB} \updownarrow \vec{\Gamma\Delta}$$



Δυο μη μηδενικά διανύσματα λέγονται ίσα, όταν έχουν την ίδια κατεύθυνση και ίσα μέτρα.

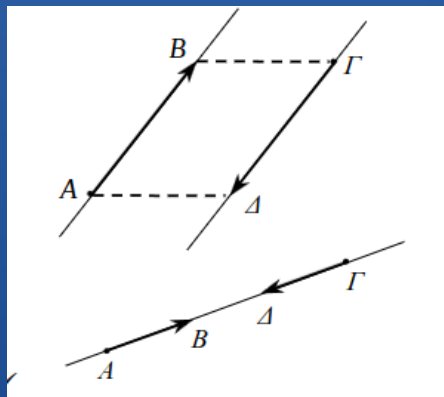
$$\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta} \text{ και } |\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|.$$



Αντίθετα Διανύσματα : $\vec{\alpha} = -\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta} \text{ και } |\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|.$

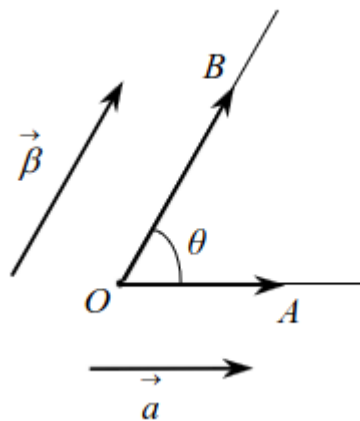
Είναι φανερό ότι $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}.$

Ειδικότερα, έχουμε $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}.$

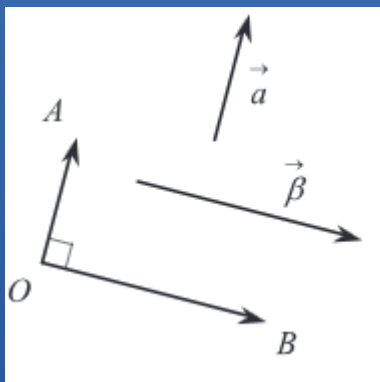
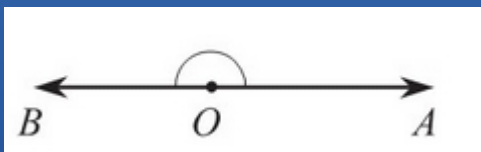
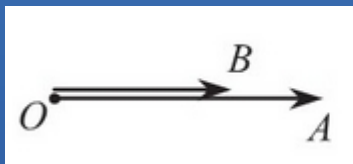


Γωνία Διανυσμάτων : Έστω διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Αν φέρουμε με κοινή αρχή το σημείο O τα διανύσματα $\vec{OA} = \vec{\alpha}$ και $\vec{OB} = \vec{\beta}$, τότε ονομάζουμε γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ την κυρτή γωνία $\hat{AOB}$ που ορίζουν οι ημιευθείες OA και OB .

Συμβολίζουμε με $\left(\hat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right)$ και ισχύει $\theta = \left(\hat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \left(\hat{\vec{\beta}, \vec{\alpha}}\right)$ με $0 \leq \theta \leq 180^\circ$.



Γωνία δύο Διανυσμάτων



Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \neq 0$ τότε ισχύουν οι σχέσεις :

- i. $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \theta = 0$
- ii. $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \theta = 180^\circ$
- iii. $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \theta = 0 \text{ ή } \theta = 180^\circ$
- iv. $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \theta = 90^\circ$

• Το μηδενικό Διάνυσμα είναι ομόρροπο ή αντίρροπο ή ακόμη και κάθετο σε κάθε άλλο διάνυσμα.

ΑΣΚΗΣΗ

Θεωρούμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και ένα σημείο Δ της πλευράς $B\Gamma$. Να βρείτε τις γωνίες :

i. $\left(\vec{AB}, \vec{A\Gamma} \right)$

ii. $\left(\vec{AB}, \vec{B\Gamma} \right)$

iii. $\left(\vec{B\Delta}, \vec{\Delta\Gamma} \right)$

iv. $\left(\vec{B\Gamma}, \vec{\Gamma\Delta} \right)$

ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

- ΔΙΑΔΟΧΙΚΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ
(το πέρας του ενός είναι η αρχή του άλλου)

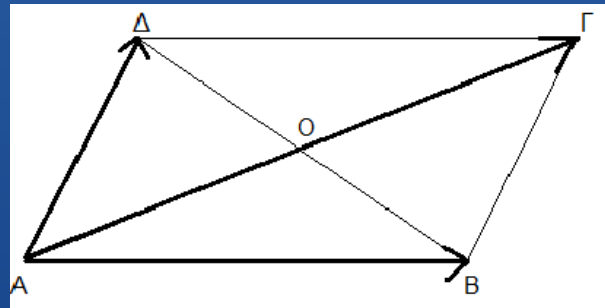
$$\vec{AB} + \vec{BG} = \vec{AG}$$

Το άθροισμα των διανυσμάτων θα έχει αρχή την αρχή του πρώτου και πέρας το πέρας του τελευταίου.

- ΚΑΝΟΝΑΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΥ
- (έχουν κοινή αρχή)

$$\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AG}$$

όπου ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο
Και το άθροισμα είναι η διαγώνιος
του παραλληλογράμμου που ξεκινά
από το Α



Ιδιότητες Πρόσθεσης Διανυσμάτων

Για την πρόσθεση των διανυσμάτων ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες της πρόσθεσης πραγματικών αριθμών. Δηλαδή, αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι τρία διανύσματα, τότε:

- | | | |
|-----|---|----------------------------|
| (1) | $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$ | (Αντιμεταθετική ιδιότητα) |
| (2) | $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$ | (Προσεταιριστική ιδιότητα) |
| (3) | $\vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{\alpha}$ | |
| (4) | $\vec{\alpha} + (-\vec{\alpha}) = \vec{0}.$ | |

Να υπολογιστεί το άθροισμα : $\vec{A\Gamma} + \vec{B\Delta} + \vec{\Gamma E} + \vec{\Delta Z} + \vec{E\Lambda} + \vec{ZB} =$

(Άσκηση 7 σελ. 21 σχολικό βιβλίο)

Για ένα τυχαίο εξάγωνο $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ να αποδείξετε ότι

$$\vec{P_1P_3} + \vec{P_2P_4} + \vec{P_3P_5} + \vec{P_4P_6} + \vec{P_5P_1} + \vec{P_6P_2} = \vec{0}.$$

ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

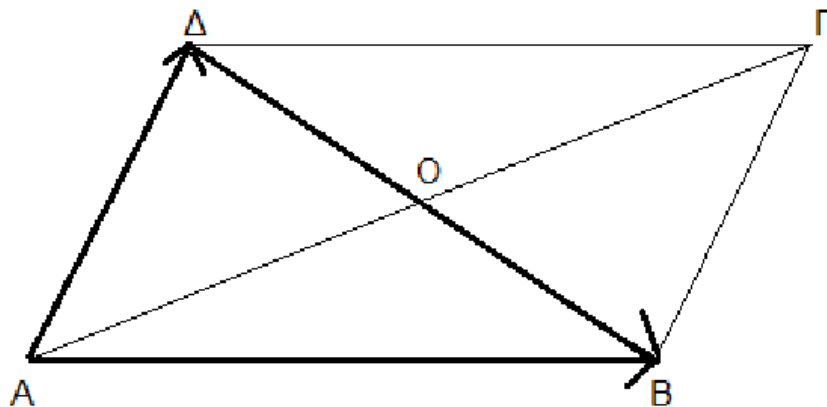
τα διανύσματα έχουν κοινό τέλος

$$\vec{AB} - \vec{\Gamma B} = \vec{AB} + \vec{B\Gamma} = \vec{A\Gamma}$$

Αν δυο διανύσματα έχουν κοινή αρχή

$$\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{AB}.$$

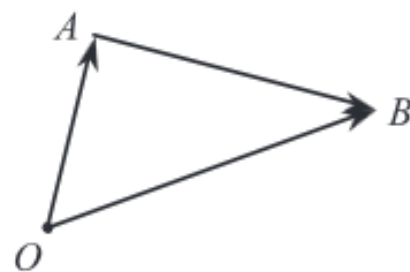
Εφαρμογή σε παραλληλόγραμμο : $\vec{AB} - \vec{A\Delta} = \vec{\Delta B}$



Παρατηρώ δηλαδή ότι η πρόσθεση $\vec{AB} + \vec{A\Delta} = \vec{A\Gamma}$ μας δίνει τη μια διαγώνιο του παραλληλογράμμου, ενώ η αφαίρεση $\vec{AB} - \vec{A\Delta} = \vec{\Delta B}$ μας δίνει την άλλη.

Διάνυσμα Θέσεως

Έστω O ένα σταθερό σημείο του χώρου. Τότε για κάθε σημείο M του χώρου ορίζεται το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$, το οποίο λέγεται **διάνυσμα θέσεως του M** ή **διανυσματική ακτίνα του M** . Το σημείο O , που είναι η κοινή αρχή όλων των διανυσματικών ακτίνων των σημείων του χώρου, λέγεται **σημείο αναφοράς** στο χώρο.



Αν O είναι ένα σημείο αναφοράς, τότε για οποιοδήποτε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ έχουμε $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ και επομένως

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

Δηλαδή:

“Κάθε διάνυσμα στο χώρο είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής”.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να κάνετε τις παρακάτω πράξεις με διανύσματα :

i. $\vec{AB} + \vec{BG} =$

ii. $\vec{AB} - \vec{GB} =$

iii. $\vec{AB} - \vec{AD} =$

iv. $\vec{AB} + \vec{GA} =$

v. $\vec{AB} - \vec{AG} =$

vi. $\vec{AB} + \vec{BG} + \vec{GA} =$

vii. $\vec{BA} + \vec{AG} + \vec{GB} =$

viii. $\vec{AB} + \vec{KN} + \vec{BK} =$

ix. $\vec{BG} + \vec{GD} - \vec{BA} =$

x. $\vec{AG} + \vec{GD} + \vec{BA} - \vec{BD} =$

3) Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο το κέντρο του. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες.

i. $\vec{AB} + \vec{AD} =$

$\vec{DA} - \vec{GD} =$

ii. $\vec{AB} - \vec{AD} =$

$\vec{AB} + \vec{GD} =$

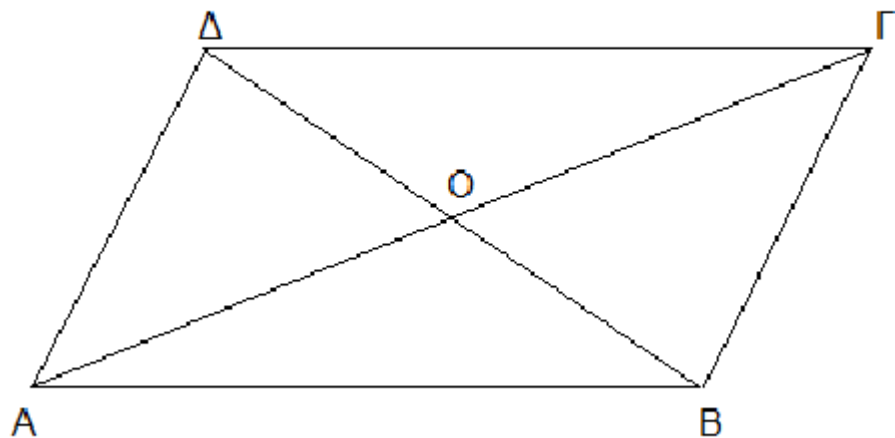
iii. $\vec{AB} + \vec{GD} =$

$\vec{GB} + \vec{GD} + \vec{AG} =$

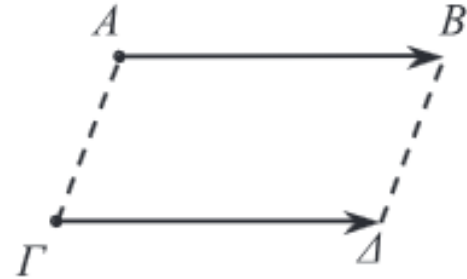
iv. $\vec{DO} + \dots = \vec{DG}$

v. $\vec{OA} + \vec{OG} =$

vi. $\vec{AB} - \dots = \vec{DB}$



- Αν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τότε $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Delta}$, $\overrightarrow{\Delta B} = \overrightarrow{\Gamma A}$ και $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.



- Αν M είναι το μέσον του AB , τότε $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ και αντιστρόφως.



)(Άσκηση 4 σελ. 21 σχολικό βιβλίο)

Αν για δυο τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ ισχύει $\vec{AB} + \vec{AG} = \vec{AD} + \vec{AE}$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΔΓΕ είναι παραλληλόγραμμο.

)(Άσκηση 5 σελ. 21 σχολικό βιβλίο)

Δίνονται τέσσερα σημεία Α,Β,Γ,Δ και έστω Ο το μέσο του τμήματος ΑΓ. Να αποδείξετε ότι : $\vec{OB} + \vec{OD} = \vec{AB} - \vec{DG}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΚΤΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ

Α) Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Μ το μέσον του ΑΒ. Να αποδείξετε ότι : $\vec{MG} + \vec{MD} = \vec{AG} - \vec{DB}$.

Β) Δίνονται τρία μη συνευθειακά σημεία Α,Β,Γ. Αν Δ,Ε είναι σημεία που ορίζονται από τις ισότητες : $\vec{AD} = \vec{BG}$ και $\vec{BE} = \vec{AG}$, να αποδείξετε ότι :

i. $\vec{DG} = \vec{GE}$

ii. το Γ είναι μέσο του ΔΕ.

ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΑ ΤΑΥΤΙΖΟΝΤΑΙ

- Για να δείξουμε ότι δυο σημεία A και B ταυτίζονται, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\vec{AB} = \vec{0}.$$

Για να το επιτύχω αυτό, στη σχέση που δίνεται παίρνω ως σημείο αναφοράς ένα από τα A, B

- *Ασκήσεις*

1) Έστω τα σημεία A, B, Γ, Δ, Ε ώστε να ισχύει : $\vec{AB} - \vec{AG} = \vec{DB} - \vec{EG}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, Ε συμπίπτουν.

2) Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ και το σημείο Ο για το οποίο ισχύει : $\vec{AG} + \vec{BO} = \vec{BD} - \vec{GD}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ο, Α συμπίπτουν.