

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 4

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ (1)

1. Δίνεται περιττή συνάρτηση f , συνεχής στο $x_0 = 2$, για την οποία

$$\text{ισχύει: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x - 2} = 6.$$

α) Να βρείτε το $f(2)$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_1 = -2$.

γ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) + 3}{x + 2}$.

(Απ. α)3, γ)6)

2. Δίνεται συνάρτηση $g: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$1 + 2\sqrt{\eta\mu x} \leq g(x) \leq 2 + \eta\mu x \text{ για κάθε } x \in [0, \pi].$$

α) Να αποδείξετε ότι η g είναι συνεχής στο $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{|3 - g(x)| - xg(x) - 3}{g(x) - 3}$.

(Απ. β) $+\infty$)

3. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f για την οποία

$$\text{ισχύει } (x - 2)f(x) = \alpha x^2 + \beta x - 6 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Αν το σημείο}$$

$A(2, 5)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = 1$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f^2(x) \eta\mu \frac{1}{f(x)} \right]$

(Απ. γ) $+\infty$)

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2\eta\mu x - 1, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + 2\eta\mu x = 1$, έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, τέτοιο, ώστε $f(\xi) = 2$.

$$\text{(Απ. α) } f(A) = \left[-1, \frac{\pi^2}{4} + 1\right]$$

5. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(1 - \ln x) = 2 - 2x - 2 \ln x, \quad x > 0.$$

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

γ) Να βρείτε το πρόσημο της f

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

$$(Απ. α) f(x) = 2x - 2e^{1-x} \quad \delta) \mathbb{R})$$

6. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$f^3(x) + 3f(x) = 2x - 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να αποδείξετε ότι:}$$

α) η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

β) η f είναι γνησίως αύξουσα

γ) υπάρχει μοναδικός $\rho \in (0,1)$ τέτοιος, ώστε $f(\rho) = 0$.

δ) Αν $\theta \in (f(0), 0)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, \rho)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = \theta$.

ΕΡΓΑΣΙΑ 5

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ (2)

1. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$xf(x) + \sin x - 1 + x^2 \ln \frac{1}{x} = 0 \quad \text{για κάθε } x \neq 0.$$

α) Να βρείτε τον τύπο της f .

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια θετική ρίζα.

2. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \ln x + e^x + x - 1$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $g(x) = \alpha$ έχει μοναδική ρίζα.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $g(x) = e$.

δ) Να βρείτε το $\kappa \in \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει:

$$e^{\kappa^2+4} - e^{4\kappa} = \ln(4\kappa) - \ln(\kappa^2 + 4) + 4\kappa - \kappa^2 - 4.$$

3. Δίνεται συνεχής και 1-1 συνάρτηση $f: [2,10] \rightarrow \mathbb{R}^*$ με $f(2)f(5)f(10) = 125$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [2,10]$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in [2,10]$ τέτοια, ώστε $f(x_1) < 5 < f(x_2)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει την ευθεία $y = 5$ τουλάχιστον σε ένα σημείο.

4. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $f(0) = 0$ και

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i. η f είναι συνεχής.

ii. η συνάρτηση $h(x) = f(x) + 4x - 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

iii. η εξίσωση $f(x) + 4x = 1$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

β) Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2}$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 4f(x)}{x^2 + |f(x)|}$

5. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(0) > 0$ και $f(4) > 0$.

Αν τα $x_1 = -3$ και $x_2 = 3$ είναι διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(2)f(x) + 5x^4 + x^2 - 17] = -\infty, \text{ τότε:}$$

α) Να βρείτε το πρόσημο της f στο διάστημα $(-3, 3)$.

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ τουλάχιστον σε ένα σημείο με τετμημένη μεγαλύτερη του 4.

6. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[1, 3]$ με $f(1) + 2f(2) + f(3) = 0$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = f(x) + f(x+1)$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [1, 2]$ τέτοιο, ώστε $f(\xi+1) = -f(\xi)$.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [1, 3]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = -\frac{f(2)}{3}$.

7. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $f(f(x)) - f(x) = 2$ και $f(1) = 3$.

α) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(1)x^5 + 2x^3 - 3}{f(3)x^4 + 4x + 2}$

β) Αν $\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = 8$, να αποδείξετε ότι η C_f διέρχεται από σημείο με

τεταγμένη 7.

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = xf(x) - 50\sin(\pi x)$, τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο διάστημα $(3, 6)$.

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [1, 6]$ τέτοιο, ώστε

$$9f(x_0) = 3f(2) + 2f(4) + 4f(5).$$