

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 - ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 1.1 - ΕΝΝΟΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

Α. ΟΡΙΣΜΟΣ
Διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ Ορίζουμε το Προαναζοιστικό Εξ-
υγρήριο Τμήμα AB με Αρχή το A και Πέρας το B

Β. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

1. Μέτρο Διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ Ορίζουμε το Μήκος
του Εξυγρήριου Τμήματος AB και συμβολίζεται $|\overrightarrow{AB}|$
2. Διευθύνση Διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ Ορίζεται (το φέρτα)

Την Εύθεια (ε) στην οποία Φριβετεί το Διάνυ-
σμα $\overrightarrow{AB}$ και κάθε Παράλληλη Εύθεια (γ) στην
Εύθεια (ε)

3. Φορά Διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ Ορίζεται την Κινη-
ση από την Αρχή A στο Πέρας B .

Γ. ΕΙΔΗ ΔΙΑΛΥΣΜΑΤΩΝ

1. ΙΣΑ ΔΙΑΛΥΣΜΑΤΑ Ορίζουμε αυτά που έχουν

I. Ισα Μέτρα

II. Ισα Διευθύνει

III. Ισα Φορά

2. ΑΝΤΙΘΕΤΑ ΔΙΑΛΥΣΜΑΤΑ Ορίζουμε αυτά που έχουν

I. Ισα Μέτρα

II. Ισα Διευθύνει

III. ΑΝΤΙΘΕΤΗ Φορά

3. ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ ή ΧΥΓΓΡΑΜΙΚΑ ΔΙΑΛΥΣΜΑΤΑ Ορίζουμε αυτά που έχουν

I. Ισα Διευθύνει

4. ΟΜΟΡΡΟΝΑ ΔΙΑΛΥΣΜΑΤΑ Ορίζουμε αυτά που έχουν

I. Ισα Διευθύνει

II. Ισα Φορά

5. ΑΝΤΙΡΡΟΝΑ ΔΙΑΛΥΣΜΑΤΑ Ορίζουμε αυτά που έχουν

I. Ισα Διευθύνει

II. ΑΝΤΙΘΕΤΗ Φορά

Δ. ΓΩΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

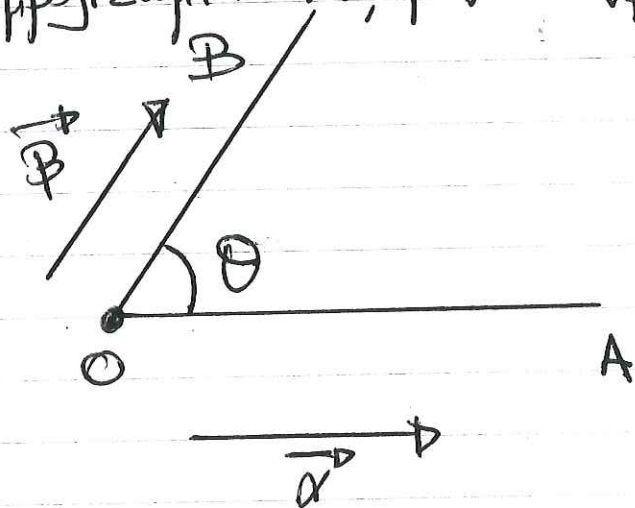
1. ΟΡΙΣΜΟΣ

Γωία τω/σ διανυσμω/σ τω/σ $\vec{\alpha} = \vec{OA}$, $\vec{\beta} = \vec{OB}$ με $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$

Ορίζουμε τη ελάχιστη γωία $\hat{AOB}$ που ορίζουν οι

Ημικυκλίους OA, OB

και υποβάζουμε: $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = (\vec{\beta}, \vec{\alpha}) \in [0, \pi]$



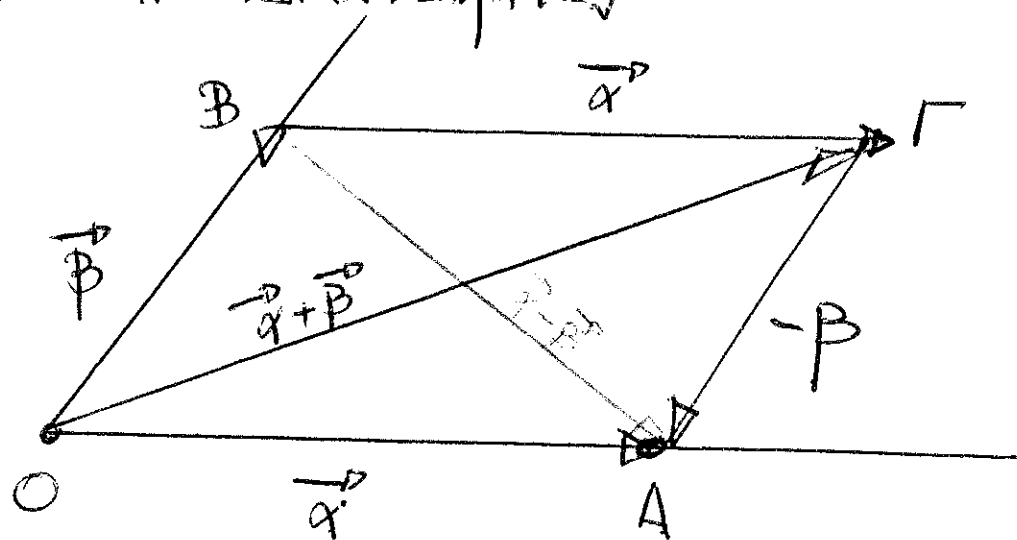
ΣΗΜΕΙΩΣΗ

1. $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0 \iff \vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta}$
2. $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \pi \iff \vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta}$
3. $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{2} \iff \vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$

Stamata

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 1.2 ΠΡΟΣΘΕΣΗ - ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

A. ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ



1. ΟΡΙΣΜΟΣ

Θεωρούμε διανύσματα $\vec{\alpha} = \vec{OA}$, $\vec{\beta} = \vec{OB}$ με $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$
και λοιπή Αρχή 0

Αθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ Ορίζεται το
Διάνυσμα $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC} + \vec{OB} = \vec{OB} + \vec{BC} = \vec{OC} = \vec{\gamma}$

2. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

I. $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}$

II. $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma})$

III. $\vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{\alpha} = \vec{\alpha}$

IV. $\vec{\alpha} + (-\vec{\alpha}) = (-\vec{\alpha}) + \vec{\alpha} = \vec{0}$

Β. ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

1. ΟΡΙΣΜΟΣ

Θεωρούμε διανύσματα $\vec{\alpha} = \vec{OA}$, $\vec{\beta} = \vec{OB}$ με $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$

και κοινή αρχή O

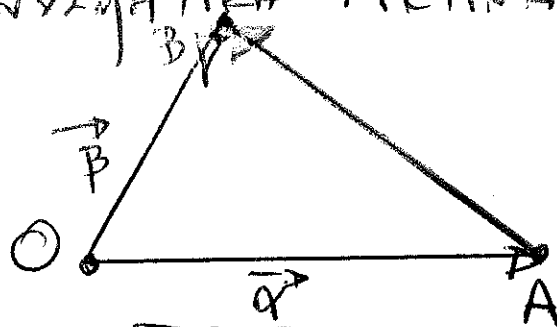
Διαφορά των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ Ορίζεται το

$$\vec{\psi} = \vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta}) = \vec{OA} + \vec{GA} = \vec{BG} + \vec{GA} = \vec{BA}$$

2. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Οι Ιδιότητες της Αφαίρεσης Ορίζονται με τους
Ιδιότητων Προσθετ. Διανυσμάτων

Γ. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΚΤΙΝΑ



Θεωρούμε το $\triangle OAB$ O τα χέρια ως
Αρχή των διανυσμάτων

και ως διανυσματικές ακτίνες $\vec{OA}, \vec{OB}$ των
διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$

Τότε: $\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = -\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 1.3

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

A. ΟΡΙΣΜΟΣ:

Θεωρούμε $\lambda \in \mathbb{R}^*$ και $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Γνωρίζουμε ότι Αριθμός λ με το Διάνυσμα $\vec{a}$ ονομάζεται το Διάνυσμα $\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \vec{a}$ με στοιχεία:

I. Μέτρο $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$

II. Διεύθυνση $\lambda \vec{a} = \text{Διεύθυνση των } \vec{a}$

III. Φάρα $\lambda \vec{a} = \begin{cases} \text{Φάρα των } \vec{a} & \lambda > 0 \\ \text{Φάρα των } -\vec{a} & \lambda < 0 \end{cases}$

Ορίζουμε: αν $\lambda = 0$ ή $\vec{a} = \vec{0}$ τότε $\lambda \vec{a} = \vec{0}$

B. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1. $\lambda \vec{a} = \vec{0} \iff \lambda = 0 \text{ ή } \vec{a} = \vec{0}$

6. $\lambda \vec{a} = \lambda \vec{\beta} \text{ και } \lambda \neq 0 \implies \vec{a} = \vec{\beta}$

2. $(-\lambda \vec{a}) = (-\lambda) \vec{a} = \lambda (-\vec{a})$

7. $\lambda \vec{a} = \mu \vec{a} \text{ και } \vec{a} \neq \vec{0} \implies \lambda = \mu$

3. $(\lambda \pm \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} \pm \mu \vec{a}$

4. $(\lambda \mu) \vec{a} = \lambda (\mu \vec{a}) = \mu (\lambda \vec{a})$

5. $\lambda (\vec{a} \pm \vec{\beta}) = \lambda \vec{a} \pm \lambda \vec{\beta}$

Γ. ΓΑΜΜΙΚΟΣ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Θεωρούμε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$

Γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$

αποτελείται κάθε διάνυσμα $\vec{x} = k\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$ με $k, \lambda \in \mathbb{R}$

Δ. ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΑΡΑΓΗΓΗΓΙΑΣ

Θεωρούμε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$

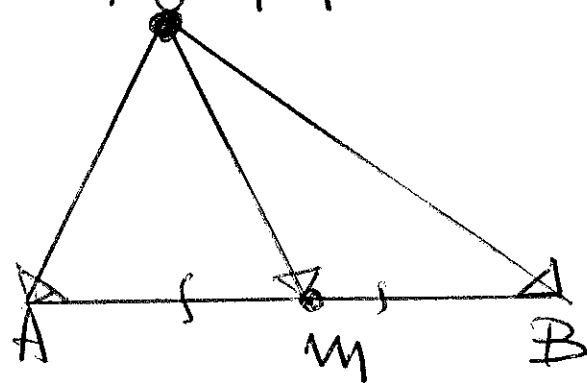
Είναι $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \iff \vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta} \text{ ή } \vec{\beta} = \lambda\vec{\alpha} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Ε. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΚΤΙΝΑ ΜΕΣΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ

Θεωρούμε Τμήτο Ακτίνας $\odot$

και διάνυσμα $\vec{AB}$ με μέσο M

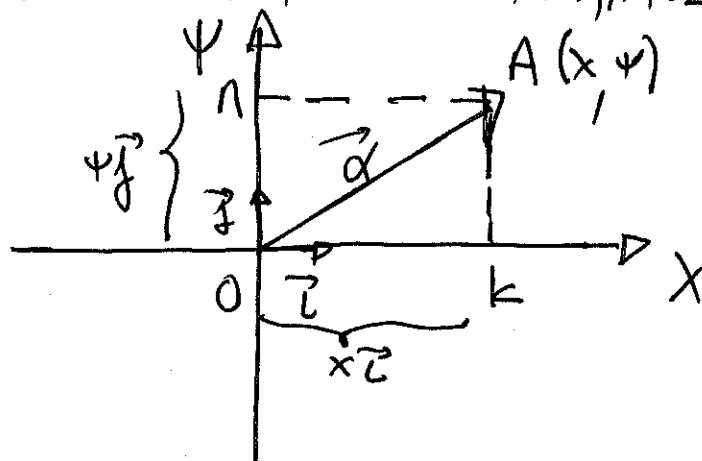
$$\text{Τότε } \vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}).$$



ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 1.4

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

1. ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ - Μέτρο Δυναμισμού



Θα πρέπει να γνωρίζουμε επίσης πως με τη βοήθεια των διανυσμάτων $\vec{i}, \vec{j}$

$$\text{I. Έτσι } \vec{OA} = \vec{OB} + \vec{BA} \Rightarrow \vec{OA} = \vec{OB} + \vec{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = (x, y)}$$

$$\text{II. Έτσι } \text{για } OA \Rightarrow (OA)^2 = (OB)^2 + (BA)^2$$

$$\Rightarrow (OA) = \sqrt{(OB)^2 + (BA)^2} \Rightarrow |\vec{OA}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

2. ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΜΟΣ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΤΡΑΝΣΦΟΡΜΩΝ - ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΗΣ

I. Θωρούμε 2 διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, \psi_1)$ $\vec{\beta} = (x_2, \psi_2)$
 και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

(α) Εύκολο $\lambda \vec{\alpha} = \lambda (x_1, \psi_1) = (\lambda x_1, \lambda \psi_1)$

(β) Εύκολο $\lambda \vec{\alpha} + \mu \vec{\beta} = \lambda (x_1, \psi_1) + \mu (x_2, \psi_2) = (\lambda x_1, \lambda \psi_1) + (\mu x_2, \mu \psi_2)$
 $= (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda \psi_1 + \mu \psi_2)$

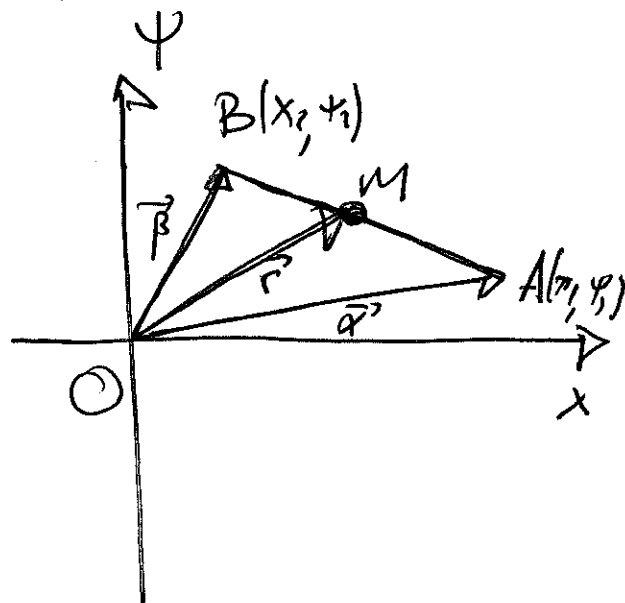
II. Εύκολο $\vec{OM} = \frac{1}{2} (\vec{OA} + \vec{OB})$

$\Rightarrow \vec{OM} = \frac{1}{2} [(x_1, \psi_1) + (x_2, \psi_2)] \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{OM} = \frac{1}{2} (x_1 + x_2, \psi_1 + \psi_2) \Rightarrow$

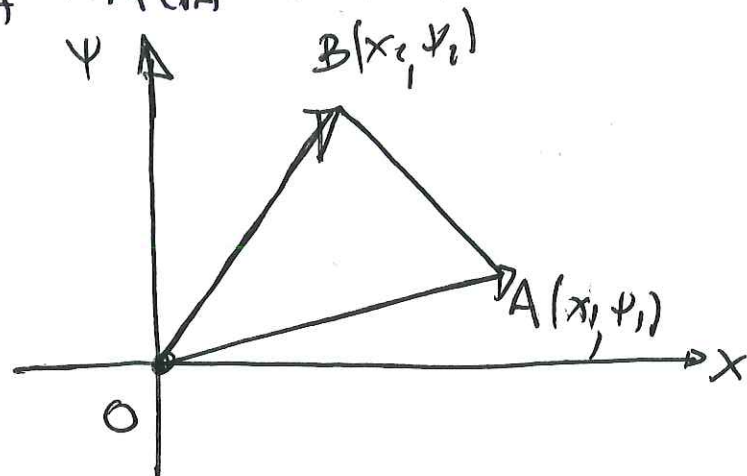
$\Rightarrow \vec{OM} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} \right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{OM} = (x, \psi) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} \right)$



3. ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ - ΜΕΤΡΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

Με ΓΝΩΣΤΑ ΑΝΤΙΣΤΑ



I. ΕΥΡΕΣΗ $\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} \Rightarrow \vec{AB} = -\vec{OA} + \vec{OB} \Rightarrow \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

$\Rightarrow \vec{AB} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) \Rightarrow \vec{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

$\Rightarrow \vec{AB} = (x, y) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

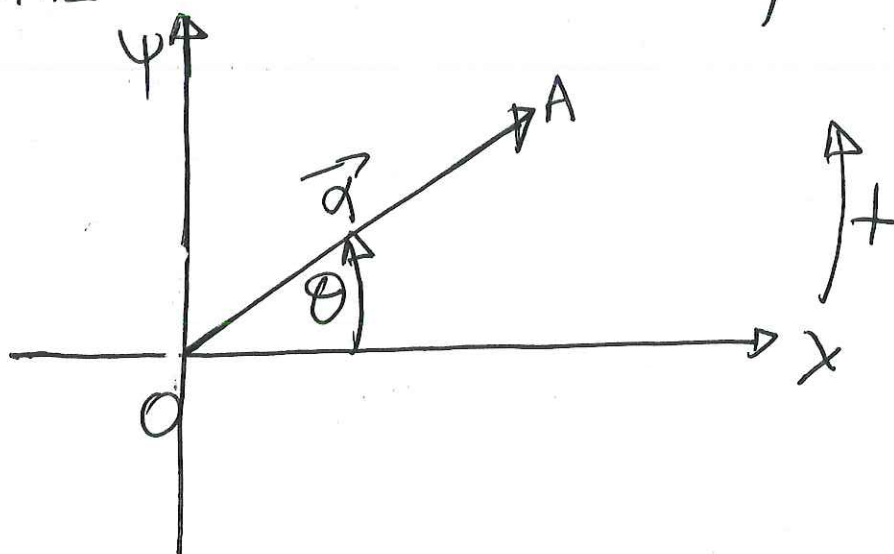
II. ΕΥΡΕΣΗ $|\vec{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow |\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

4. ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Θεωρούμε διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$

ΕΙΣΑΓΩΓΗ $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$

5. ΣΥΝΤΕΤΡΙΚΤΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ



ΟΡΙΣΜΟΣ 1

Θεωρούμε διάνυσμα $\vec{a} = (x, y)$

Γνωρίζουμε ότι το διάνυσμα $\vec{a}$ με την αξία x αντιστοιχεί στην συνιστώσα του διανύσματος $\vec{a}$ κατά την διεύθυνση της ημι-ευθείας Ox . Έτσι, έχουμε φράση: Μέχρι να συνήλθει με την ημιευθεία OA

$$\text{Είχα } (\vec{a}, Ox) = \theta \in [0, 2\pi)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2

Θεωρούμε διάνυσμα $\vec{a} = (x, y)$

Συντελεστής διεύθυνσης λ του διανύσματος $\vec{a}$

Ορίζεται: $\lambda = \frac{y}{x} = \tan \theta$

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 1.5

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

1. ΟΡΙΣΜΟΣ

Εσωτερικό Γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b}$

Ορίζεται:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{cases} |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\angle \vec{a}, \vec{b}) & , \vec{a} \neq \vec{0} \text{ ή } \vec{b} \neq \vec{0} \\ 0 & , \vec{a} = \vec{0} \text{ ή } \vec{b} = \vec{0} \end{cases}$$

2. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

I. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

II. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

III. $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

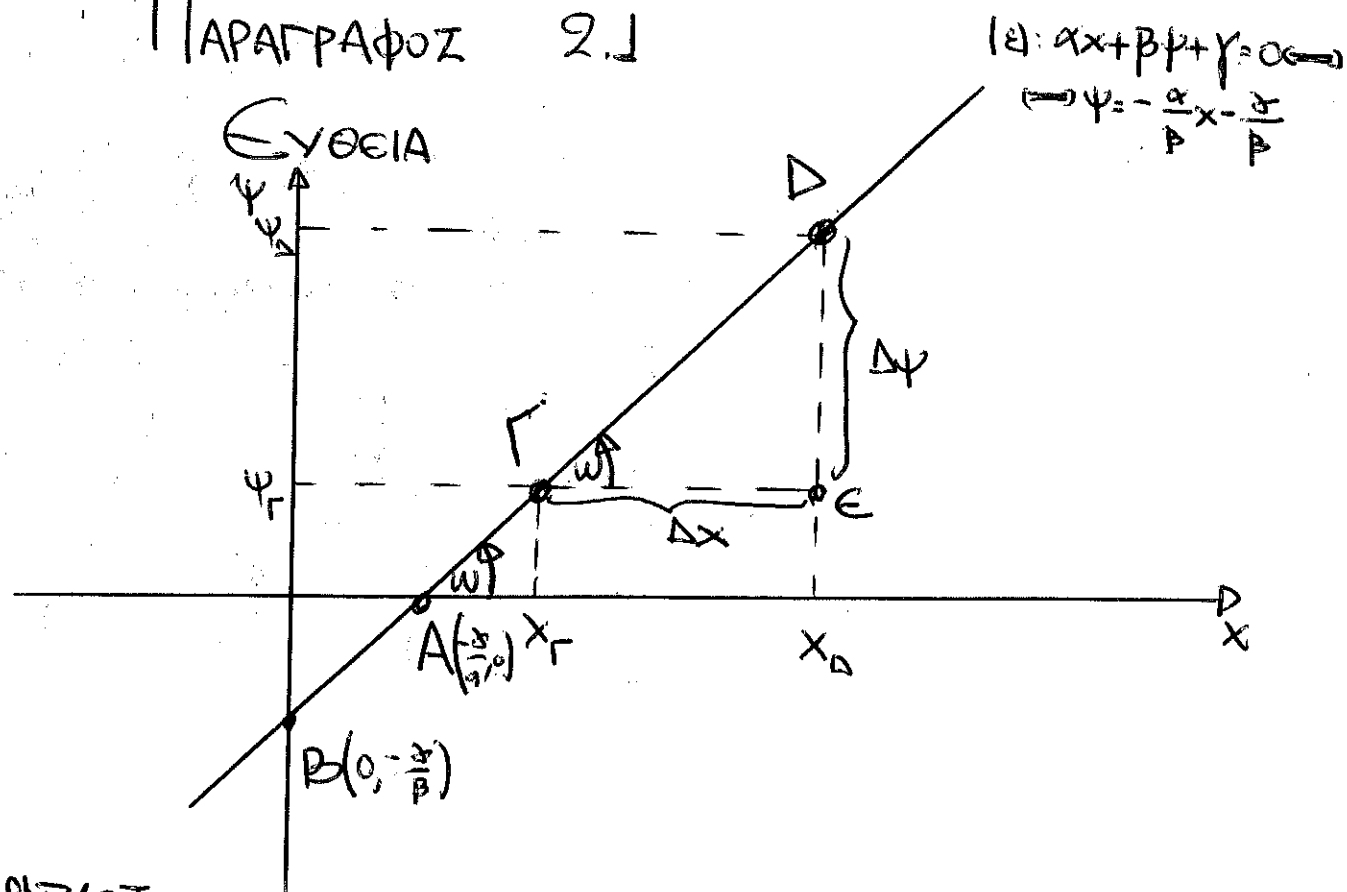
IV. $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = +|\vec{a}| |\vec{b}|$

V. $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}|$

VI. $\vec{a} = (x_1, y_1), \vec{b} = (x_2, y_2) \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$

VII. $\cos(\angle \vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 2.1



1. ΟΡΙΣΜΟΣ

Ευθεία ορίζεται το σύνολο των σημείων $M(x, y)$

των οποίων η σχέση της εξίσωσης l με μ επαίρει

$$(l): \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

ΕΙΔΗ (l): $l: \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \Leftrightarrow l: \psi = -\frac{\alpha}{\beta}x - \frac{\gamma}{\beta}$ (2)

2. ΣΧΕΛΙΑΣΜΟΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

(i) Τομές με τω α τω $x'x$

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \\ \psi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x + \beta \cdot 0 + \gamma = 0 \\ \psi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x + \gamma = 0 \\ \psi = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\gamma}{\alpha} \\ \psi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (-\frac{\gamma}{\alpha}, 0)$$

Από την l και τω $x'x$ στο Σ σημείο $A(-\frac{\gamma}{\alpha}, 0)$

α) Τοίχος με τω ατμά ψ'ψ

$$\begin{cases} \alpha x + \beta \psi + \gamma = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \cdot 0 + \beta \psi + \gamma = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta \psi + \gamma = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \psi = -\frac{\gamma}{\beta} \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x, \psi) = (0, -\frac{\gamma}{\beta})$$

Αρα η (ε) κορυφή τω ψ'ψ ε'ς τήκεν $\mathcal{B}(0, -\frac{\gamma}{\beta})$

3. Κλίση Εξόχιας

Ορισμός: Κλίση Εξόχιας (ε) ορίζεται ο σταθμός

λ'ος: Της κατασκευαστ. Μεταγωγής ποταμύ

Ορίζεται Μεταγωγή

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\epsilon_{1/4}} \text{ κλίση Εξόχιας (ε)}} &= \epsilon = \frac{\Delta \psi}{\Delta x} = \frac{\psi_{\Delta} - \psi_{\Gamma}}{x_{\Delta} - x_{\Gamma}} = \\ &= \frac{\left(-\frac{\alpha}{\beta} x_{\Delta} - \frac{\gamma}{\beta}\right) - \left(-\frac{\alpha}{\beta} x_{\Gamma} - \frac{\gamma}{\beta}\right)}{x_{\Delta} - x_{\Gamma}} = \frac{-\frac{\alpha}{\beta} x_{\Delta} - \frac{\gamma}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} x_{\Gamma} + \frac{\gamma}{\beta}}{x_{\Delta} - x_{\Gamma}} = \\ &= \frac{-\frac{\alpha}{\beta} x_{\Delta} + \frac{\alpha}{\beta} x_{\Gamma}}{x_{\Delta} - x_{\Gamma}} = \frac{-\frac{\alpha}{\beta} (x_{\Delta} - x_{\Gamma})}{x_{\Delta} - x_{\Gamma}} = -\frac{\alpha}{\beta} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{κλίση Εξόχιας (ε)} = \lambda \epsilon = \frac{\Delta \psi}{\Delta x} = -\frac{\alpha}{\beta} \quad (1)$$

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟ 2.2

ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΠΑΡΑΓΓΗΓΟ - ΚΑΘΕΤΟ ΣΕ ΕΥΘΕΙΑ

Θεωρούμε την Εύθεια (ε): $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$

$$\iff (ε): \psi = -\frac{A}{B}x - \frac{\Gamma}{B} \quad A \neq 0 \text{ ή } B \neq 0$$

$$\text{Κλίση Εύθειας } (ε): \lambda_{\varepsilon} = -\frac{A}{B} \quad \text{με } B \neq 0$$

$$\text{I. Διανύσμετα } \vec{\delta} \parallel \varepsilon \iff \lambda_{\vec{\delta}} = \lambda_{\varepsilon} \text{ και } \vec{\delta} = (B, -A)$$

$$\text{II. Διανύσμετα } \vec{\eta} \perp \varepsilon \iff \lambda_{\vec{\eta}} \cdot \lambda_{\varepsilon} = -1 \text{ και } \vec{\eta} = (A, B)$$

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟ 2.3

ΑΠΟΚΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΠΟ ΕΥΘΕΙΑ - ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

1. Θεωρούμε Εύθεια (ε): $Ax + By + \Gamma = 0$ και Σημείο

$$M_0(x_0, y_0) \notin (ε)$$

$$\text{τότε } d(M_0, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$2. \text{Εμβαδόν } \triangle_{\text{πίλ}} ABC = E_{ABC} = \frac{1}{2} |\det(\vec{AB}, \vec{AC})|$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

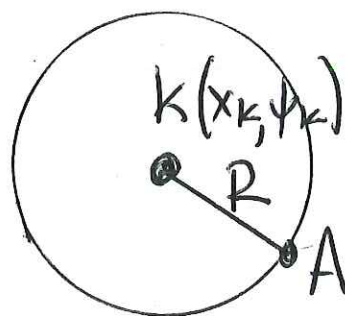
ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 3.1

ΚΥΚΛΟΣ

Α. ΟΡΙΣΜΟΣ

Κυκλος $\omega(k(x_k, y_k), R)$



με κέντρο $K(x_k, y_k)$ και ακτίνα R ορίζεται το

σύνολο των σημείων $M(x, y)$ των οποίων η

απόσταση από το $\mathbb{R}^2$ -σηείο K , $\mathbb{R}^2$ -απόσταση

απόσταση R

$$T. M(x, y) \in \omega(k(x_k, y_k), R) \iff (x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 = R^2$$

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΚΥΚΛΩΝ

1. Η Εφαρμογή του $(K(x_k, y_k), R)$ ή K_{CTR} το $\overline{K}_{CTR}$ $K(x_k, y_k)$ με Ακτίνα R είναι:

$$1a) (x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 = R^2$$

2. Η Εφαρμογή του $(K(0,0), R)$ ή K_{CTR} το $\overline{K}_{CTR}$ $K(0,0)$ με Ακτίνα R είναι:

$$1a) x^2 + y^2 = R^2$$

3. Η Εφαρμογή του $(K(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}), R)$ ή K_{CTR} το $\overline{K}_{CTR}$ $K(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$ με Ακτίνα $R = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$

$$1a) \left(x - \left(-\frac{A}{2}\right)\right)^2 + \left(y - \left(-\frac{B}{2}\right)\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}\right)^2 \iff$$

$$1a) \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}\right)^2 \iff$$

$$1a) x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0 \quad \text{με} \quad A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$$

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΕΦΑΓΤΟΜΕΝΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ ΚΥΚΛΟΥ

1. Η Εφωση της Εφαγτομένης Εωκας κυκω (κ(x_k, y_k), R)
στο α/εο A(x_A, y_A) ∈ (c) ε/κ:

$$(Εφγπ): (x - x_k)(x_A - x_k) + (y - y_k)(y_A - y_k) = R^2$$

2. Η Εφωση της Εφαγτομένης Εωκας κυκω (κ(0, 0), R)

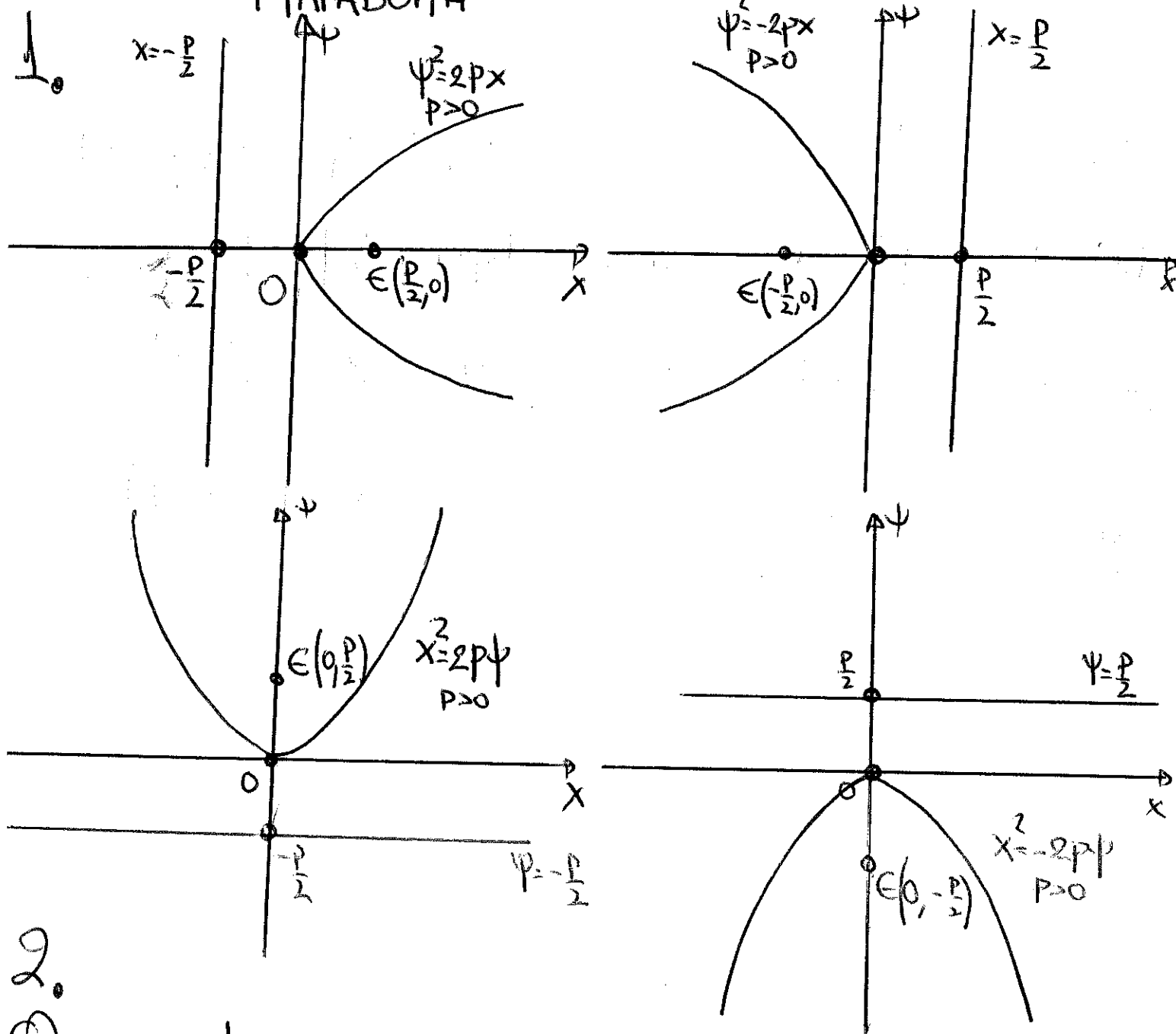
στο α/εο A(x_A, y_A) ∈ (c) ε/κ:

$$(Εφγπ): x x_A + y y_A = R^2$$

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ

3.2

ΠΑΡΑΒΟΛΗ



2.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1:

Παραβολή ΙΑ: με εστία ϵ και διεύθετωση δ ορίζεται το ζεύγος $T_{\psi} T_{\psi\delta}$ των T_{ψ} και $T_{\psi\delta}$ των ελλειψών ην ψ ορίζουν από το $T_{\psi\delta}$ $T_{\psi\delta}$ $T_{\psi\delta}$ ϵ και T_{ψ} $T_{\psi\delta}$ $T_{\psi\delta}$ δ

3. Η Εξίσωση Της Εφαρμογής Έχοντας στο υπόψιν
 $A(x_A, \psi_A)$ Της Παράδοξης

(I) (c): $\psi^2 = 2p x$ Ενώ: (Εφαρτ): $\psi_A \psi = p(x_A + x)$

(II) (c): $\psi^2 = -2p x$ Ενώ (Εφαρτ): $\psi_A \psi = -p(x_A + x)$

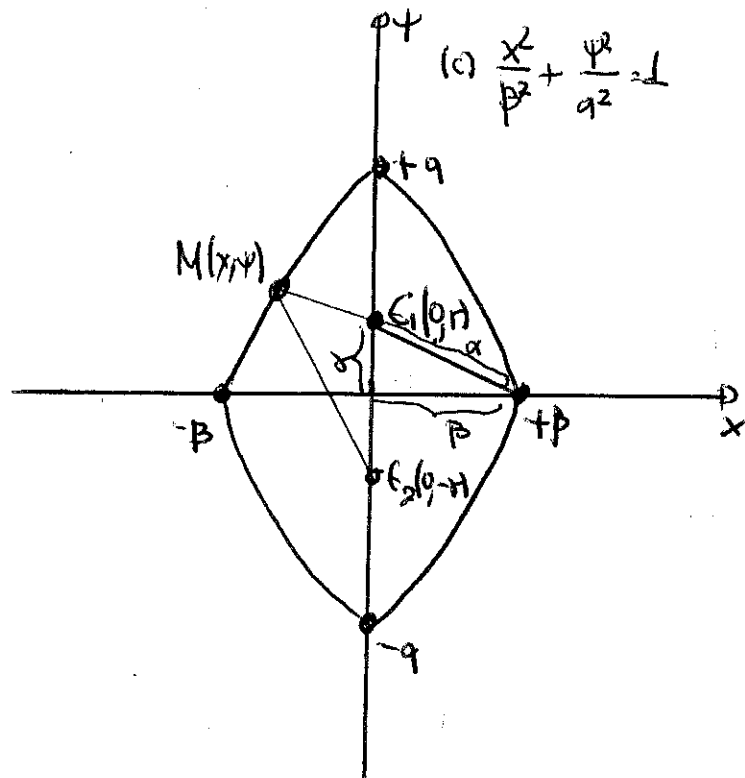
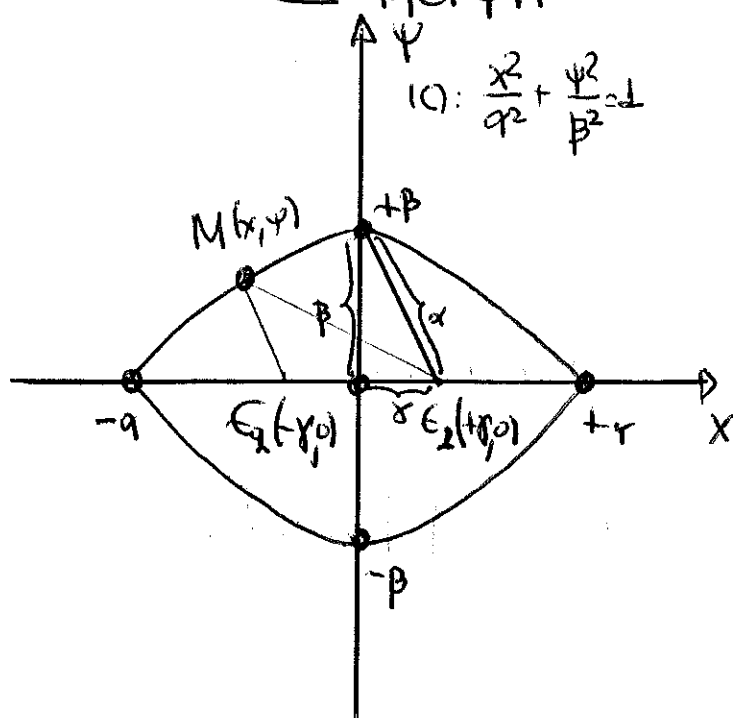
(III) (c): $x^2 = 2p \psi$ Ενώ (Εφαρτ): $x_A x = p(\psi_A + \psi)$

(IV) (c): $x^2 = -2p \psi$ Ενώ (Εφαρτ): $x_A x = -p(\psi_A + \psi)$

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 3.3

ΕΠΙΛΕΨΗ

$$(1): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



1. ΟΡΙΣΜΟΣ

Ελλειψη (1) ονομάζεται το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία F_1, F_2 και σταθερό είναι ίσο με $2a$

Δηλαδή: Το $M(x, y) \in \text{Ελλειψ. (1)} \iff d(M, F_1) + d(M, F_2) = 2a$

$$\iff \begin{cases} (1) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, & b^2 = a^2 - r^2 \\ (2) \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, & b^2 = a^2 - r^2 \end{cases}$$

2. ΕΚΚΕΝΤΡΟΤΗΤΑ Ελλειψης

Εκκεντρότητα της Ελλειψης (e) ορίζεται ως το λόγο

$$e = \frac{\alpha}{a} < 1 \quad \text{και} \quad \gamma = \sqrt{a^2 - b^2}$$

(I). $e \rightarrow 0 \Rightarrow$ Ελλειψη (e) $\rightarrow$ κύκλος (e)

(II). $e \rightarrow 1 \Rightarrow$ Ελλειψη (e) $\rightarrow$ Ελλειψοειδές τμήμα

3. ΕΙΣΡΟΖΗ Εφαρμογών ΕΥΘΕΑΣ Σημειών

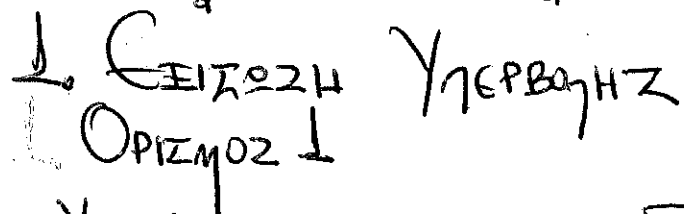
Η Είσοδος της Εφαρμογής Εύρους (Εφαπ) στο
Σημείο $M(x_m, y_m)$ της Ελλειψης (e) είναι:

(I) (e): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Είνα: (Εφαπ): $\frac{x_m x}{a^2} + \frac{y_m y}{b^2} = 1$

(II) (e): $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ Είνα (Εφαπ): $\frac{x_m x}{b^2} + \frac{y_m y}{a^2} = 1$

3.4

4


$$\Delta t \neq 0 \quad \text{To } M(x, y) \in Y, \varphi \in \mathcal{D}_Y, 1 \leq i \leq n \iff |d(M, E_1) - d(M, E_2)| = 2\varphi.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} \text{(a)}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \beta^2 = \gamma^2 - a^2, \quad a < \gamma \\ \text{(b)}: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{\beta^2} = 1, \quad \beta^2 = \gamma^2 - a^2, \quad a < \gamma \end{array} \right.$$

2. ΕΚΚΕΝΤΡΟΤΗΤΑ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ

Ορισμός 2: Εκκεντρότητα Υπερβολής ϵ ορίζεται ως

$$I_T - \Pi_0 \quad \lambda_{\Pi_0} \quad \epsilon = \frac{\delta}{a} > 1$$

3. ΕΙΣΟΔΗ ΕΦΑΝΤΟΜΕΩΝΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ

Η Είσοδος της Εφαπτομένης Ευθείας (εφαπτή) στο Σημείο $M(x_M, y_M)$ της Υπερβολής (c) είναι:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(I). (c)} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \underline{\text{είναι}} \quad (\text{εφαπτή}) : \frac{x_M x}{a^2} - \frac{y_M y}{b^2} = 1 \\ \text{(II). (c)} \quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad \underline{\text{είναι}} \quad (\text{εφαπτή}) : \frac{y_M y}{a^2} - \frac{x_M x}{b^2} = 1 \end{array} \right.$$

4. ΑΣΥΜΠΤΟΤΕΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ

Οι Ασύμπτωτες Ευθείας της Υπερβολής (c) είναι

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(I). (c)} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \underline{\text{είναι}} \quad (\text{Ασύμπτ}) \quad y = \pm \frac{b}{a} x \\ \text{(II). (c)} : \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad \underline{\text{είναι}} \quad (\text{Ασύμπτ}) : y = \pm \frac{a}{b} x \end{array} \right.$$