

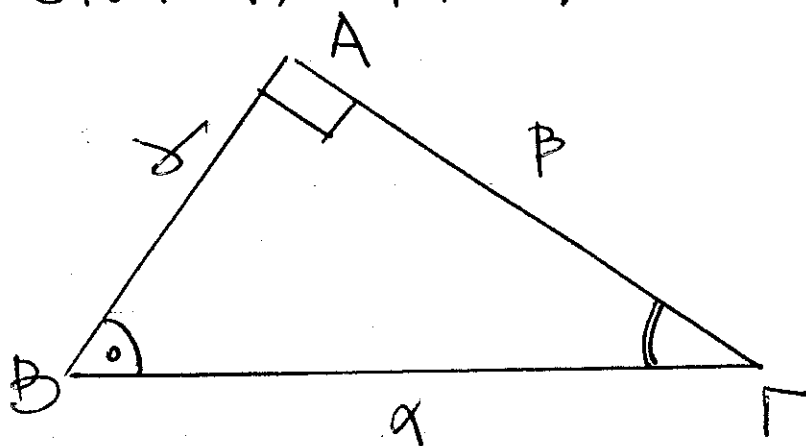
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟ 3.1

1. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ

Ορθογώνιο Τρίγωνο



Ορισμοί

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας ω

Ορθογώνιο Τρίγωνο ABC Ορίζονται ως οι
Σταθεροί Αριθμοί

I. Ημίτονο (ω) = $\eta\mu\omega = \frac{\text{Αντίκathη Κathη Πλευρ.}}{\text{Υποκathητ.}}$

$$\eta\mu B = \frac{AC}{BC} = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\eta\mu \Gamma = \frac{AB}{BC} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

II. Συνημιτόνο $(\omega) = \sigma\omega\omega = \frac{\text{Προκείμενη κάθετη Πλευρά}}{\text{Υποτιμήνα}}$

$$\sigma\omega B = \frac{AB}{BG} = \frac{\alpha}{\alpha}$$

$$\sigma\omega \Gamma = \frac{AG}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}$$

III. Εφαρμομένη $(\omega) = \epsilon\phi\omega = \frac{\text{Αγνώστη κάθετη Πλευρά}}{\text{Προκείμενη κάθετη Πλευρά}}$

$$\epsilon\phi B = \frac{AG}{AB} = \frac{\beta}{\alpha}$$

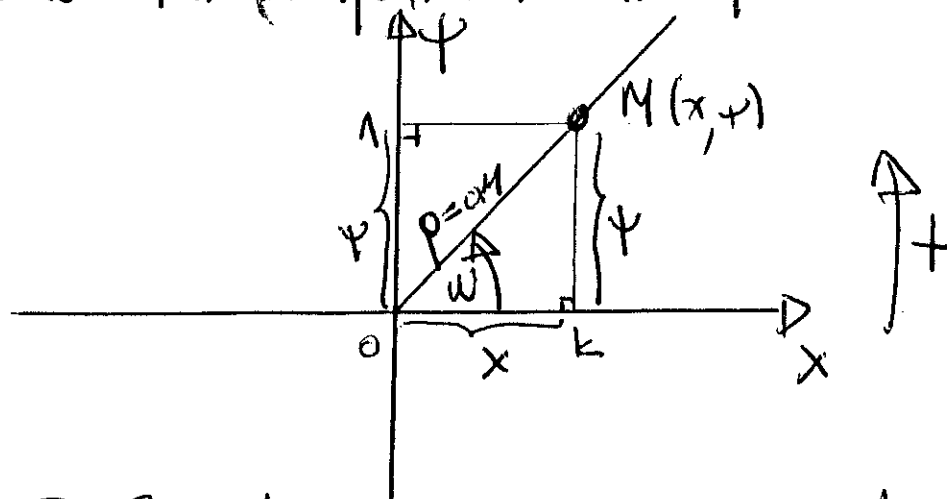
$$\epsilon\phi \Gamma = \frac{AB}{AG} = \frac{\alpha}{\beta}$$

IV. Συνεφαρμομένη $(\omega) = \sigma\phi\omega = \frac{\text{Προκείμενη κάθετη Πλευρά}}{\text{Αγνώστη κάθετη Πλευρά}}$

$$\sigma\phi B = \frac{AB}{AG} = \frac{\alpha}{\beta}$$

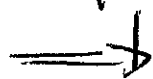
$$\sigma\phi \Gamma = \frac{AG}{AB} = \frac{\beta}{\alpha}$$

2. Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Γωνίας Από Περίοδο

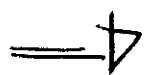


Εφοδισάμε το Εγινεδο με καρτεσιανά αστήτη
δωτεταγμένων x, y

και θεωρήσει ότι ο Θέστος Ηλεκτρώας θx περι-
στρεφεται, εστω κατά την Θέσση ϕ γωνία



Διηλεκτρικού ϵ της Απρόσπλη Γωνίας ω με
ήλκρες, για Αρκετή και Τέληση Θέση ω θx



Θεωρήσει Τυχόν σημείο $M(x, y)$ στην Τέληση η γωνία
της γωνίας ω



→ Οι Τριγωνομετρικοί Αριθμοί ως Εξ. Πρωτογενείς
χάνει ω υφίσταται:

$$\text{I. Ημιτόνο } (\omega) = \eta\mu\omega = \frac{MK}{OM} = \frac{\Psi}{P}$$

$$\text{II. Συνήμιτονο } (\omega) = \epsilon\sigma\eta\omega = \frac{OK}{OM} = \frac{X}{P}$$

$$\text{III. Εφαρμογή } (\omega) = \epsilon\phi\omega = \frac{MK}{OK} = \frac{\Psi}{X}$$

$$\text{IV. Συνεφαρμογή } (\omega) = \epsilon\phi\omega = \frac{OK}{MK} = \frac{X}{\Psi}$$

$$\text{για } P = \sqrt{X^2 + \Psi^2}$$

Θεωρούμε τον Τριγωνομετρικό κύκλο (C) (O, ρ) που έχει Κέντρο
την Αρχή $O(0,0)$ του συστήματος xOy και Ακτίνα $\rho=1$

(1)

• Για το ημω έχουμε:

$$T_{\text{ριγ}} M K O \Rightarrow \eta \mu \hat{MOK} = \frac{(MK)}{(MO)} \Rightarrow \eta \mu \omega = \frac{\psi}{P} \Rightarrow \eta \mu \omega = \frac{\psi}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta \mu \omega = \psi$$

Οπότε: Αξονας $\psi' \psi =$ Αξονας Ημιτονων

II. Για το συνω έχουμε:

$$T_{\text{ριγ}} M K O \Rightarrow \sigma \omega \hat{MOK} = \frac{(KO)}{(MO)} \Rightarrow \sigma \omega \omega = \frac{x}{P} \Rightarrow \sigma \omega \omega = \frac{x}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma \omega \omega = x$$

Οπότε: Αξονας $x'x =$ Αξονας Συνημιτονων

III. Για την εφω έχουμε:

$$T_{\text{ριγ}} M K O \Rightarrow \epsilon \phi \hat{MOK} = \frac{(MK)}{(KO)} \Rightarrow \epsilon \phi \omega = \frac{\psi}{x} \quad (1)$$

$$T_{\text{ριγ}} M K O \sim T_{\text{ριγ}} T A O \Rightarrow \frac{(MK)}{(TA)} = \frac{(MO)}{(TO)} = \frac{(KO)}{(AO)} \Rightarrow \frac{\psi}{(TA)} = \frac{P}{(TO)} = \frac{x}{P} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\psi}{(TA)} = \frac{x}{P} \Rightarrow \frac{\psi}{(TA)} = \frac{x}{1} \Rightarrow (TA) = \frac{\psi}{x} \quad (2)$$

$$(1)(2) \Rightarrow \epsilon \phi \omega = (TA) = \frac{\psi}{x}$$

Οπότε: Εφαπτομένη Ευθεία $(\epsilon_1) =$ Αξονας Εφαπτομένων

IV. Για την σφω έχουμε:

$$T_{\text{ριγ}} M K O \Rightarrow \sigma \phi \hat{MOK} = \frac{(KO)}{(MK)} \Rightarrow \sigma \phi \omega = \frac{x}{\psi} \quad (3)$$

$$T_{\text{ριγ}} M K O \sim T_{\text{ριγ}} \Sigma B O \Rightarrow \frac{(MK)}{(\Sigma B)} = \frac{(MO)}{(\Sigma O)} = \frac{(KO)}{(BO)} \Rightarrow \frac{x}{(\Sigma B)} = \frac{P}{(\Sigma O)} = \frac{\psi}{P} \Rightarrow$$

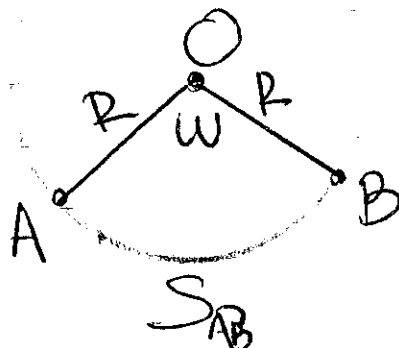
$$\Rightarrow \frac{x}{(\Sigma B)} = \frac{\psi}{P} \Rightarrow \frac{x}{(\Sigma B)} = \frac{\psi}{1} \Rightarrow (\Sigma B) = \frac{x}{\psi} \quad (4)$$

$$(3)(4) \Rightarrow \sigma \phi \omega = (\Sigma B) = \frac{x}{\psi}$$

Οπότε: Εφαπτομένη Ευθεία $(\epsilon_2) =$ Αξονας Συνεφαπτομένων

4. ΜΕΤΡΟ ΓΩΝΙΑΣ Ή ΑΚΤΙΝΙΑ

1c) $(0, R)$



ΟΡΙΣΜΟΙ

1. Το Μέτρο Γωνίας ω σε Ακτίνια ορίζεται ως ο Ισάριθμος λόγος του μήκους τόξου S_{AB} προς της Ακτίνα R του κύκλου 1c) $(0, R)$

$$\text{Μέτρο Γωνίας } \hat{AOB} \text{ σε Ακτίνια} = (\hat{AOB})_{\text{ακτίνια}} = \frac{S_{AB}}{R}$$

2. 1 (Ενα) Ακτίνιο είναι το Μέτρο της Γωνίας u που έχει μήκος τόξου S_{AB} ίσον με της Ακτίνα R του κύκλου 1c) $(0, R)$

$$\text{Μέτρο Γωνίας } \hat{AOB} \text{ σε Ακτίνια} = (\hat{AOB})_{\text{ακτίνια}} = \frac{S_{AB}}{R} = 1$$

$$\iff S_{\hat{AOB}} = R$$

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 3.2

ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

$$1. \eta^2 \omega + \epsilon^2 \omega = 1$$

$$2. \epsilon \phi \omega = \frac{\eta \omega}{\sigma \omega}$$

$$3. \sigma \phi \omega = \frac{\epsilon \omega}{\eta \omega}$$

$$4. \epsilon \phi \omega \cdot \sigma \phi \omega = 1$$

$$5. \eta^2 \omega = \frac{\epsilon^2 \omega}{\epsilon^2 \omega + 1}$$

$$6. \epsilon^2 \omega = \frac{1}{\epsilon^2 \omega + 1}$$

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 3.4

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = \eta\mu x$

Θεωρούμε την συνάρτηση f με ως $f(x) = \eta\mu x$

1. Πεδίο Ορισμού: $D_{f(x)} = \mathbb{R}$

2. Τιμές Τιμών: $R_{f(x)} = [-1, +1]$

3. Περιοδικότητα: η f είναι συνάρτηση Περιοδική με Περίοδο $T = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ και Βασική Περίοδο $T_0 = 2\pi$

4. Αρτία-Περιττότητα: η f είναι συνάρτηση Περιττή στο $D_{f(x)} = \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ η f έχει κέντρο Συμμετρίας α $O(0,0)$

5. Μονοτονία: η f συνάρτηση

γίνεται φθίνουσα στο $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$ και

γίνεται αύξουσα στο $[0 + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi] \cup [\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$

6. Ακρόαση: 1 Εύρεση f

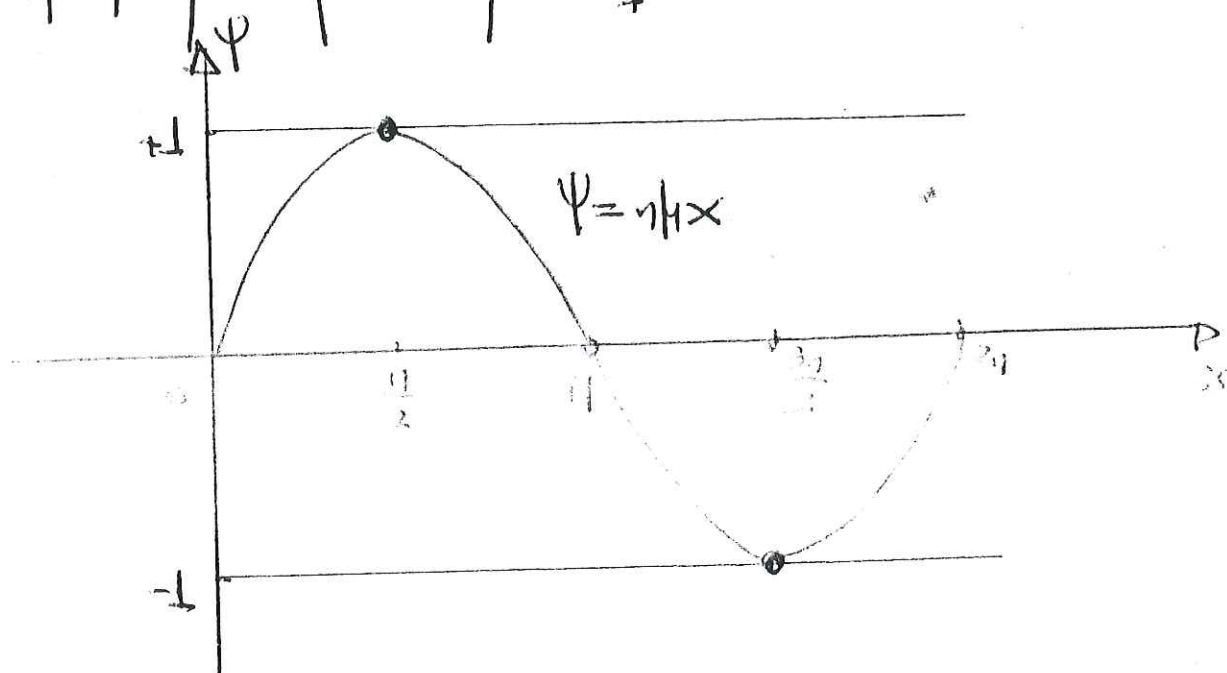
οτι οταν $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ λαμβανει Ελάχιστη τιμή

$$f_{\min} = -1$$

οτι οταν $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ λαμβανει Μεγιστη τιμή

$$f_{\max} = +1$$

7. Γραφική Παράσταση ψ



2. ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = \sin x$

Θεωρούμε την συνάρτηση f με ως $f(x) = \sin x$

1. Πεδίο Ορισμού $D_{f(x)} = \mathbb{R}$

2. Ζωγό Τιμή $R_{f(x)} = [-1, 1]$

3. Περιοδικότητα η f συνάρτηση Περιοδική με

Περίοδο $T = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ και Βασική Περίοδο $T_0 = 2\pi$

4. Απειρο-Περίττη: η f συνάρτηση Απειρο στο $D_{f(x)}$

$\Rightarrow$ η f έχει Αξία Ζητήσεως αν ψψ

5. Μονοτονία: η f συνάρτηση

στην φθίνουσα στο $[0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi]$

η f στην αυξανουσα στο $[\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$

6. Ακρόαση: η συνάρτηση f

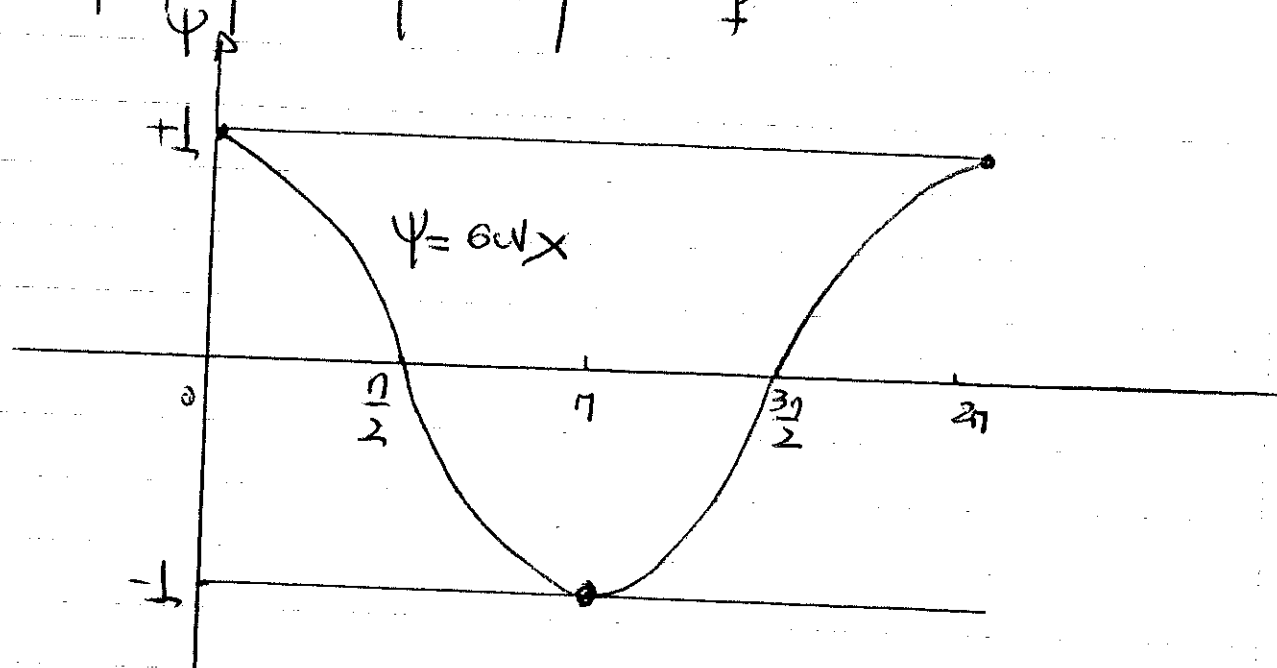
σας στους $x = \pi + 2k\pi$ λαμβάνει Ελάχιστη Τιμή

$$f_{\min} = -1$$

σας στους $x = 0 + 2k\pi$ λαμβάνει Μέγιστη Τιμή

$$f_{\max} = +1$$

7. Γραφική Παράσταση ψ



Notes:

3. ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = \exp x$

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $f(x) = \exp x$

1. Πεδίο Ορισμού: $D_{f(x)} = \mathbb{R} - \{ \lambda n + n/2 \mid \lambda \in \mathbb{Z} \}$

2. Τιμή στο 0: $R_{f(x)} = \mathbb{R}$

3. Περιοδικότητα: η f συνάρτηση περιοδική με
Περίοδο $T = k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$ και Βασική Περίοδο $T_0 = \pi$

4. Αρτια-Περιττή: η f συνάρτηση Περιττή στο
 $D_{f(x)}$

→ η f έχει Κέντρο Συμμετρίας το $O(0,0)$

5. Μονοτονία: η f συνάρτηση γνησίως αύξουσα

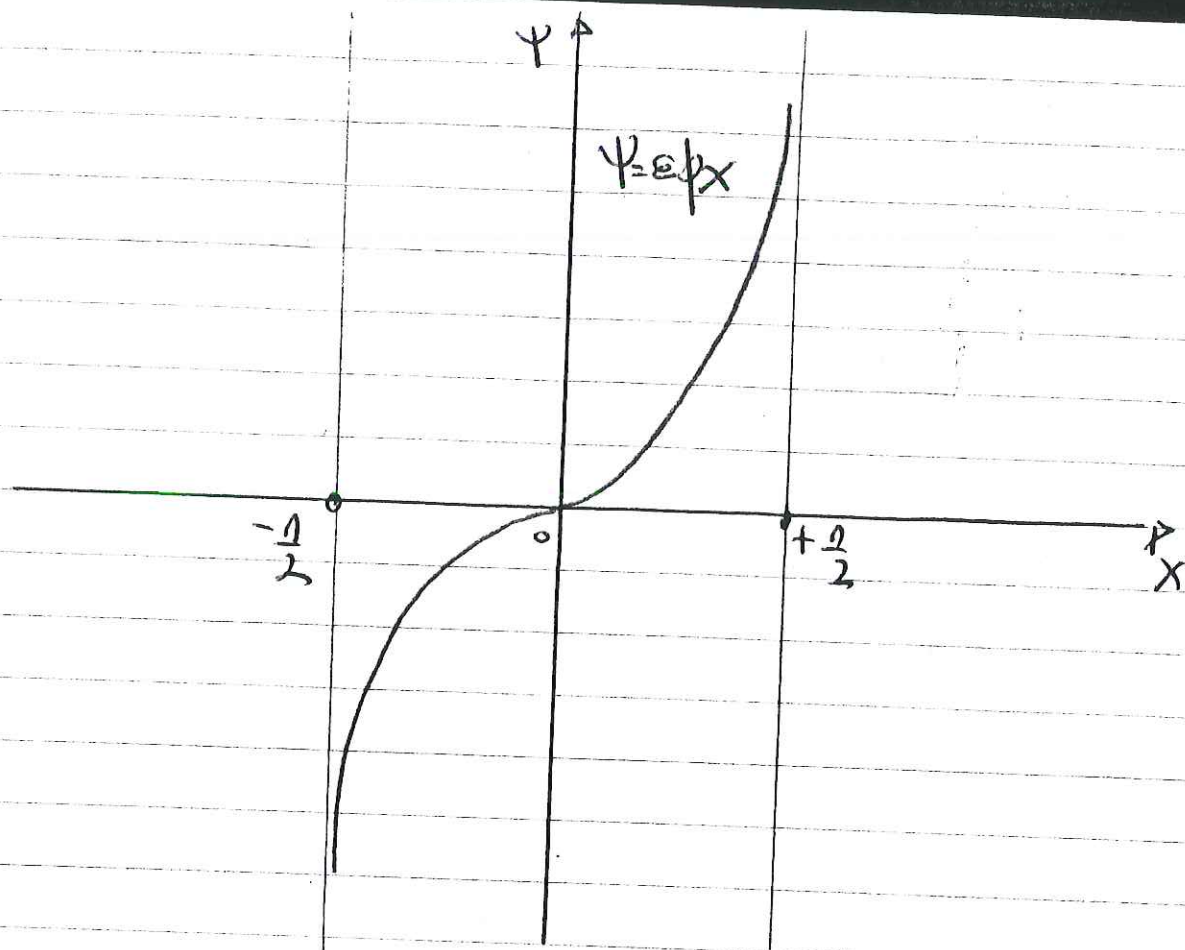
σε $D_{f(x)}$

6. Ακρόαση: η συνάρτηση f δεν λαμβάνει

Ακρόαση αλυσ σε $D_{f(x)}$

7. Γραφική Παράσταση f

Εκπαιδευτική



Notes:

4. ΔΥΝΑΜΩΤΗΤΗ $f(x) = \exp x$

Θεωρούμε την συνάρτηση f με $\exp f(x) = \exp x$

1. Πεδίο Ορισμών: $D_{f(x)} = \mathbb{R} - \{ \lambda \pi \mid \lambda \in \mathbb{Z} \}$

2. Τιμή Συνάρτησης $R_{f(x)} = \mathbb{R}$

3. Περιοδικότητα: η f συνάρτηση περιοδική με

Περίοδο $T = k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$ και Βασική Περίοδο $T_0 = \pi$

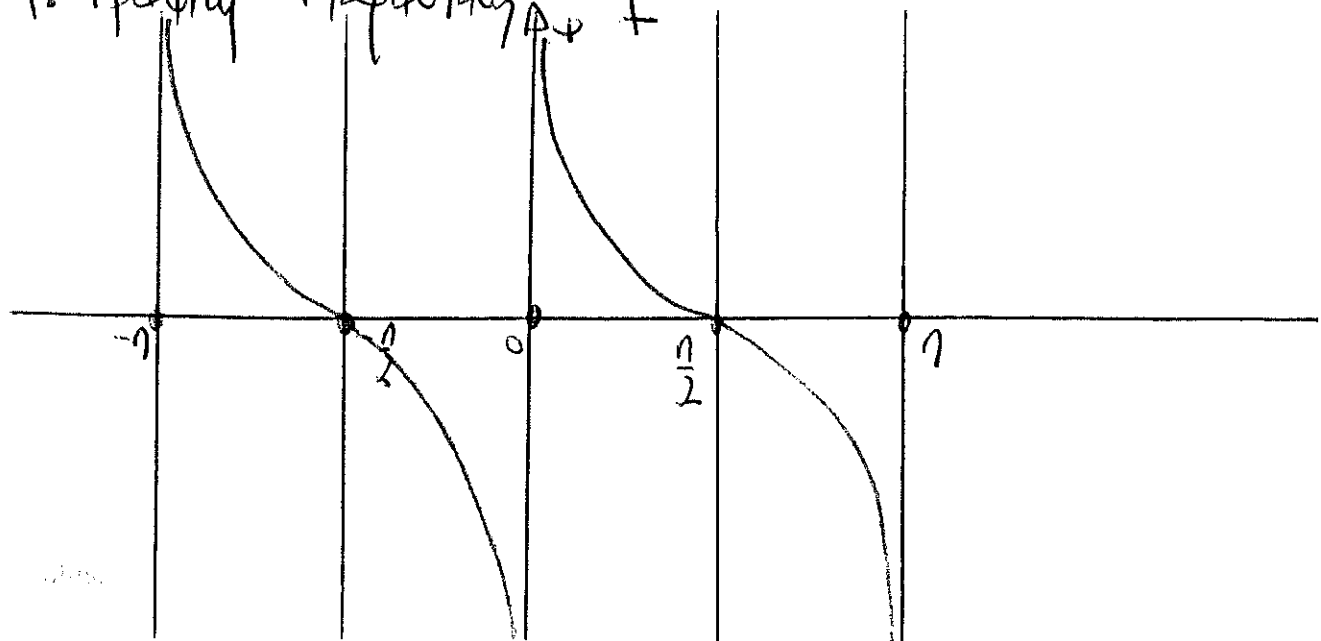
4. Απειρα-Ποικύλη: η f συνάρτηση ποικύλη στο $D_{f(x)}$
= η f έχει κενό σύνθετο στο $(0, \infty)$

5. Μονωτική: η f συνάρτηση γνησίως φθίνουσα στο $D_{f(x)}$

6. Ακρόαση: η συνάρτηση f δεν λαμβάνει Ακρόαση

7. Τιμή στο $D_{f(x)}$

7. Γραφική Παράσταση f



Ασκηση 1

Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x) = 3\eta\mu 2x$

Θεωρούμε την συνάρτηση f με ως $f(x) = 3\eta\mu 2x$

1. Πεδίο Ορισμού: $D_{f(x)} = \mathbb{R}$

2. Τιμή Τύπου $R_{f(x)} = [-3, +3]$

3. Περιοδικότητα: η f Περιοδική με Περίοδο

$T = 2\pi/2 = \pi$ $k \in \mathbb{Z}$ και Βασική Περίοδο $T_0 =$

4. Αρρα-Περιττή: η f Περιττή σε $D_{f(x)} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ f έχει βελύκο συστροφής $O(0,0)$

5. Μονοτονία: η f είναι:

α) γνησίως φθίνουσα σε διαστήματα $[\pi/4, 3\pi/4]$

β) γνησίως αυξανόμενη σε διαστήματα $[0, \pi/4 + k\pi] \cup [3\pi/4 + k\pi, \pi + k\pi]$

6. Ακρόατα: η f έχει θέσεις $x = \pi/4 + k\pi$

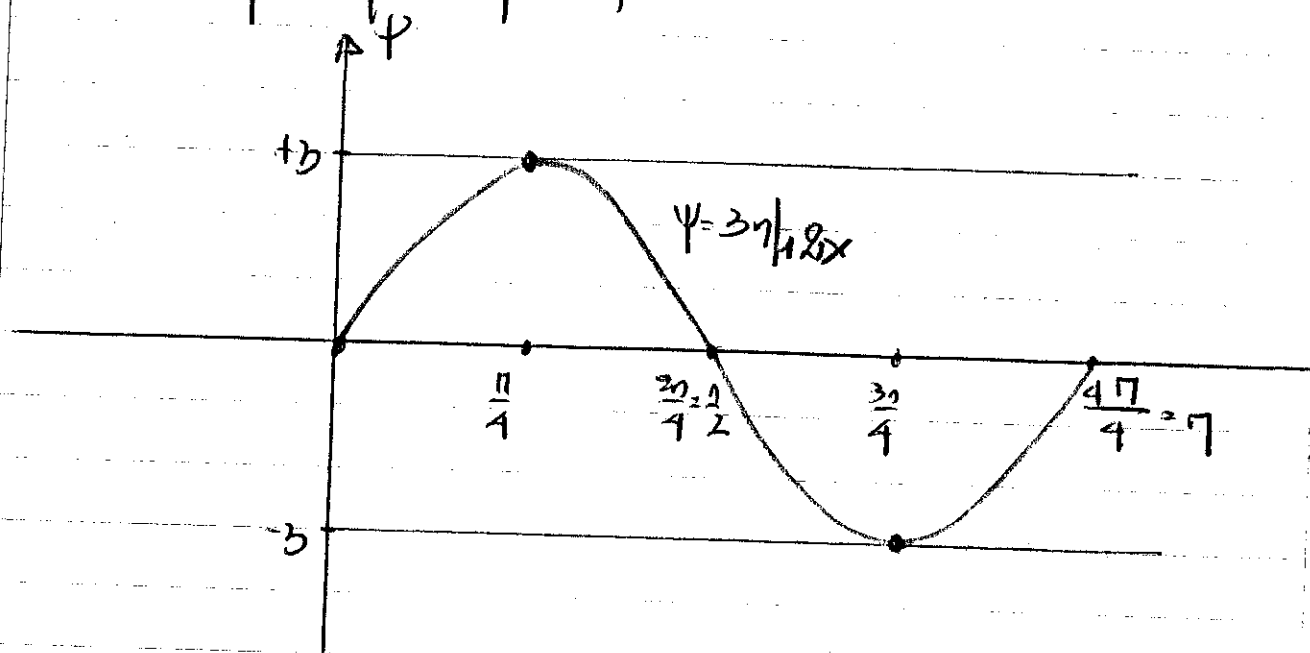
λειτουργία Ελάχιστης Τύπου $f_{\min} = -3$

και στις θέσεις $x = \pi/4 + k\pi$

λειτουργία Μέγιστης

τύπου $f_{\max} = +3$

7. Графік Нерасу ψ



ΑΣΚΗΣΗ 2

Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x) = -3\omega \frac{x}{2}$

Θεωρούμε την συνάρτηση f με τύπο $f(x) = -3\omega \frac{x}{2}$

$$\Rightarrow f(x) = -3\omega \left(\frac{1}{2} \cdot x\right)$$

1. Πεδίο Ορισμού $D_{f(x)} = \mathbb{R}$

2. Τιμή $R_{f(x)} = [-3, +3]$

3. Περίοδος: f Περίοδος με Περίοδο

$$T = 2k\pi / \frac{1}{2} \Rightarrow T = 4k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \text{ και βάζουμε περίοδο}$$

$$T_0 = 4\pi$$

4. Απειρα - Πεπερασ: η f Απειρα στο $D_{f(x)}$ $\rightarrow$

οχι, f δεν είναι απειρα οπουδήποτε στο $\mathbb{R}$

5. Μονοτονία: η f είναι

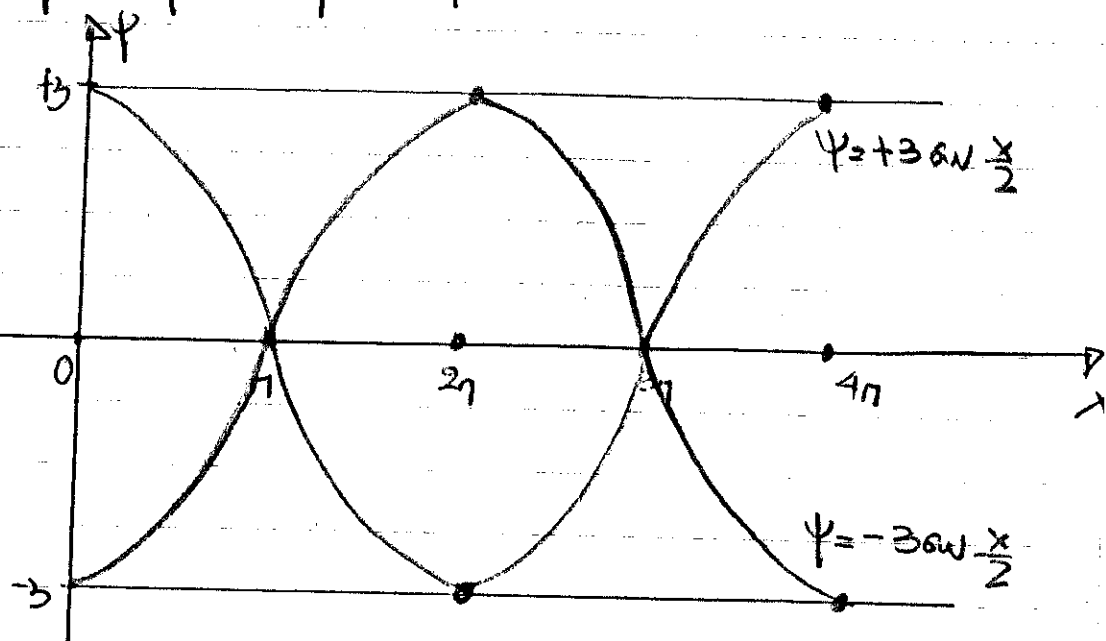
στην φθίνουσα στο διαστήμα $[2\pi + 4k\pi, 4\pi + 4k\pi]$

στην αύξουσα στο διαστήμα $[0 + 4k\pi, 2\pi + 4k\pi]$

6. Ακρόατα: η f στα $x = 0 + 4k\pi$ λαμβάνει $f_{\max} = -3$

και στα $x = 2\pi + 4k\pi$ λαμβάνει $f_{\min} = +3$

7. Графики напряжений ψ



ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

A. ΟΡΙΣΜΟΣ

Θεωρούμε πραγματική συνάρτηση f ($f(x) \in \mathbb{R}$) με
πραγματικές μεταβλητές x ($x \in \mathbb{R}$) με ηδίο ορισμού
 $D_{f(x)} \subseteq \mathbb{R}$, αλγό αλμ $R_{f(x)} \subseteq \mathbb{R}$ με τμ $f(x)$

η f = συνάρτηση ημδισμ στο $D_{f(x)}$ $\xleftrightarrow{\text{ορισμός}}$
 $\iff (\exists T \in \mathbb{R}^*)$:
1. $\forall x \in D_{f(x)} \implies x \pm T \in D_{f(x)}$
2. $\forall x \in D_{f(x)} \quad f(x) = f(x \pm T)$

B. ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να μελετηθω ως ημδισμ ημδισμ οι
συνάρτημ:

(I). $f(x) = \eta \mu x$

(II). $f(x) = \eta \mu (2x)$

(III). $f(x) = \sigma \omega x$

(IV). $f(x) = \sigma \omega \left(\frac{x}{2} \right)$

$$(H). f(x) = \eta/x, \quad D_{f(x)} = \mathbb{R}$$

$$1. \forall x \in D_{f(x)} \Rightarrow x \pm T \in D_{f(x)}$$

$$2. \forall x \in D_{f(x)} : f(x) = f(x+T) \Leftrightarrow \eta/x = \eta/(x+T)$$

$$\Leftrightarrow \eta/(x+T) = \eta/x \Leftrightarrow \begin{cases} x+T = 2k\eta + x \\ x+T = 2k\eta + \eta - x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} T = 2k\eta \\ T = 2k\eta + \eta - 2x \end{cases} \Leftrightarrow T = 2k\eta \quad k \in \mathbb{Z}$$

By (1) and (2) $\Rightarrow f$ is periodic w.r.t. $D_{f(x)}$

is periodic $T = 2k\eta \quad k \in \mathbb{Z}$ and primary

period $T_0 = 2\eta$

$$\therefore f(x) = \eta_k 2x, \quad D_{f(x)} = \mathbb{Z}$$

$$1. \forall x \in D_{f(x)} \Rightarrow x \pm T \in D_{f(x)}$$

$$2. \forall x \in D_{f(x)} : f(x) = f(x+T) \Leftrightarrow \eta_k 2x = \eta_k 2(x+T)$$

$$\Leftrightarrow \eta_k 2(x+T) = \eta_k 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+T) = 2k\eta + 2x \\ 2(x+T) = 2k\eta + \eta - 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2T = 2k\eta + 2x \\ 2x + 2T = 2k\eta + \eta - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2T = 2k\eta \\ 2T = 2k\eta + \eta - 4x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} T = k\eta \\ T = k\eta + \frac{\eta}{2} - 2x \end{cases} \Leftrightarrow T = k\eta, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Βγαίν (1) και (2) $\Rightarrow \eta$ f περιόδου στο $D_{f(x)}$

και περιόδους $T = k\eta, \quad k \in \mathbb{Z}$ για βγαίνει

περίοδο $T_0 = \eta$.

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 3.5

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΙΣΟΔΑΙΣ

$$1. \eta\mu x = \eta\mu\theta \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \theta \\ x = 2k\pi + \pi - \theta \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$2. \sigma\omega x = \sigma\omega\theta \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \theta \\ x = 2k\pi - \theta \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$3. \varepsilon\phi x = \varepsilon\phi\theta \Leftrightarrow x = k\pi + \theta, k \in \mathbb{Z}$$

$$4. \sigma\phi x = \sigma\phi\theta \Leftrightarrow x = \lambda\pi + \theta, \lambda \in \mathbb{Z}$$