

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΤ 4.1

ΑΚΕΡΑΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ x .

ΘΕΩΡΙΑ - ΟΡΙΣΜΟΙ

1. Το Σύμβολο x , έχει την έννοια του Αγνωστού

και 1 τιμή του είναι Προβλεπόμενη (Συγκεκριμένη)

2. Το Σύμβολο x , έχει την έννοια της Μεταβλητής

και 1 τιμή του είναι M Προβλεπόμενη (M , Συγκεκριμένη)

3. Θεωρούμε το βασικό πολυώνυμο x (Μεταβλητή x)

και Ορίζουμε τα γινόμενα: $\alpha_k x^k$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$

4. Ακέραιο πολυώνυμο Μεταβλητής x , Ορίζουμε

κάθε παράσταση της μορφής:

$$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \alpha_{n-2} x^{n-2} + \dots + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$$

με $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \dots, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_0 \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$

Συμπεράσματα.

$$f(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$$

Σημειώσεις

1. Το $f(x) \in \mathbb{R}(x) \Leftrightarrow$ Το $f(x)$ Ακέραιο πολλαπλάσιο

αυτού x με συντελεστές α $\mathbb{R}$

2. Το $f(x) \in \mathbb{Q}(x) \Leftrightarrow$ Το $f(x)$ Ακέραιο πολλαπλάσιο

αυτού x με συντελεστές α $\mathbb{Q}$

3. Το $f(x) \in \mathbb{Z}(x) \Leftrightarrow$ Το $f(x)$ Ακέραιο πολλαπλάσιο

αυτού x με συντελεστές α $\mathbb{Z}$

5. Βαθμός του $f(x)$ Ορίζεται ως Μεγιστότερος

Εξάγων της Μεταβλητής x , της οποίας ο συντελεστής

είναι διάφορος του μηδένος

$$\text{Brd } f(x) = n \Leftrightarrow \alpha_n \neq 0$$

6. Αποδείξτε ότι $f(x) \equiv 0$ αν $x=p \in \mathbb{C}$

Τότε από το $f(p) = \alpha_n p^n + \alpha_{n-1} p^{n-1} + \dots + \alpha_1 p + \alpha_0$

Γ. Τ. $x=p$ π.α.α. $f(x) \iff f(p) = 0$

8. (I). Έστω $\alpha_n = \alpha_{n-1} = \alpha_{n-2} = \dots = \alpha_1 = 0$ για $\mathbb{C}$

Τότε:

$$f(x) \equiv 0x^n + 0x^{n-1} + \dots + 0x^2 + 0x + \alpha_0 \iff f(x) \equiv$$

και το $f(x)$ ορίζεται παντού ισούται με α_0 και $\forall x \in \mathbb{C} \quad f(x) = \alpha_0$

(II). Έστω $\alpha_n = \alpha_{n-1} = \alpha_{n-2} = \dots = \alpha_1 = \alpha_0 = 0$

Τότε:

$$f(x) \equiv 0x^n + 0x^{n-1} + \dots + 0x^2 + 0x + 0 \iff f(x) \equiv 0$$

και το $f(x)$ ορίζεται παντού ισούται με 0

ή μηδέν παντού

και $\forall x \in \mathbb{C} \quad f(x) = 0$

2. Определить Аппроксимацию по x

$$f(x) \equiv \alpha_1 x^1 + \alpha_{l-1} x^{l-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

$$g(x) \equiv \beta_1 x^1 + \beta_{l-1} x^{l-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0$$

Есть $f(x) = g(x) \iff$

1. $B \cdot f(x) = B \cdot g(x)$
то

2. $\alpha_k = \beta_k \quad \forall k=0, 1, 2, \dots, l$

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 4.2

ΑΥΤΟΡΙΘΜΙΚΗ ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΝΟΜΩΝ

Θεωρούμε δύο πολυώνυμα μεταβλητού x
 $P(x), Q(x)$

Θεώρημα 1 ΑΥΤΟΡΙΘΜΙΚΗΣ ΔΙΑΙΡΕΣΗΣ

Για τυχόν Αλγόριθμική Διαίρεση $P(x) : Q(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Υπάρχει Μοναδικά πολυώνυμα $\pi(x), \nu(x)$ ώστε

$$P(x) = Q(x) \cdot \pi(x) + \nu(x)$$

$$\text{Με } \nu(x) \equiv 0 \text{ ή } \deg \nu(x) < \deg Q(x)$$

Σημείωση: Το Θεώρημα ισχύει και αν:

1. $\deg P(x) \geq \deg Q(x)$

2. $\deg P(x) < \deg Q(x)$

Τότε: $\pi(x) \equiv 0(x) \equiv 0$ και $\nu(x) = P(x)$

Διότι: $P(x) = Q(x) \cdot \pi(x) + \nu(x) \Leftrightarrow P(x) = Q(x) \cdot 0 + P(x)$

$\Leftrightarrow P(x) = P(x)$ Αληθές

Θεώρημα 2

Για την διαπραγμα $P(x): Q(x) = \alpha x + \beta \xrightarrow{\partial A.A} \rightarrow$

$\rightarrow$ Υπάρχει Μοναδική αξιολόγηση $\pi(x), v(x)$ ώστε:

$$P(x) = Q(x) \pi(x) + v(x) \iff$$

$$P(x) = (\alpha x + \beta) \pi(x) + P\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

Θεώρημα 3

Για την διαπραγμα $P(x): Q(x) = x + p \xrightarrow{\partial A.A} \rightarrow$

$\rightarrow$ Υπάρχει Μοναδική αξιολόγηση $\pi(x), v(x)$ ώστε:

$$P(x) = Q(x) \pi(x) + v(x) \iff$$

$$P(x) = (x + p) \pi(x) + P(-p)$$

Θεώρημα 4

Για την διαπραγμα $P(x): Q(x) = x - p \xrightarrow{\partial A.A} \rightarrow$

$\rightarrow$ Υπάρχει Μοναδική αξιολόγηση $\pi(x), v(x)$ ώστε:

$$P(x) = Q(x) \pi(x) + v(x) \iff$$

$$P(x) = (x - p) \pi(x) + P(p)$$

ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ ΠΟΛΥΝΟΜΟΥ

ΟΡΙΣΜΟΣ:

Θεωρούμε άκεραία πολυώνυμα μετεβλητής x , $P(x)$, $Q(x)$
Το $Q(x)$ παράγοντας $P(x)$ $\iff$ $Q(x) \mid P(x)$

$\iff$ Για την διαίρεση $P(x) : Q(x)$ υπάρχει πολυώνυμο $\pi(x)$ και $\nu(x) \equiv 0(x) \equiv 0$ ώστε:

$$P(x) = Q(x) \pi(x) + \nu(x) \iff P(x) = Q(x) \pi(x)$$

Θεώρημα 1

$$\text{Το } Q(x) \equiv \alpha x + \beta \mid P(x) \iff P\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) = 0$$

Θεώρημα 2

$$\text{Το } Q(x) \equiv x + p \mid P(x) \iff P(-p) = 0$$

Θεώρημα 3

$$\text{Το } Q(x) \equiv x - p \mid P(x) \iff P(p) = 0$$

Θεωρήματα 4

$$\hookrightarrow Q(x) \equiv (x - p_1)(x - p_2) / P(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \zeta_0 x - p_1 / P(x) \text{ και } \zeta_0 x - p_2 / \eta_1(x)$$

$$\Leftrightarrow P(p_1) = 0 \text{ και } \eta_1(p_2) = 0$$

$$\text{αρα } \eta_1(x) \text{ ζο } \eta_2(x) \text{ και } \text{διωρίζεται } P(x) = (x - p_1)$$

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΣ 4.3

ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΠΙΣΩΝ

Θεωρούμε Ακέραιο πολώνιο, Μεταβλητός x

$$P(x) \equiv \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

$$\text{με } \alpha_n, \alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \dots, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_0 \in \mathbb{Z}$$

Εάν το $x = p \neq 0$ είναι ρίζα του $P(x)$ στο $\mathbb{Z}$

Τότε το $x = p$ διαιρείται αν α_0

$$\alpha) \text{ (a)} P(x) = 2x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 3x - 2, \quad Q(x) = x^2 + 2x - 3$$

$$\text{β) (3γ)} \Rightarrow P(x) : Q(x)$$

Θεωρούμε α κέρμα η ώστε να μεταβληθεί x

$$P(x) = 2x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 3x - 2$$

$$Q(x) = x^2 + 2x - 3$$

Στην Αλγορίθμο Σωπρεγ $P(x) : Q(x)$

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 3x - 2 & x^2 + 2x - 3 \\ - 2x^4 - 4x^3 + 6x^2 & + 2x^2 + 1 \\ \hline 0x^4 + 0x^3 + x^2 + 3x - 2 & \\ - x^2 - 2x + 3 & \\ \hline 0x^2 + x + 1 & \end{array}$$

Για την Σωπρεγ $P(x) : Q(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Υπάρχει πολ-δίκα η ώστε

$$\text{Πηλίκο } \eta(x) = 2x^2 + 1, \text{ υπολοίπο } \nu(x) = x + 1$$

$$\text{ώστε: } P(x) = Q(x) \cdot \eta(x) + \nu(x)$$

Pr) $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 16x - 12$,

4/148 $Q_1(x) = x+1$, $Q_2(x) = x-2$

(I). Ng $\beta_f + \text{Jaw}$ ta $\alpha, \beta \in R$ wok $Q_1(x)/P(x)$ su $Q_2(x)/P(x)$

(I) Not eq. b/c $\nabla \cdot \vec{P} = 0$

(II). $\Theta \times \eta \in \Sigma_{\text{top}}(\Gamma) \times T \times \alpha, \beta \in R \times \eta \in T \times S$

$$T_0 \varphi_1(x) / P(x) \neq T_0 \varphi_2(x) / P(x) \implies$$
$$\Rightarrow T_0 \quad x+1 / P(x) \quad \& \quad T_0 \quad x-2 / P(x) \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow P(-1) = 0$ and $P(2) = 0$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(-1) = 0 \\ P(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-1)^4 + 4(-1)^3 + p(-1)^2 - 16(-1) - 12 = 0 \\ 2^4 + 4 \cdot 2^3 + p \cdot 2^2 - 16 \cdot 2 - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - 9 + \beta + 16 - 12 = 0 \\ 16 + 8x + 4\beta - 32 - 12 = 0 \end{cases} \quad \Leftarrow \begin{cases} -9 + \beta + 5 = 0 \\ 8x + 4\beta - 28 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x + \beta = -5 \\ 8x + 4\beta = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \beta = 5 \\ 2x + \beta = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 12 \\ x - \beta = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = -1 \end{cases} \Rightarrow (\alpha, \beta) = (4, -1)$$

11a. $(a, b) = (4, -1)$ Ex 4.1 $P(x) = x^4 + 4x^3 + (-1)x^2 - 16x - 12c =$

$$\Leftrightarrow P(x) = x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12$$

(II). Ex (1): $P(x) = x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12 = 0$

Exyha Holger pr Ty! Slupty $P(x) = (x+1)$

$$\begin{array}{rrrr|rr} 1 & 4 & -1 & -16 & -12 & -1 \\ & -1 & -3 & 4 & +12 & \\ \hline 1 & 3 & -4 & -12 & 0 & \end{array}$$

Ex 1: Simplex $P(x): (x+1) \rightarrow$

→ Ynagxaw halsika nojowifir

$$u_1(x) = 1x^3 + 3x^2 - 4x - 12 \quad \text{für } u_1(x) = 0 \quad \text{wobei}$$

$$P(x) = (x+1) \gamma_1(x) + u_1(x) \Leftrightarrow P(x) = (x+1) \gamma_1(x) : (1)$$

Ex/14 Hanger p-ty Symptm $\eta_1(x) = (x-2)$

1	3	-4	-12	2
	2	10	+12	
1	5	+6	10	

На 1-м шаге $\eta_1(x) = (x-2) \rightarrow$

→ Yng nghylfa hysbysu a gyswrtu

$$\eta_2(x) = x^2 + 5x + 6 \text{ и } v_2(x) = 0 \text{ и } \overline{w_2}$$

$$\eta_1(x) = (x-2)\eta_2(x) + v_2(x) \Leftrightarrow \eta_1(x) = (x-2)\eta_2(x) : (2)$$

$$A_{\eta} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow P(x) = (x+1)\eta_1(x) \Leftrightarrow P(x) = (x+1)(x-2)\eta_2(x) \\ \Leftrightarrow P(x) = (x+1)(x-2)(x^2+5x+6)$$

$$\text{Ex 11: } P(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 + 4x^3 - x^2 - 16x - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)(x^2+5x+6) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+1=0 \text{ и } x-2=0 \text{ и } x^2+5x+6=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \text{ и } x=2 \text{ и } x=-2 \text{ и } x=-3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-3 \text{ и } x=-2 \text{ и } x=-1 \text{ и } x=2$$

ΑΣΚΗΣΗ

Θεωρούμε άγνωστα πολυώνυμα, μεταβλητής x

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 + \alpha x + \beta$$

$$Q(x) = x^2 + 2x - 3 \Leftrightarrow Q(x) = (x-1)(x+3)$$

I. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αντιστοιχώντας σε $Q(x) | P(x)$

II. Να ελεγχθεί η εφ' όλης $P(x) = 0$

1

Σύμφωνα με το Ηωμς θα μας δώσει $P(x) : (x-1)$

↓	+2	-7	+α	+β	1
	1	3	-4	α-4	
1	3	-4	α-4	α+β-4	

Για την διαίρεση $P(x) : (x-1) \rightarrow$

$\Rightarrow$ Υπόλοιπο μ αντιστοιχώντας πολυώνυμα

$$\eta_1(x) = 1x^3 + 3x^2 - 4x + (\alpha - 4)$$

$$v_1(x) = \alpha + \beta - 4$$

$$\text{ώστε } P(x) = (x-1)\eta_1(x) + v_1(x) \quad (1)$$

Δοθέντες Ηαγες $p = \mu\pi$ Σωπρεγ $\eta_1(x) : (x+3)$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 3 & -4 & \alpha-4 & -3 \\ \hline & -3 & 0 & +12 & \\ \hline 1 & 0 & -4 & \alpha+8 & \end{array}$$

Για $\mu\pi$ Σωπρεγ $\eta_1(x) : (x+3) \rightarrow$

$\rightarrow$ Υπαρχων πολωνος $\eta_2(x)$

$$\eta_2(x) = 1x^2 + 0x - 4 \quad \text{και} \quad \nu_2(x) = \alpha + 8$$

$$\text{ωστε} \quad \eta_1(x) = (x+3)\eta_2(x) + \nu_2(x) \quad (2)$$

I.Θ. προσδιορισμους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ απαιτωμεν

$$T_0 Q(x) / P(x) \Leftrightarrow T_0 x^2 + 2x - 3 / P(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T_0 (x-1)(x+3) / P(x) \Leftrightarrow T_0 x-1 / P(x) \text{ και } T_0 x+3 / \eta_1(x)$$

$$\Leftrightarrow P(1)=0 \text{ και } \eta_1(-3)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P(1)=0 \\ \eta_1(-3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta-4=0 \\ \alpha+8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8+\beta-4=0 \\ \alpha=-8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta-12=0 \\ \alpha=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-8 \\ \beta=12 \end{cases} \Leftrightarrow (\alpha, \beta) = (-8, 12)$$

IIa $(\alpha, \beta) = (-8, 12)$ exer:

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 + (-8)x + 12 \Leftrightarrow$$

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$$

II. Ex (14): $P(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\eta_1(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3)\eta_2(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+3)(x^2-4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-1=0 \vee x+3=0 \vee x^2-4=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=1 \vee x=-3 \vee x=\pm 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-3 \vee x=-2 \vee x=1 \vee x=+2$$

§5) $P(x) = \alpha x^{v+1} + \beta x^v + 1$, $Q(x) = (x-1)^2$

για $\tau \in \mathbb{Q}$ $Q(x) \mid P(x) \Rightarrow \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Θεωρούμε α β γ δ ϵ ζ η θ ι κ λ μ ν ξ $\omicron$ π ρ σ τ υ ϕ χ ψ ω

$P(x) = \alpha x^{v+1} + \beta x^v + 1 \Leftrightarrow$

$P(x) = \alpha x^{v+1} + \beta x^v + 0x^{v-1} + 0x^{v-2} + 0x^{v-3} + \dots + 0x^2 + 0x + 1$

$Q(x) = (x-1)^2$

Για την Horner παύση Σωπτόν $P(x) : (x-1)$

α	β	0	0	0	$\dots$	0	0	1	1
α	$\alpha+\beta$	$\alpha+\beta$				$\alpha+\beta$	$\alpha+\beta$	$\alpha+\beta$	
α	$\alpha+\beta$	$\alpha+\beta$	$\alpha+\beta$			$\alpha+\beta$	$\alpha+\beta$	$\alpha+\beta+1$	

Για την Σωπτόν $P(x) : (x-1) \Rightarrow$

$\rightarrow$ Υποχρεωτικά θα δώσει το αποτέλεσμα

$\eta_1(x) = \alpha x^v + (\alpha+\beta)x^{v-1} + (\alpha+\beta)x^{v-2} + \dots + (\alpha+\beta)x^1 + \alpha+\beta$

$v_1(x) = \alpha+\beta+1$

ωστε $P(x) = (x-1)\eta_1(x) + v_1(x)$

$$\Theta_{\alpha} \text{ η ποδισορροια } T_{\alpha} \propto, \beta \in \mathbb{R} \text{ η } \eta_{\perp} T_{\alpha} \propto T_{\alpha} \Phi(x)/P(x)$$

$$\Rightarrow T_{\alpha} (x-1)^2 / P(x) \Rightarrow T_{\alpha} x-1 / P(x) \Rightarrow T_{\alpha} x-1 / \eta(x)$$

$$\Rightarrow P(1)=0 \Rightarrow \eta_{\perp}(1)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(1)=0 \\ \eta_{\perp}(1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 1 = 0 \\ \alpha \cdot 1^{\nu} + (\alpha + \beta) 1^{\nu-1} + (\alpha + \beta) 1^{\nu-2} + \dots + (\alpha + \beta) 1^1 + (\alpha + \beta) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 1 = 0 \\ \alpha + (\nu+1) \cdot (\alpha + \beta) + (\alpha + \beta) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 1 = 0 \\ \alpha + \nu(\alpha + \beta) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ \alpha + \nu(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -\nu-1 \\ \alpha = \nu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \nu \\ \beta = -(\nu+1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\alpha, \beta) = (\nu, -(\nu+1))$$

α2) (II) Να επιδοθεί η εξίσωση (1): $P(x) = 3x^3 + 8x^2 - 15x + 4 = 0$
 α) 147 Μικτές Ρίζες ο. $\mathbb{Z}$ τ. $P(x): \pm 1, \pm 2, \pm 4$

Επειδή όμως η $P(x)$ έχει διαφανή ρίζα $P(x): (x-1)$.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 8 & -15 & 4 & 1 \\ & 3 & 11 & -4 & \\ \hline 3 & 11 & -4 & 0 & \end{array}$$

$$P(1) = 0 \Rightarrow \text{το } x-1 / P(x) \rightarrow$$

$\Rightarrow$ Υπόλοιπο πολυστομίου $Q(x) = 3x^2 + 11x - 4$ ώστε

$$P(x) = (x-1)Q(x) \Leftrightarrow P(x) = (x-1)(3x^2 + 11x - 4)$$

$$\text{εξίσωση (1)} \quad P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(3x^2 + 11x - 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-1=0 \quad \dot{\vee} \quad 3x^2 + 11x - 4 = 0 \Leftrightarrow x=1 \quad \dot{\vee} \quad x=-4 \quad \dot{\vee} \quad x=\frac{1}{3}$$