

Leonhard Euler (1707-1783)



Ο πολυγραφώστερος των μαθηματικών όλων των εποχών L. Euler γεννήθηκε το 1707 στην Ελβετία, σπούδασε κοντά στον J. Bernoulli, και παρότι ξεκίνησε σαν καθηγητής της Ιατρικής και Φυσιολογίας αφιέρωσε τον εαυτό του στα Μαθηματικά, τη Φυσική και την Αστρονομία. Τον ξεχωρίζουμε σ' αυτό το Κεφάλαιο λόγω της θεμελιακής συνεισφοράς του στη θεωρία των υπερβατικών συναρτήσεων. Συγκεκριμένα εισήγαγε τον αριθμό e σαν την βάση των φυσικών λογαρίθμων, έδειξε ότι ο e και ο e^2 είναι άρρητοι, ανακάλυψε τη βασική σχέση $e^{i\pi} = -1$, κτλ.

Η μαθηματική σταδιοδρομία του Euler ξεκίνησε τη χρονιά που πέθανε ο Νεύτων. Η Αναλυτική Γεωμετρία, ο Απειροστικός Λογισμός και οι νόμοι της Μηχανικής του Νεύτωνα είχαν πρόσφατα θεμελιωθεί. Σε καθένα από τα πεδία αυτά είχαν λυθεί αρκετά μεμονωμένα προβλήματα, μια συστηματική προσπάθεια ενοποίησής τους όμως δεν είχε ακόμη γίνει. Καλύτερη εποχή για μια ιδιοφυΐα όπως εκείνη του Euler δεν μπορούσε να βρεθεί. Η βασική εξίσωση του Λογισμού των Μεταβολών (εξίσωση Euler, 1744), η θεμελιώδης εξίσωση της κίνησης των ρευστών (εξίσωση Euler, 1755), οι γωνίες περιστροφής στις οποίες μπορεί να αναλυθεί η οποιαδήποτε κίνηση ενός στερεού σώματος (γωνίες Euler, 1776), οι σχέσεις Euler στη μιγαδική ανάλυση, αλλά και διάφορες σταθερές στη σύγκλιση απειροσειρών, κ.λ.π., δείχνουν την ενοποιητική του συνεισφορά. Λέγεται ότι ο Euler έγραφε τις μεγάλες εργασίες του με την ευκολία με την οποία ένας ικανός συγγραφέας συνθέτει ένα γράμμα προς ένα στενό του φίλο. Η παραγωγικότητά του λοιπόν σε εργασίες ήταν παροιμιακή και η ολική τύφλωσή του κατά τα τελευταία δεκαεπτά χρόνια της ζωής του δεν επιβράδυνε αυτούς τους ασύγκριτους ρυθμούς παραγωγικότητας, ίσως επειδή είχε ασυνήθιστα καλή μνήμη (γνώριζε απ' έξω όλους τους τύπους της Τριγωνομετρίας και Ανάλυσης, αναρίθμητα ποιήματα και όλη την Αινειάδα του Βιργίλιου). Η έκτασή του έργου τού Euler δεν είναι γνωστή με ακρίβεια, αν και εκτιμάται ότι υπερβαίνει τους εξήντα με ογδόντα τόμους. Στις Ακαδημίες της Πετρούπολης και του Βερολίνου ακόμη ταξινομούνται χειρόγραφα του πάνω στην Ανάλυση, Μηχανική, Αστρονομία, Φυσική των Ρευστών, Ιατρική, Μουσική και Θεολογία.

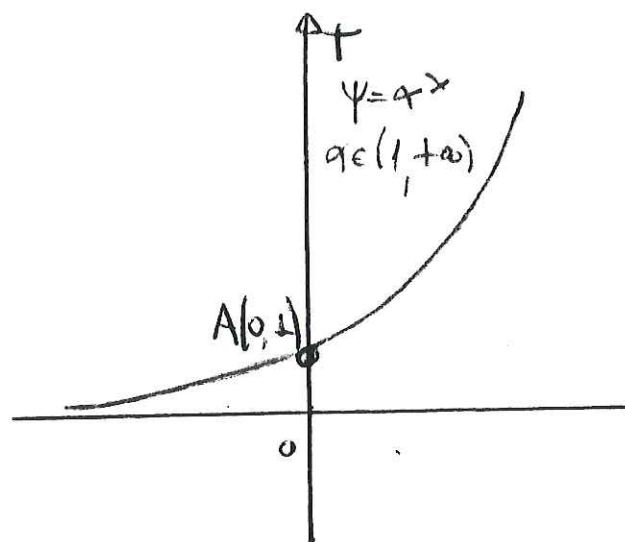
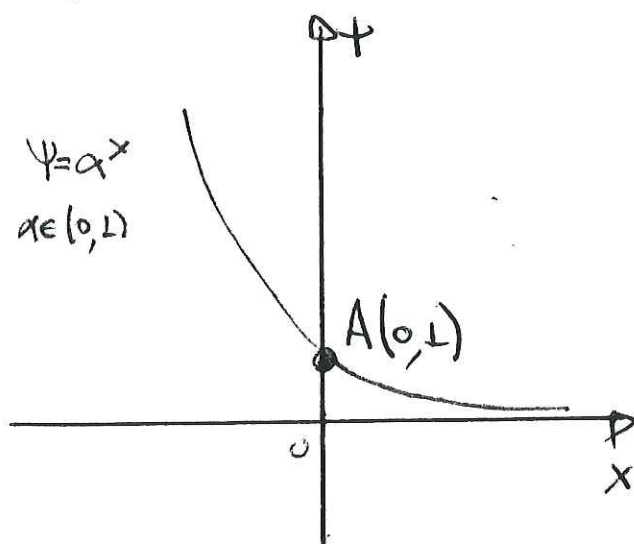
Ο Euler ήταν επίσης αφιερωμένος και στην οικογένειά του: τα βράδια έπαιζε διάφορα παιχνίδια ή διάβαζε τη Βίβλο στα 13 παιδιά του. Όταν πέθανε, λέγεται ότι όλοι οι μαθηματικοί της Ευρώπης ήταν μαθητές του, ενώ περιοδικά δημοσίευαν πρωτότυπες εργασίες του για άλλα 50 χρόνια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΠΑΡΑΓΡΑΦΟΙ 5.1 - 5.2 - 5.3

ΥΠΕΡΒΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

A. ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ



Θεωρούμε Εξθετικές συνάρτησης f με τύπο
 $f(x) = a^x$, $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$

1. Πεδίο Ορισμού: $D_{f(x)} = \mathbb{R}$

2. Τύπος Τιμών: $R_{f(x)} = (0, +\infty)$

3. Μονotonία:

I. Εστί $a \in (0, 1)$ τότε η f γύγεται φθίνουσα στο D_f .

$$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D_{f(x)} \text{ με } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

$$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D_{f(x)} \text{ με } x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$$

3. II. Έστω $\alpha \in (1, \infty)$ τότε η f γίνεται αυξανόμενη στο $D_{f,b}$

$$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D_{f,b} \text{ με } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D_{f,b} \text{ με } x_1 < x_2 \Rightarrow \alpha^{x_1} < \alpha^{x_2}$$

4. Αρριτιότητα

Η f δεν γίνεται α -αρριτική στο $D_{f,b}$

5. Ισοτιμία 1-1

η f είναι α -ισοτιμία 1-1 στο $D_{f,b}$ $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D_{f,b} \text{ με } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D_{f,b} \text{ με } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D_{f,b} \text{ με } \alpha^{x_1} = \alpha^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

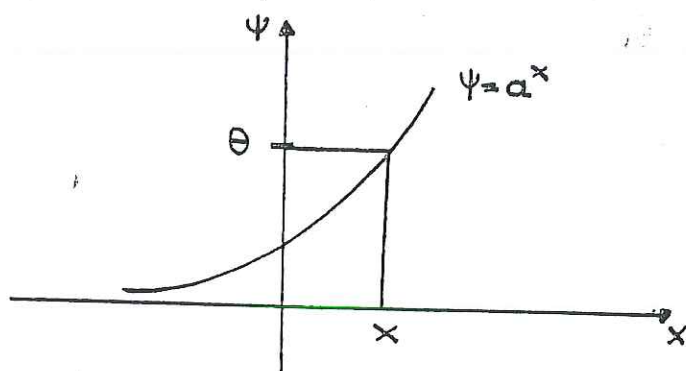
6. Αρριτιότητα Εξισώσεων ζ

Η Εξίσωση - Αξία $x'x : \psi = 0$ Ορίζεται

Αρριτική Εξίσωση ως ζ .

7. Γραφική Παράσταση ζ

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ



Προταση

- $\forall a \in \mathbb{R} \ 0 < a \neq 1$ και $\forall \theta \in \mathbb{R} \ \theta > 0$
υπαρχει μοναδικος $x \in \mathbb{R}$ ωστε: $a^x = \theta$

Ορισμος

- Το μοναδικο $x \in \mathbb{R}$ για το οποιο ισχυει
 $a^x = \theta \quad \forall a \in \mathbb{R} \ 0 < a \neq 1 \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \ \theta > 0$
ονομαζουμε λογαριθμο του θ με βαση το a
συμβολιζουμε: $x = \log_a \theta$

Οστε: $a^x = \theta \iff x = \log_a \theta$

Εαν τερουμε οτι: $\log_a \theta = x$ τοτε $a^x = \theta \iff a^{\log_a \theta} = \theta$

Συνολικα:

$$\log_a \theta = x \iff a^x = \theta \iff a^{\log_a \theta} = \theta$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1. $\forall a \in \mathbb{R}^+ - \{1\} \quad \log_a a = 1 \quad \text{και} \quad \log_a 1 = 0$

• Εστω $\log_a a = x \iff a = a^x \iff a^1 = a^x \iff 1 = x$
 $\iff x = 1$

Άρα $\log_a a = 1$

• Εστω $\log_a 1 = x \iff 1 = a^x \iff a^0 = a^x \iff 0 = x$
 $\iff x = 0$

Άρα $\log_a 1 = 0$

2. $\forall a \in \mathbb{R}^+ - \{1\} \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}^+ \quad \theta_1 = \theta_2 \iff \log_a \theta_1 = \log_a \theta_2$

• Είναι: $\theta_1 = \theta_2 \iff a^{\log_a \theta_1} = a^{\log_a \theta_2} \iff \log_a \theta_1 = \log_a \theta_2$
 Άρα $\theta_1 = \theta_2 \iff \log_a \theta_1 = \log_a \theta_2$

3. $\forall a \in \mathbb{R}^+ - \{1\} \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}^+ \quad \log_a (\theta_1 \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$

• Εστω $\log_a \theta_1 = x_1$ και $\log_a \theta_2 = x_2 \implies \theta_1 = a^{x_1}$ και $\theta_2 = a^{x_2}$
 $\implies \theta_1 \theta_2 = a^{x_1} a^{x_2} \implies \theta_1 \theta_2 = a^{x_1 + x_2} \implies$
 $\implies x_1 + x_2 = \log_a (\theta_1 \theta_2) \implies \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2 = \log_a (\theta_1 \theta_2)$
 $\implies \log_a (\theta_1 \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$

• Είναι: $a^{\log_a (\theta_1 \theta_2)} = \theta_1 \theta_2 = a^{\log_a \theta_1} \cdot a^{\log_a \theta_2} = a^{\log_a \theta_1 + \log_a \theta_2}$

$\implies a^{\log_a (\theta_1 \theta_2)} = a^{\log_a \theta_1 + \log_a \theta_2}$

$\implies \log_a (\theta_1 \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$

Παράδειγμα: Εάν $x\psi > 0$ τότε $\log_a(x\psi) = \log_a|x| + \log_a|\psi|$

• Εάν $x\psi > 0 \implies x\psi = |x\psi| \implies x\psi = |x||\psi|$

Είναι $a^{\log_a(x\psi)} = x\psi = |x||\psi| = a^{\log_a|x|} \cdot a^{\log_a|\psi|} = a^{\log_a|x| + \log_a|\psi|}$

$\implies a^{\log_a(x\psi)} = a^{\log_a|x| + \log_a|\psi|}$

$\implies \log_a(x\psi) = \log_a|x| + \log_a|\psi|$

4. $\forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}^+ \quad \log_a\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) = \log_a\theta_1 - \log_a\theta_2$

• Εστω ότι $\log_a\theta_1 = x_1$ και $\log_a\theta_2 = x_2 \implies \theta_1 = a^{x_1}$ και $\theta_2 = a^{x_2}$

$\implies \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} \implies \frac{\theta_1}{\theta_2} = a^{x_1 - x_2} \implies$

$\implies x_1 - x_2 = \log_a\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) \implies \log_a\theta_1 - \log_a\theta_2 = \log_a\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)$

$\implies \log_a\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) = \log_a\theta_1 - \log_a\theta_2$

• Είναι $a^{\log_a\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)} = \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{a^{\log_a\theta_1}}{a^{\log_a\theta_2}} = a^{\log_a\theta_1 - \log_a\theta_2}$

$\implies a^{\log_a\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)} = a^{\log_a\theta_1 - \log_a\theta_2}$

$\implies \log_a\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) = \log_a\theta_1 - \log_a\theta_2$

Σχολιο: Εάν $\frac{x}{\psi} > 0$ τότε $\log_a \left(\frac{x}{\psi} \right) = \log_a |x| - \log_a |\psi|$

$$\bullet \text{ Εάν } \frac{x}{\psi} > 0 \longrightarrow \frac{x}{\psi} = \left| \frac{x}{\psi} \right| \longrightarrow \frac{x}{\psi} = \frac{|x|}{|\psi|}$$

$$\text{Είναι } a^{\log_a \left(\frac{x}{\psi} \right)} = \frac{x}{\psi} = \frac{|x|}{|\psi|} = \frac{a^{\log_a |x|}}{a^{\log_a |\psi|}} = a^{\log_a |x| - \log_a |\psi|}$$

$$\implies a^{\log_a \left(\frac{x}{\psi} \right)} = a^{\log_a |x| - \log_a |\psi|}$$

$$\implies \log_a \left(\frac{x}{\psi} \right) = \log_a |x| - \log_a |\psi|$$

$$5. \forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^+ \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \quad \log_a \theta^\beta = \beta \log_a \theta$$

$$\bullet \text{ Έστω } \log_a \theta = x \iff \theta = a^x \iff \theta^\beta = a^{\beta x} \iff$$

$$\iff \beta x = \log_a \theta^\beta \iff \beta \log_a \theta = \log_a \theta^\beta \iff$$

$$\iff \log_a \theta^\beta = \beta \log_a \theta$$

$$\bullet \text{ Είναι } a^{\log_a \theta^\beta} = \theta^\beta = \left(a^{\log_a \theta} \right)^\beta = a^{\beta \log_a \theta}$$

$$\longrightarrow a^{\log_a \theta^\beta} = a^{\beta \log_a \theta} \longrightarrow \log_a \theta^\beta = \beta \log_a \theta$$

Σχολιο: Εάν $x \neq 0$ και $k \in \mathbb{Z}$ τότε $\log_a x^{2k} = 2k \log_a |x|$

$$6. \forall a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^+ \quad \log_b \theta = \frac{\log_a \theta}{\log_a b}$$

$$\bullet \text{ Έστω } \log_b \theta = x \iff \theta = b^x \iff \log_a \theta = \log_a b^x \\ \iff \log_a \theta = x \log_a b \iff \log_a \theta = \log_b \theta \cdot \log_a b$$

$$\iff \log_b \theta = \frac{\log_a \theta}{\log_a b}$$

$$\text{Σχολιο: I. } \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

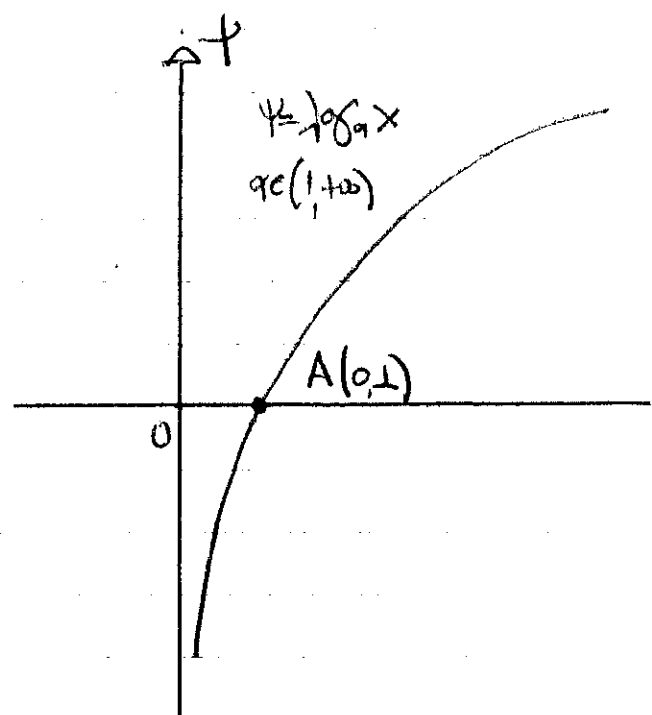
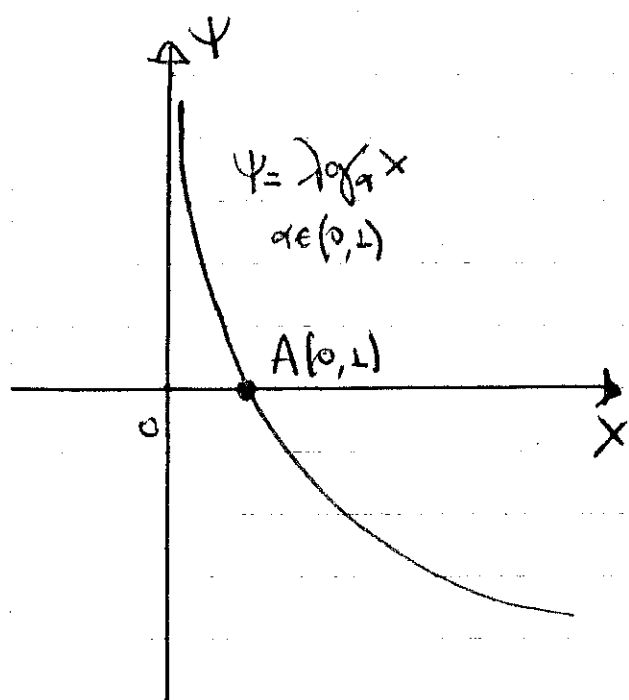
$$\text{II. } \log_b \theta = \frac{\log_a \theta}{\log_a b} \implies \log_b \theta = \frac{1}{\log_a b} \cdot \log_a \theta$$

$$\implies \log_b \theta = \log_b a \cdot \log_a \theta$$

$$\text{III. } \log_{a^p} b = \frac{1}{p} \log_a b, \quad (p \neq 0)$$

ΦΛΑΧΟΣ. Σ. ΣΠΥΡΙΔΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

Β. ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ



Θεωρούμε Λογαριθμική συνάρτηση f με τύπο
 $f(x) = \log_a x$, $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$

1. Πεδίο Ορισμού $D_{f(x)} = (0, +\infty)$

2. Τιμή του Ορισμού $R_{f(x)} = \mathbb{R}$

3. Μονοτονία

I. Έστω $a \in (0, 1)$ τότε f είναι φθίνουσα στο $D_{f(x)}$

$$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D_{f(x)} \text{ με } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D_{f(x)} \text{ με } x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$$

3. II. Εσ $a \in (1, +\infty)$ τότε, f γνησία αυξουσα στο D_f

$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D_{f(x)}, \text{ με } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D_{f(x)}, \text{ με } x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$

4. Ακρόαση

Η f είναι γνησία Ακρόαση στο $D_{f(x)}$

5. Ισομorphism "1-1"

Η f ομορπτική "1-1" στο $D_{f(x)}$

$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D_{f(x)}, \text{ με } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D_{f(x)}, \text{ με } f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D_{f(x)}, \text{ με } \log_a x_1 \neq \log_a x_2 \rightarrow x_1 = x_2$

6. Αδυσήλωτες Ενότητες ζ_f

Η Ενότητα - Αξία $\psi: \chi=0$ είναι αδυσήλωτη
Ενότητα της ζ_f

7. Γραφική Παράσταση ζ_f