

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

1. ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Ορισμός: Συνάρτηση f Ορίζεται ο Μηχανισμός να ξεκινάει από ένα ζεύγος A καταλήγει σε ένα ζεύγος B με την ιδιότητα:

Για κάθε αριθμό του ζεύγους A να έχουμε Μόνο ένα Αριθμό του ζεύγους B .

I. Το ζεύγος A Ορίζεται Πάντοτε Ορισμένο της συνάρτησης f και συμβολίζεται: $D_f(x)$

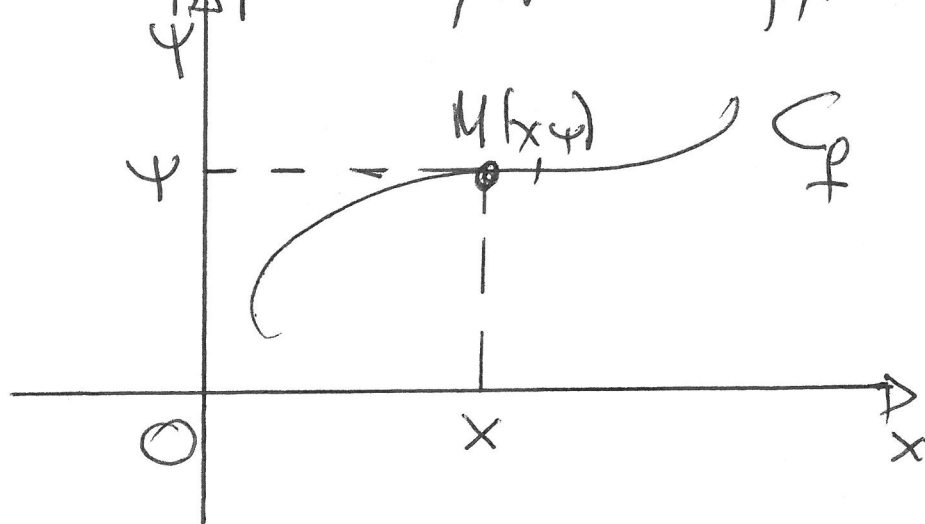
II. Το ζεύγος B Ορίζεται ζεύγος τιμών της συνάρτησης f και συμβολίζεται: $R_f(x)$

III. Η ισομπα $\psi = f(x)$ Ορίζεται Τύπος της συνάρτησης f

2. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Γραφική Παράσταση C_f της συνάρτησης f
Ορίζεται: Το σύνολο των σημείων του Εξηγηδίου

για τις οποίες το πρόβλημα της συνάρτησης f έχει λύση
αριθμική (x, y) στο Εξηγηδίο $X \times Y$



3. ΑΡΤΙΑ - ΠΕΡΙΤΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Θεωρούμε πραγματική συνάρτηση f , μιας πραγματικής μεταβλητούς x , με το $f(x)$ να είναι
πάλι ορισμός $D_{f(x)}$

ΟΡΙΣΜΟΣ: η f = Αρτια συνάρτηση $\Leftrightarrow D_{f(x)} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1. \forall x \in D_{f(x)} \Rightarrow -x \in D_{f(x)} \\ 2. \forall x \in D_{f(x)} : f(-x) = f(x) \end{cases}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: η f = Περιττή συνάρτηση $\Leftrightarrow D_{f(x)} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1. \forall x \in D_{f(x)} \Rightarrow -x \in D_{f(x)} \\ 2. \forall x \in D_{f(x)} : f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

4. MONOTONIA ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Θεωρούμε Πραγματική συνάρτηση f , Μία Πραγματική Μεταβλητή x , με τύπο $f(x)$ και Νέο Ορισμό $D_{f(x)}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ: η f = γνησία αυξανόμενη συνάρτηση στο $D_{f(x)}$
 $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D_{f(x)} \text{ με } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

ΟΡΙΣΜΟΣ: η f = αυξανόμενη συνάρτηση στο $D_{f(x)}$
 $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D_{f(x)} \text{ με } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

ΟΡΙΣΜΟΣ: η f = γνησία φθίνουσα συνάρτηση στο $D_{f(x)}$
 $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D_{f(x)} \text{ με } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

ΟΡΙΣΜΟΣ: η f = φθίνουσα συνάρτηση στο $D_{f(x)}$
 $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D_{f(x)} \text{ με } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

5. ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Θεωρούμε Πραγματική Συνάρτηση f , Μία Πραγματική Μεταβλητή x , με $\forall x \in D_f$ $f(x)$ και Αξία Ορισμού $D_{f(x)}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ: η συνάρτηση f στην περιοχή $x = x_0 \in D_{f(x)}$ λέγεται Μέγιστη Τιμή $f(x_0) \iff$
 $\iff \forall x \in D_{f(x)} : f(x) \leq f(x_0)$

ΟΡΙΣΜΟΣ: η συνάρτηση f στην περιοχή $x = x_0 \in D_{f(x)}$ λέγεται Ελάχιστη Τιμή $f(x_0) \iff$
 $\iff \forall x \in D_{f(x)} : f(x) \geq f(x_0)$.

ΥΝΑΡΤΗΣΗ

$$f(x) = \alpha x + \beta$$

Συνάρτηση γραμμικής βάρυνσης f ($f(x) \in \mathbb{R}$) με
παράμετρους (α, β) τύπου α ($x \in \mathbb{R}$) με τύπο
 $f(x) = \alpha x + \beta$ με $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\beta \in \mathbb{R}$

1. Πεδίο Ορισμού : $D_{f(x)} = \mathbb{R}$

2. Τύπος ακμών : $R_{f(x)} = \mathbb{R}$

3. Συμμετρίες : η $f = 0$ 1 άρα, περίτη ο/ $D_{f(x)}$
 $\rightarrow$ η C_f δεν έχει ούτε κέντρο συμμετρίας τ/ψ/φ
ντε ούτε σημείο συμμετρίας $T_0(0,0)$

4. Μονotonία:

(I). Εάν $\alpha < 0$ τότε η $f =$ γ/γ/α + φ/α/α ο/ $D_{f(x)}$

(II). Εάν $\alpha > 0$ τότε η $f =$ γ/γ/α + α/α/α ο/ $D_{f(x)}$

ΚΡΟΤΑΤΑ : η $f=0$ x1 ακρότατα σε $D_f(x)$

6. Γραφική παράσταση :

Η Γραφική παράσταση ζ της f είναι ευθεία (ε)
και έχει εξίσωση (ε): $\psi = \alpha x + \beta$

(Α) Το x-επίπεδο της ευθείας (ε): $\psi = \alpha x + \beta$

(I) Τομές της (ε) με τον $x'x$

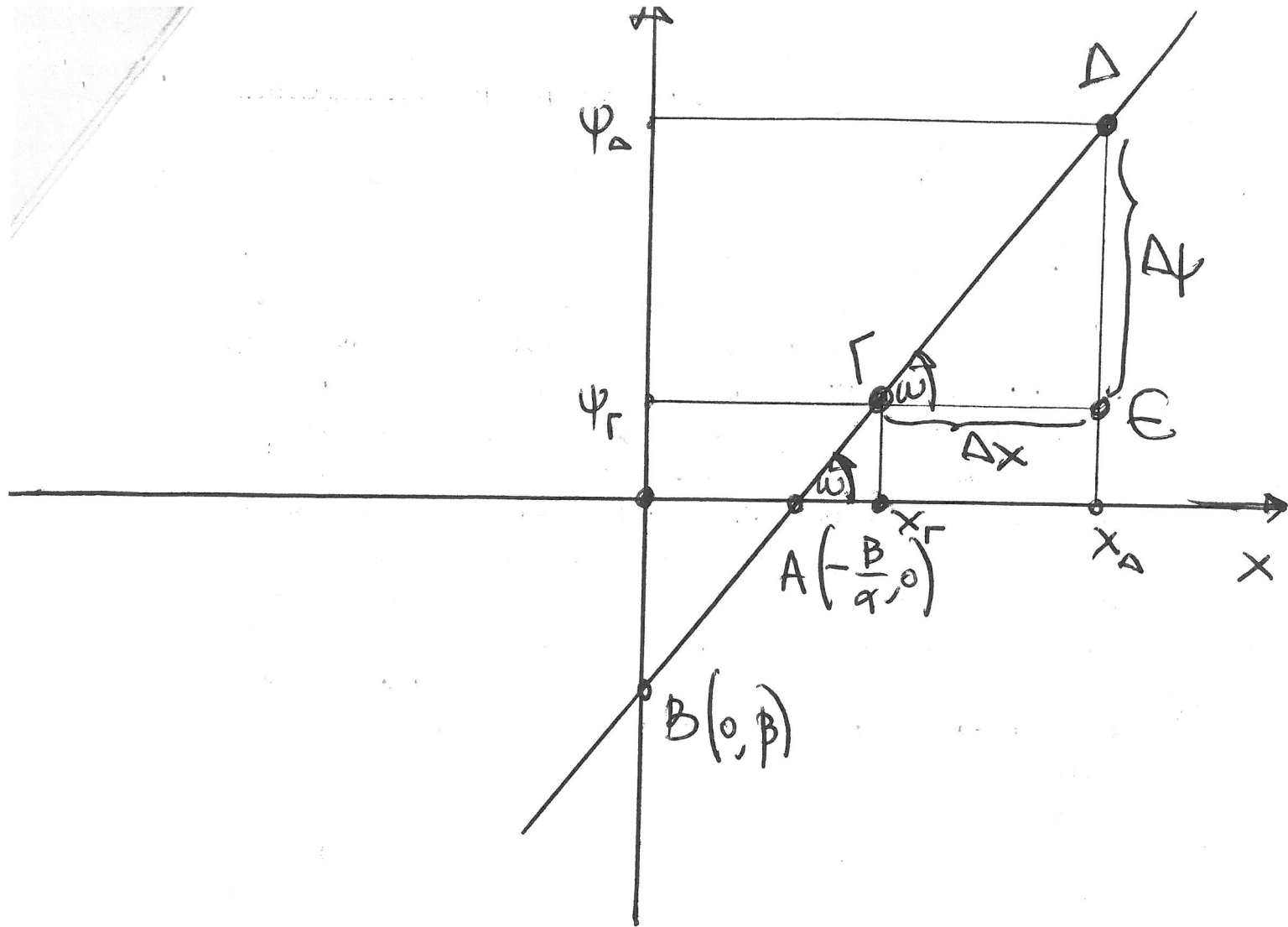
$$\left\{ \begin{array}{l} \psi = \alpha x + \beta \\ \psi = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = \alpha x + \beta \\ \psi = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{\beta}{\alpha} \\ \psi = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow (x, \psi) = \left(-\frac{\beta}{\alpha}, 0 \right)$$

$$\Rightarrow A = \left(-\frac{\beta}{\alpha}, 0 \right) = T(1\varepsilon, x'x)$$

(II) Τομές της (ε) με τον $\psi'\psi$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi = \alpha x + \beta \\ x = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \psi = \alpha \cdot 0 + \beta \\ x = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \psi = \beta \\ x = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow (x, \psi) = (0, \beta)$$

$$\Rightarrow B = (0, \beta) = T(1\varepsilon, \psi'\psi)$$



(B). Κλίση εωθίας (ε)

ΟΡΙΣΜΟΣ: Κλίση εωθίας (ε) ορίζεται ο σταθερός λόγος της κατασκευής μεταβολής προς την οριζόντια μεταβολή

$$\begin{aligned} \text{Εκεί: } \kappa\lambda\iota\sigma\eta \text{ εωθίας } (\epsilon) &= \lambda_{\epsilon} = \frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \frac{\psi_{\Delta} - \psi_{\Gamma}}{x_{\Delta} - x_{\Gamma}} = \\ &= \frac{(\alpha x_{\Delta} + \beta) - (\alpha x_{\Gamma} + \beta)}{x_{\Delta} - x_{\Gamma}} = \frac{\alpha x_{\Delta} + \beta - \alpha x_{\Gamma} - \beta}{x_{\Delta} - x_{\Gamma}} = \end{aligned}$$

$$\frac{(x_D - x_r)}{x_D - x_r} = q - p$$

$$\Rightarrow \text{κλίση εοδhas } (ε) = \lambda_ε = \frac{\Delta \psi}{\Delta x} = q \quad (1)$$

(β) Γωνία κλίσης εοδhas (ε)

ΟΡΙΣΜΟΣ: Γωνία κλίσης ω , εοδhas (ε) ορίζεται η γωνία (γεωμετρική ή προβολογραφική) που σχηματίζει η εοδhas (ε) με τον τμήνα $x'x$ της

ισοχώρα: $0 \leq \omega \leq 180^\circ$

$$\text{Τριγ } \Delta \epsilon \Gamma \rightarrow \epsilon \phi \Delta \hat{\Gamma} \epsilon = \frac{\Delta \epsilon}{\Gamma \epsilon} \rightarrow \epsilon \phi \omega = \frac{\Delta \psi}{\Delta x} \quad (2)$$

$$\text{D(2)} \Rightarrow \text{κλίση εοδhas } (ε) = \lambda_ε = \frac{\Delta \psi}{\Delta x} = q = \epsilon \phi \omega$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{κλίση εοδhas } (ε) = \text{Εφανομένη (Γωνία κλίσης } \omega)}$$

ΛΕΜΜΑ ΠΑΡΑΓΓΗΓΙΑΣ - ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Θεωρούμε ευθείες $(\varepsilon_1): \psi = \alpha_1 x + \beta_1$ $(\varepsilon_2): \psi = \alpha_2 x + \beta_2$

ή κλίσεις $\lambda_{\varepsilon_1} = \alpha_1$ $\lambda_{\varepsilon_2} = \alpha_2$

$$(I) \quad (\varepsilon_1) \parallel (\varepsilon_2) \iff \lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\varepsilon_2}$$

$$(II) \quad (\varepsilon_1) \perp (\varepsilon_2) \iff \lambda_{\varepsilon_1} \cdot \lambda_{\varepsilon_2} = -1$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

Δεσφύμε Παράσταση συναρτησης f , μιας Παράστασης

$M(T \times \mathbb{R})$, Της x της ως:

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \quad \text{με } \alpha \in \mathbb{R}^*, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

1. Πεδίο Ορισμού: $D_{f(x)} = \mathbb{R}$

2. Διαστής Τιμών:

$$(I) \text{ Εαν } \alpha < 0 \text{ τότε } R_{f(x)} = (-\infty, -\frac{\Delta}{4\alpha}]$$

$$(II) \text{ Εαν } \alpha > 0 \text{ τότε } R_{f(x)} = [-\frac{\Delta}{4\alpha}, +\infty)$$

3. Συμμετρίες: η C_f έχει πάντα συμμετρίες
της ευθείας (ε): $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$

4. Μονοτολία

(I) Εαν $\alpha < 0$ τότε: η f γίνεται αυξανόσα στο
διαστήμα $(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}]$ και γίνεται φθίνουσα στο
διαστήμα $[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty)$

Εάν $a > 0$ τότε: η f γίνεται φθίνουσα στο
διαστήμα $(-\infty, -\frac{B}{2a}]$ και γίνεται αυξανουσα στο
διαστήμα $[-\frac{B}{2a}, +\infty)$

5. Ακρότατα

(I) Εάν $a < 0$ τότε: η f στην διαγ. $x = -\frac{B}{2a}$

λειτουργεί Μεγιστή τιμή $f_{max} = f(-\frac{B}{2a}) = -\frac{\Delta}{4a}$

(II) Εάν $a > 0$ τότε: η f στην διαγ. $x = -\frac{B}{2a}$

λειτουργεί Ελάχιστη τιμή $f_{min} = f(-\frac{B}{2a}) = -\frac{\Delta}{4a}$

6. Γραφική Παράσταση

Η Γραφική παράσταση C_f της f αποτελείται

Παραβολή και έχει εξίσωση (c): $\psi = ax^2 + bx + \gamma$

Σχεδιασμός της Παραβολής (c): $\psi = ax^2 + bx + \gamma$

1. Κορυφή $K(-\frac{B}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$

Τόπος ής αΐδα $x'x$

$$\begin{cases} \Psi = ax^2 + bx + \gamma \\ \Psi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax^2 + bx + \gamma = 0 \\ \Psi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ x \in \emptyset \\ \Psi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ x = -\frac{b}{2a} \\ \Psi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \Psi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ (x, y) \in \emptyset \text{ or } \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ (x, y) = \left(-\frac{b}{2a}, 0\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (x, y) = \left(\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ (I) $\exists x, \Delta < 0$ τότε η 1α) Δείχνει τα $x'x$

(II) $\exists x, \Delta = 0$ τότε η 1α) Σφαιρική τα $x'x$
στο σημείο $A\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$

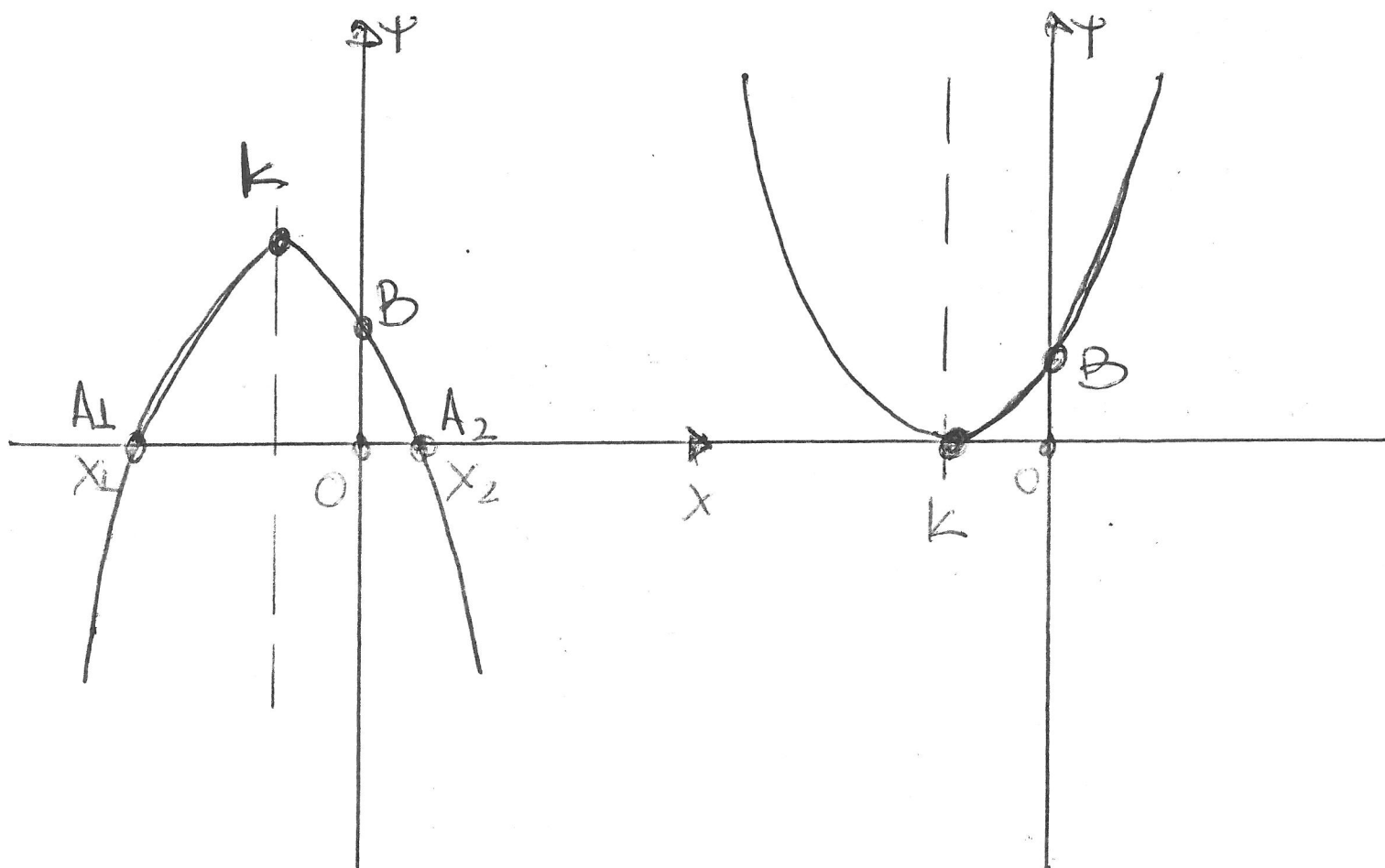
(III) $\exists x, \Delta > 0$ τότε η 1α) Δείχνει τα $x'x$ στα
σημεία $A_{\pm}\left(\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, 0\right)$

Точки на графике ψ'

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi = ax^2 + bx + c \\ X=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \psi = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ X=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \psi = c \\ X=0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x, y) = (0, c)$$

$\Rightarrow$ 1) Точка на графике ψ' есть $B(0, c)$



ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $f(x) = \alpha/x$

Γενική Προσέγγιση: Συνάρτηση f , $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Προσέγγιση
Μεταβλητής x με τύπο:

$$f(x) = \frac{\alpha}{x} \quad \alpha \in \mathbb{R}^*$$

1. Πεδίο Ορισμού: $D_{f(x)} = \mathbb{R} - \{0\}$
2. Τύπος Τιμών: $R_{f(x)} = \mathbb{R} - \{0\}$
3. Συμμετρίες: η f περιττή και η C_f έχει
Κέντρο Συμμετρίας της Αξ. $O(0,0)$
4. Μονοτονία:

(i) Εάν $\alpha < 0$ τότε η f είναι φθίνουσα στο
διαστήμα $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = \mathbb{R} - \{0\}$

(ii) Εάν $\alpha > 0$ τότε η f είναι φθίνουσα στο
διαστήμα $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = \mathbb{R} - \{0\}$

ΚΡΟΤΑΤΑ: η f ΔΕΙ ΕΧΕΙ ΚΡΟΤΑΤΑ

6. ΑΔΟΚΙΜΩΤΕΣ ΕΙΔΕΣ: η C_f ΕΧΕΙ ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ
ΚΑΙ ΚΑΘΕΤΗ ΑΔΟΚΙΜΩΤΗ ΤΩΣ ΕΙΔΕΣ $x'x$, $y'y$.

7. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ

Η ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ C_f ΤΩΣ f ΑΠΟΔΕΙΧΝΕΙ

ΥΠΕΡΒΟΛΗ ΚΑΙ ΕΧΕΙ ΕΙΔΩΣΗ 10: $\psi = \frac{\gamma}{x}$

