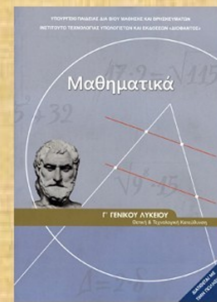
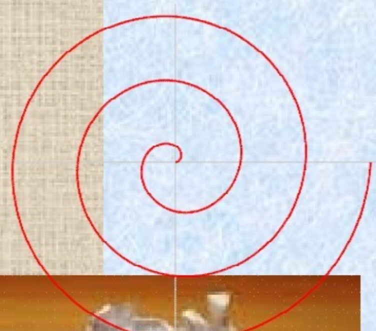


Γ Λυκείου
Μαθηματικά Κατεύθυνσης

Ερωτήσεις Κατανόησης Σχολικού Βιβλίου

Απαντήσεις



Μιγαδικοί Αριθμοί

1. Να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση:

i. Αν στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών ισχύει $u^2 + v^2 = 0$, τότε :

Α. $u = 0$ Β. $v = 0$

Γ. $u = v = 0$ Δ. Τίποτα από τα προηγούμενα.

ii. Ο αριθμός $z = (3+5i)^{10} + (3-5i)^{10}$ είναι:

Α. Φανταστικός Β. Μηδέν

Γ. Πραγματικός Δ. Τίποτα από τα προηγούμενα.

Απάντηση:

i. Δ ii. Γ

2. Ποιες από τις επόμενες ισότητες αληθεύουν για κάθε μιγαδικό z :

Α. $|z^2| = |z|^2$ **Β.** $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ **Γ.** $z \cdot \overline{z} = z^2$

Δ. $z \cdot \overline{z} = |z|$ **Ε.** $|z^2| = z^2$.

Απάντηση:

Α , Β

3. Σύμφωνα με τη συνθήκη που ικανοποιούν οι μιγαδικοί z και αναφέρεται στην πρώτη στήλη, να τους αντιστοιχίσετε στην ευθεία της δεύτερη στήλης που ανήκει η εικόνα τους:

	Συνθήκη		Ευθεία
Α.	$\|z-i\| = \|z+i\|$	**α.**	$x = 1$
Β.	$\|z-1\| = \|z+1\|$	**β.**	yy'
Γ.	$\|z-1\| = \|z-i\|$	**γ.**	$y = x$
		δ.	$y = -x$
Δ.	$\|z+1\| = \|z+i\|$	**ε.**	$x'x$

Απάντηση:

Α	**ε**
Β	**β**
Γ	**γ**
Δ	**γ**

Συναρτήσεις - Όριο - Συνέχεια Συνάρτησης

I.

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ)

1. Αν $f(x)=\ln x$ και $g(x)=e^{-x}$, τότε

α. $(g\circ f)(x)=\dfrac{1}{x},\quad x\in \mathrm{IR}^*$

β. $(f\circ g)(x)=-x,\quad x\in \mathrm{IR}$

Απάντηση:

α.

$A_f=(0,+\infty)\quad A_g=\mathrm{IR}$

$A_{g\circ f}=\{x\in A_f\,/\,f(x)\in A_g\}=\{x>0\,/\ln x\in \mathrm{IR}\}=(0,+\infty)$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=e^{-\ln x}=e^{\ln x^{-1}}=x^{-1}=\dfrac{1}{x}$

Λάθος

β.

$A_{f\circ g}=\{x\in A_g\,/\,g(x)\in A_f\}=\{x\in \mathrm{IR}\,/\,e^{-x}\in(0,+\infty)\}=$
$\{x\in \mathrm{IR}\,/\,e^{-x}>0\}=\mathrm{IR}$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\ln e^{-x}=-x$

Σωστό

2. Αν $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=l\in \mathrm{IR}$, τότε $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$.

Απάντηση:

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=\ell\in \mathrm{IR}$

Θέτω $g(x)=\dfrac{f(x)}{x-1}$ (1) Είναι $\lim\limits_{x\leftarrow 1}g(x)=\ell$

Από (1): f(x)=g(x)(x-1) Άρα $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}[g(x)(x-1)]=\ell\cdot 0=0$

Σωστό

3. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\left[x\left(\dfrac{1}{x^2+x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2+x}=0\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2+x}=0$.

Απάντηση:

Έστω $g(x)=\dfrac{1}{x^2+x}$

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2+x}\overset{\frac{1}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x(x+1)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x+1}\cdot\frac{1}{x}\right)$$

- $x\to 0^-$, $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=1\cdot(-\infty)=-\infty$
- $x\to 0^+$, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=1\cdot(+\infty)=+\infty$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ Άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

Συνεπώς δεν ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0}\left[x\cdot\left(\dfrac{1}{x^2+x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2+x}$

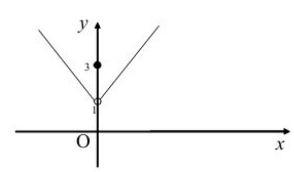
Λάθος

4. Αν $f(x)>1$ για κάθε $x\in IR$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, τότε κατ' ανάγκη $\lim\limits_{x\to 0} f(x)>1$.

Απάντηση:

Δεν ισχύει γιατί μπορεί να υπάρχει $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$

Π.χ. $f(x)=\begin{cases}-x+1 & x<0\\ 3 & x=0\\ x+1 & x>0\end{cases}$



Λάθος

5. Ισχύει: **α.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)=1$

β. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$.

Απάντηση:

α.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{\frac{1}{x}\to 0}\frac{\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\overset{u=\frac{1}{x}}{=\!=\!=\!=\!=}\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=1$$

Σωστό

β.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=1$ Δεν ισχύει. Γιατί

$$\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|=\left|\frac{1}{x}\eta\mu x\right|=\left|\frac{1}{x}\right||\eta\mu x|\le\frac{1}{|x|}\quad \text{Άρα}$$

$$-\frac{1}{|x|}\le\frac{\eta\mu x}{x}\le\frac{1}{|x|}$$

Είναι: $\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|}=0$ και από κριτήριο παρεμβολής είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$$

Λάθος

6. Αν $0\le f(x)\le 1$ κοντά στο 0, τότε $\lim_{x\to 0}(x^2 f(x))=0$.

Απάντηση:

$0\le f(x)\le 1 \overset{x^2>0}{\Rightarrow} 0\le x^2 f(x)\le x^2$

Είναι $\lim_{x\to 0}0=\lim_{x\to 0}x^2=0$ άρα κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x\to 0}\left(x^2 f(x)\right)=0$

Σωστό

7. Αν $f(x)\le\frac{1}{x^2}$, $x\in(\alpha,+\infty)$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

Απάντηση:

Είναι λάθος γιατί μπορεί να μην υπάρχει το όριο
(Θα ήταν σωστό αν μας έδινε ότι υπάρχει το $\lim_{x+\infty}f(x)$ ή αν

$0\le f(x)\le\frac{1}{x^2}$).

Λάθος

8. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to 6}(f(x)g(x))$, τότε είναι ίσο με $f(6)\cdot g(6)$.

Απάντηση:

Δεν ισχύει γιατί μπορεί να μην υπάρχουν τα όρια $\lim_{x\to 6}f(x)$, $\lim_{x\to 6}g(x)$

Λάθος

9. Αν $\lim_{x\to x_0}|f(x)|=1$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $\lim_{x\to x_0} f(x)=1$ ή $\lim_{x\to x_0} f(x)=-1$.

Απάντηση:

Είναι λάθος γιατί αν π.χ. $f(x)=\frac{|x|}{x}$ τότε

$|f(x)|=\left|\frac{|x|}{x}\right|=\frac{|x|}{|x|}=1$ και $\lim_{x\to 0}|f(x)|=1$ ενώ η f δεν έχει όριο στο 0

γιατί $\lim_{x\to 0^-} f(x)=-1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$ **Λάθος**

10. Αν $\lim_{x\to x_0}|f(x)|=0$, τότε $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$.

Απάντηση:

Είναι σωστό γιατί $-|f(x)|\le f(x)\le |f(x)|$ κοντά στο x_0

$\lim_{x\to x_0}(-|f(x)|=\lim_{x\to x_0}|f(x)|=0$ και από κριτήριο παρεμβολής

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=0$$

Σωστό

11. Αν η f είναι συνεχής στο IR και για $x\ne 4$ ισχύει $f(x)=\frac{x^2-7x+12}{x-4}$, τότε το $f(4)$ είναι ίσο με 1.

Απάντηση:

Η f είναι συνεχής στο IR άρα και στο $x_0=4$

$$f(4)=\lim_{x\to 4} f(x)=\lim_{x\to 4}\frac{x^2-7x+12}{x-4}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x-3)}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x-3)=1$$

Σωστό

12. Αν η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και $f(-1)=4$, $f(1)=3$, τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός $x_0\in(-1,1)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\pi$.

Απάντηση:

Η f είναι συνεχής στο [-1,1] , $f(-1)\ne f(1)$ και $3=f(1)<\pi<f(-1)=4$

Άρα από θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $x_0\in(-1,1)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0)=\pi$$

ή Θεώρημα Bolzano για τη συνάρτηση $\varphi(x)=f(x)-\pi$ στο [-1,1].

Σωστό

ΙΙ.

Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις

1. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=m$, $l,m\in IR$ και $f(x)<g(x)$ κοντά στο x_0, τότε κατ' ανάγκη θα είναι:

Α. $l<m$ **Β.** $l\leq m$ **Γ.** $l\geq m$

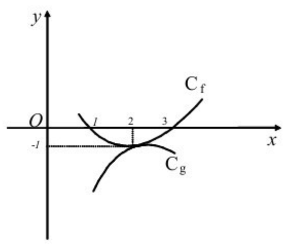
Δ. $l=m$ **Ε.** $m<l$.

Απάντηση:

Αν f(x)<g(x) και υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ θα είναι

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\leq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ δηλαδή μπορεί και να είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

π.χ.



$g(x)<f(x)$, $x\in(1,2)\cup(2,3)$

όμως $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2} g(x)=-1$

Σωστή Απάντηση: Β

2. Το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1-2x^2)^3}{(x^2+1)^3}$ είναι ίσο με:

Α. 8 **Β.** 1 **Γ.** 0 **Δ.** $+\infty$ **Ε.** -8.

Απάντηση:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-2x^2)^3}{(x^2+1)^3}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-2x^2}{x^2+1}\right)^3=\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2+1}{x^2+1}\right)^3$$

$$=(-2)^3=-8$$

Σωστή Απάντηση: Ε

3. Το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x^3-x^2-1|-x^3+x^2}{x^2}$ είναι ίσο με:

Α. $+\infty$ **Β.** $-\infty$ **Γ.** 1 **Δ.** -1 **Ε.** 0.

Απάντηση:

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-x^2-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$ άρα κοντά στο $+\infty$

είναι x^3-x^2-1>0 τότε | x^3-x^2-1|= x^3-x^2-1 άρα

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|x^3-x^2-1|-x^3+x^2}{x^2}\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^2-1-x^3+x^2}{x^2}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x^2}=0$$

Σωστή Απάντηση: Ε

4. Αν το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^3-x^2-2x}{x^3-x}$ δεν υπάρχει, τότε:

Α. $x_0=0$ **Β.** $x_0=2$ **Γ.** $x_0=-1$ **Δ.** $x_0=1$.

Απάντηση:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x^3-x^2-2x}{x^3-x}=\lim_{x\to x_0}\frac{x(x^2-x-2)}{x(x^2-1)}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-2)(x+1)}{(x-1)(x+1)}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{x-2}{x-1}$$

Το όριο δεν υπάρχει άρα x_0=1

Σωστή Απάντηση: Δ

III.

1. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}+1 \quad \text{και} \quad g(x)=\frac{1}{x^2-1}.$$

Από τους παρακάτω ισχυρισμούς λάθος είναι ο:

Α. η g είναι συνεχής στο 2

Β. η f είναι συνεχής στο 1

Γ. η g έχει δυο σημεία στα οποία δεν είναι συνεχής

Δ. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$.

Απάντηση:

$$f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}+1 \ , \quad g(x)=\frac{1}{x^2-1}$$

$$A_f=IR-\{2\}, \quad A_g=IR-\{-1,1\}$$

Α. Η g συνεχής στο $IR-\{-1,1\}$ άρα και στο 2 γιατί $2\in A_g$

Σωστό

Β. Η f συνεχής στο A_f άρα και στο $x_0=1$

Σωστό

Γ. Η g συνεχής στο $IR-\{-1,1\}$
Δεν μπορούμε να μιλάμε για συνέχεια στο $x_1=-1$ και στο $x_2=1$ γιατί δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού.

Λάθος

Δ. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2-4x+4}+1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right)=0+1=1$

Σωστό

2. Ποια από τα παρακάτω όρια είναι καλώς ορισμένα;

Α. $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x^{20}-x+1}$ **Β.** $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x^{20}-x-1}$

Γ. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{3x^9+x-1}$ **Δ.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{3x^9+x-1}$

Ε. $\lim\limits_{x\to0}[\ln(x^3+x+1)]$ **ΣΤ.** $\lim\limits_{x\to0}[\ln(x^3+x-1)]$.

Απάντηση: **Α, Γ, Ε**

3. Δίνεται η συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $\Delta=[0,3]$, με $f(0)=2$, $f(1)=1$ και $f(3)=-1$.

Ποιος από τους παρακάτω ισχυρισμούς δεν προκύπτει κατ' ανάγκη από τις υποθέσεις;

Α. Υπάρχει $x_0\in(0,3)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=0$. **Β.** $\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=-1$.

Γ. $\lim\limits_{x\to2}f(x)=f(2)$. **Δ.** $[-1,2]\subseteq f(\Delta)$.

Ε. Η μέγιστη τιμή της f στο $[0,3]$ είναι το 2 και η ελάχιστη τιμή της το -1.

Απάντηση:

Α. Η f συνεχής στο [0,3]
$f(0)f(3)=-2<0$ Θ. Bolzano ... $f(x_0)=0$ **Σωστό**

Β. Η f συνεχής στο 3 άρα $\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=f(3)=-1$ **Σωστό**

Γ. Η f συνεχής στο $x_0=2\in[0,3]$ άρα $\lim\limits_{x\to2}f(x)=f(2)$ **Σωστό**

Δ. **Σωστό**

Ε. **Λάθος**

Παράγωγοι

I.

Να χαρακτηρίσετε με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις

1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f'(x)\neq 0$ για όλα τα $x\in(0,1)$, τότε $f(0)\neq f(1)$.

Απάντηση:

Ισχύει Θ.Μ.Τ για την f άρα $f'(\xi)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1}$ όμως $f'(x)\neq 0$ τότε $f'(\xi)\neq 0$ άρα $f(0)\neq f(10)$

Σωστό

2. Αν η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\beta)<f(\alpha)$, τότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)<0$.

Απάντηση:

Θ. Μ. Τ για την f ..... $f'(x_0)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\overset{(-)}{\underset{(+)}{<}}0$ άρα $f'(x_0)<0$

Σωστό

3. Αν οι f,g είναι συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $[\alpha,\beta]$, με $f(\alpha)=g(\alpha)$ και $f(\beta)=g(\beta)$, τότε υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε στα σημεία $A(x_0,f(x_0))$ και $B(x_0,g(x_0))$ οι εφαπτόμενες να είναι παράλληλες.

Απάντηση:

Θ.Μ.Τ για την f ..... $f'(x_0)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

Θ.Μ.Τ για την g ..... $g'(x_0)=\dfrac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha}=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ άρα

$f'(x_0)=g'(x_0)$ δηλαδή εφαπτόμενες παράλληλες

Σωστό

4. Αν $f'(x)=(x-1)^2(x-2)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε:

α. το $f(1)$ είναι τοπικό μέγιστο της f

β. το $f(2)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f

Απάντηση: $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1, x=2$

x	$-\infty$ 1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	+
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

α. Λάθος
β. Σωστό

5. α. Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης άρτιου βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.

β. Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.

Απάντηση:

α. π.χ. $f(x)=x^4+3x^2-2x+1$, $f'(x)=4x^3+6x-2$ είναι περιττού βαθμού άρα έχει μια τουλάχιστον ρίζα δηλαδή $f'(x_1)=0$

Σωστό

β. π.χ. $f(x)=x^5+4x^3+x$, $f'(x)=5x^4+12x^2+1>0$

Λάθος

6. Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ με $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in IR$ και $\alpha\neq 0$ έχει πάντα ένα σημείο καμπής.

Απάντηση:

Είναι $f'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma$

$f''(x)=6\alpha x+2\beta$

$f''(x)=0\Leftrightarrow ....$

Σωστό

7. Αν οι συναρτήσεις f,g έχουν στο x_0 σημείο καμπής, τότε και η $h=f\cdot g$ έχει στο x_0 σημείο καμπής.

Απάντηση:

Ισχύει: $f''(x_0)=0$ (1) και $g''(x_0)=0$ (2)

Είναι: $h'(x_0)=\left(f(x_0)g(x_0)\right)'=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$

$h''(x_0)=(f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0))'=$

$=f''(x_0)g(x_0)+f'(x_0)g'(x_0)+f'(x_0)g'(x_0)+f(x_0)g''(x_0)\underset{(2)}{\overset{(10}{\Leftrightarrow}}$

$2f'(x_0)g'(x_0)......$

Λάθος

8. Δίνεται ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο IR και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα $x'x$. Αν υπάρχει κάποιο σημείο $A(x_0,f(x_0))$ της C_f του οποίου η απόσταση από τον άξονα $x'x$ είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια.

Απάντηση:

Θ. Fermat… $f'(x_0)=0$

Σωστό

9. Η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

α. $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$

β. $g(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{(x-1)^2}$

Απάντηση:

α. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-3}{1}==-1$

Λάθος

β. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-3}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{2x-3}{2}\cdot\dfrac{1}{x-1})=-\dfrac{1}{2}\cdot(\pm\infty)=\pm\infty$

Σωστό

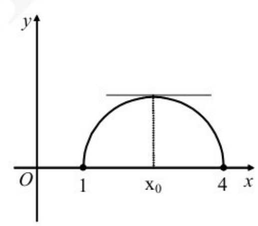
10. Αν γραφική παράσταση της συνάρτησης f δίνεται από το παρακάτω σχήμα, τότε:

i. το πεδίο ορισμού της $\dfrac{1}{f'}$ είναι το $(1,4)$

ii. το πεδίο ορισμού της $\dfrac{1}{f'}$ είναι το $[1, 4]$

iii. $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(1, 4)$

iv. υπάρχει $x_0\in(1,4):f'(x_0)=0$.



Απάντηση:

i. Υπάρχει x_0 ώστε $f'(x_0)=0$ **Λάθος**

ii. **Λάθος**

iii. **Λάθος**

iv. **Σωστό**

11. Η συνάρτηση $f(x)=x^3+x+1$ έχει:

α. μια, τουλάχιστον, ρίζα στο $(0,1)$

β. μια, ακριβώς, ρίζα στο $(-1,0)$

γ. τρεις πραγματικές ρίζες

Απάντηση:

α. Είναι περιττού βαθμού άρα έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο IR
(Θ. Bolzano δεν ισχύει γιατί f(0)=1>0 και f(1)=3>0) **Λάθος**

β. $f'(x)=3x^2+1>0$, $f\nearrow$ άρα μία το πολύ ρίζα
f συνεχής (-1,0) και f(0)f(-1)<0 Θ.Bolzano άρα μία τουλάχιστον
Τελικά μια ακριβώς ρίζα στο (-1,0) **Σωστό**

γ. Σ.Τ. $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

$0\in f(A)$ και $f\nearrow$ άρα μια ακριβώς ρίζα

Λάθος

12. Αν για τις παραγωγίσιμες στο IR συναρτήσεις f,g ισχύουν $f(0)=4$, $f'(0)=3$, $f'(5)=6$, $g(0)=5$, $g'(0)=1$, $g'(4)=2$, τότε $(f\circ g)'(0)=(g\circ f)'(0)$

Απάντηση:

$(f\circ g)'(x)=(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$ άρα

$(f\circ g)'(0)=(f(g(0)))'=f'(g(0))\cdot g'(0)=f'(5)\cdot 1=6\cdot 1=6$

$(g\circ f)'(x)=(g(f(x)))'=g'(f(x))\cdot f'(x)$ άρα

$(g\circ f)'(0)=(g(f(0)))'=g'(f(0))\cdot f'(0)=g'(4)\cdot 3=2\cdot 3=6$

Σωστό

II.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση

1. Το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{6}}{h}$ ισούται με:

Α. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **Β.** $\frac{4}{3}$ **Γ.** $\sqrt{3}$ **Δ.** 0 **Ε.** $\frac{3}{4}$.

Απάντηση:

Έστω f(x)=εφx

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)}{h}$$ Όμως

$$f'(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\ \text{ άρα }\ f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{4}{3}$$

Σωστή απάντηση: Β

2. Το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$ ισούται με:

Α. $\frac{1}{x^2}$ **Β.** $-\frac{2}{x^2}$ **Γ.** $-\frac{1}{x^2}$ **Δ.** $-\frac{2}{x}$ **Ε.** 0

Απάντηση:

Έστω $f(x)=\frac{1}{x}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} \quad \text{Όμως}$$

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$$

Σωστή απάντηση: Γ

3. Αν $f(x)=5^{3x}$ τότε η $f'(x)$ ισούται με:

Α. $3x5^{3x-1}$ **Β.** $\frac{5^{3x}}{3\ln 5}$ **Γ.** $3\cdot 5^{2x}$ **Δ.** $3\cdot 5^{3x}$ **Ε.** $5^{3x}\ln 125$

Απάντηση:

Είναι $f'(x)=\left(5^{3x}\right)'=5^{3x}\cdot\ln 5\cdot 3=5^{3x}\cdot 3\cdot\ln 5=5^{3x}\cdot\ln 5^3=5^{3x}\cdot\ln 125$

Σωστή απάντηση: Ε

4. Αν $f(x)=\sigma\upsilon\nu^3(x+1)$ τότε η $f'(\pi)$ ισούται με:

Α. $3\sigma\upsilon\nu^3(\pi+1)\eta\mu(\pi+1)$ **Β.** $3\sigma\upsilon\nu^2(\pi+1)$

Γ. $-3\sigma\upsilon\nu^2(\pi+1)\eta\mu(\pi+1)$ **Δ.** $3\pi\sigma\upsilon\nu^2(\pi+1)$

Απάντηση:

$f(x)=\sigma\upsilon\nu^3(x+1)$, $f'(x)=-3\sigma\upsilon\nu^2(x+1)\cdot\eta\mu(x+1)(x+1)'$ Άρα

$f'(\pi)=-3\sigma\upsilon\nu^2(\pi+1)\cdot\eta\mu(\pi+1)$

Σωστή απάντηση: Γ

5. Αν $f(x)=(x^2-1)^3$ τότε η έβδομη παράγωγος αυτής στο 0 ισούται με:

Α. 1 **Β.** -1 **Γ.** 0 **Δ.** 27 **Ε.** δεν υπάρχει.

Απάντηση:

$f(x)=(x^2-1)^3=x^6-3x^4+3x^2-1$ (έκτου βαθμού)

$f^{(7)}(0)=0$

Σωστή απάντηση: Γ

6. Αν οι εφαπτόμενες των συναρτήσεων $f(x)=\ln x$ και $g(x)=2x^2$ στα σημεία με τετμημένη x_0 είναι παράλληλες, τότε το x_0 είναι:

Α. 0 **Β.** $\frac{1}{4}$ **Γ.** $\frac{1}{2}$ **Δ.** 1 **Ε.** 2.

Απάντηση:

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g'(x)=4x$ Άρα $f'(x_0)=g'(x_0)\Leftrightarrow \frac{1}{x_0}=4x_0 \Leftrightarrow ......$

$x_0=\frac{1}{2}$ ή $x_0=-\frac{1}{2}$ Απορ.

Σωστή απάντηση: Γ

7. Αν $f(x)=e^{\beta x}$, $g(x)=e^{\alpha x}$ και $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)}{g'(x)}$, τότε το β ως συνάρτηση του α ισούται με:

Α. $\frac{\alpha-1}{\alpha^2}$ **Β.** $\frac{\alpha^2}{\alpha+1}$ **Γ.** $\frac{\alpha+1}{\alpha^2}$ **Δ.** $\frac{\alpha^2}{\alpha^2-1}$ **Ε.** $\frac{\alpha^2}{\alpha-1}$.

Απάντηση:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\left(\frac{e^{\beta x}}{e^{\alpha x}}\right)'=\left(e^{(\beta-\alpha)x}\right)'=e^{(\beta-\alpha)x}\cdot(\beta-\alpha) \quad (1)$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{e^{\beta x}\cdot\beta}{e^{\alpha x}\cdot\alpha}=e^{(\beta-\alpha)x}\frac{\beta}{\alpha} \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε:

$$e^{(\beta-\alpha)x}(\beta-\alpha)=e^{(\beta-\alpha)x}\frac{\beta}{\alpha}\Leftrightarrow \beta-\alpha=\frac{\beta}{\alpha}\Leftrightarrow$$

$$\alpha\beta-\alpha^2=\beta\Leftrightarrow \beta(\alpha-1)=\alpha^2\Leftrightarrow \beta=\frac{\alpha^2}{\alpha-1}$$

Σωστή απάντηση: Ε

8. Αν $f'(x)>0$ για κάθε $x\in[-1,1]$ και $f(0)=0$, τότε:

Α. $f(1)=-1$ **Β.** $f(-1)>0$ **Γ.** $f(1)>0$ **Δ.** $f(-1)=0$.

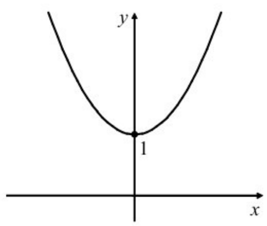
Απάντηση:

$f'(x)>0$ άρα f ↗ τότε $1>0\Leftrightarrow f(1)>f(0)\Leftrightarrow f(1)>0$

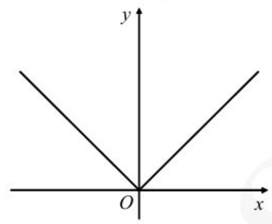
Σωστή απάντηση: Γ

III.

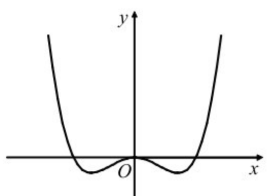
1. Να αντιστοιχίσετε καθεμιά από τις συναρτήσεις α, β, γ, δ σε εκείνη από τις συναρτήσεις Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ που νομίζετε ότι είναι η παράγωγός της



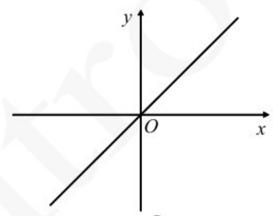
α.



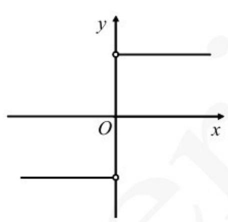
β.



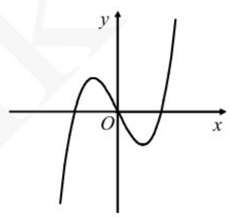
γ.



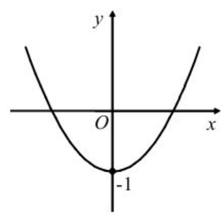
δ.



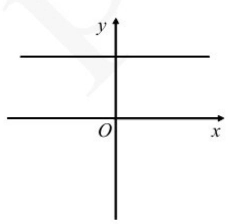
Α.



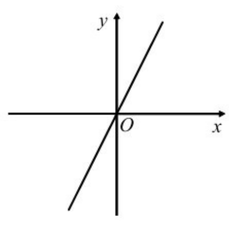
Β.



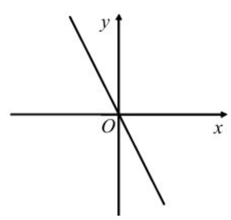
Γ.



Δ.



Ε.



Ζ.

Απάντηση:

α ⟶ Ε , β ⟶ Α , γ ⟶ Β , δ ⟶ Δ

2. Καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις να αντιστοιχίσετε στην ευθεία που είναι ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης στο $+\infty$.

Συνάρτηση	**Ασύμπτωτη**
1. $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$	**Α.** $y = 2$
2. $f(x) = -x + 1 + \frac{1}{e^x}$	**Β.** $y = x - 1$
3. $f(x) = 2 + \frac{3}{x-2}$	**Γ.** $y = -x + 1$
	Δ. $y = x$
	Ε. $y = -x$

Απάντηση:

$1 \longrightarrow \Delta \quad , \quad 2 \longrightarrow \Gamma \quad , \quad 3 \longrightarrow A$

Γιατί

- $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x + \frac{1}{x^2} - x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) + x - 1) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-x + 1 + \frac{1}{e^x} + x - 1) = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - 2) = \lim\limits_{x\to+\infty}(2 + \frac{3}{x-2} - 2) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x-2} = 0$

Ολοκληρώματα

I.

Να χαρακτηρίσετε με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις
(Οι προτάσεις που έχουν * είναι εκτός ύλης)

1. Ισχύει $\int_\alpha^\beta (f(x)+g(x))dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\alpha^\beta g(x)dx$

Σωστό

2. Ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)\cdot g(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx \cdot \int_\alpha^\beta g(x)dx$

Λάθος

3. Αν $\alpha=\beta$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$.

Σωστό

4. Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Λάθος

5. Αν $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \ge 0$.

Σωστό

6. Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx \ge 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Λάθος

7. $\int_{-\alpha}^{\alpha}(x^4+1)dx < \int_{-\alpha}^{\alpha}(x^4+x^2+1)dx$, για κάθε $\alpha>0$.

Απάντηση:

Είναι $x^4+1<x^4+x^2+1$. Τότε $\int_{-\alpha}^{\alpha}(x^4+1)dx < \int_{-\alpha}^{\alpha}(x^4+x^2+1)dx$

Σωστό

8. $\int_0^{\pi/4}\ln(1-\eta\mu^2 x)dx = 2\int_0^{\pi/4}\ln \sigma\upsilon\nu x dx$.

Απάντηση:

$$\int_0^{\pi/4}\ln(1-\eta\mu^2 x)dx=\int_0^{\pi/4}\ln\sigma\upsilon\nu^2 x dx=\int_0^{\pi/4}\ln(\sigma\upsilon\nu x)^2 dx=2\int_0^{\pi/4}\ln(\sigma\upsilon\nu x)dx$$

Σωστό

9*. $\int f(x)dx = xf(x)-\int xf'(x)dx$.

Απάντηση:

$\int xf'(x)dx = xf(x)-\int x'f(x)dx = xf(x)-\int f(x)dx \Leftrightarrow$

$\int f(x)dx = xf(x)-\int xf'(x)dx$

Σωστό

10. $\int_1^e \ln x dx = \int_e^1 \ln\frac{1}{t}dt$.

Απάντηση:

$$\int_e^1 \ln\frac{1}{t}dt=\int_e^1(\ln 1-\ln t)dt=\int_e^1-\ln t dt=\int_1^e \ln t dt=\int_i^e \ln x dx$$

Σωστό

11*. Αν $\int_0^1(f(x)-1)dx=0$ τότε $\bar{f}=1$.

Σωστό

12*. Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$, τότε $f(\xi)=0$ για κάποιο $\xi\in(\alpha,\beta)$.

Σωστό

13. Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$ και η f δεν είναι παντού μηδέν στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει δυο, τουλάχιστον, ετερόσημες τιμές.

Σωστό

14. Το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1(x^3-x)dx$ παριστάνει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^3-x$ και τον άξονα των x.

Απάντηση: …. και τις ευθείες x=-1,x=1….

Λάθος

II.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση (Οι προτάσεις που έχουν * είναι εκτός ύλης)

1*. Αν $f'(x) = \eta\mu\pi x$ και $f(0) = 0$, τότε το $f(1)$ ισούται με

Α. $-\frac{1}{\pi}$, **Β.** $\frac{1}{\pi}$, **Γ.** $\frac{-2}{\pi}$, **Δ.** $\frac{2}{\pi}$.

Απάντηση:

$$f'(x) = \eta\mu\pi x \text{ τότε } \int f'(x)dx = \int \eta\mu\pi x dx \Rightarrow f(x) = -\frac{\sigma\upsilon\nu\pi x}{\pi} + c$$

Όμως f(0)=0 …….c=$\frac{1}{\pi}$ Άρα

$$f(x) = -\frac{\sigma\upsilon\nu\pi x}{\pi} + \frac{1}{\pi} \overset{x=1}{\Rightarrow} f(1) = -\frac{\sigma\upsilon\nu\pi}{\pi} + \frac{1}{\pi} \Rightarrow f(1) = \frac{2}{\pi}$$

Σωστή απάντηση: Δ

2*. Το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{4-x}dx$ στο $(4,+\infty)$ είναι ίσο με

Α. $\ln(4-x)+c$, **Β.** $-\ln(4-x)+c$,

Γ. $\ln(x-4)+c$, **Δ.** $-\ln(x-4)+c$.

Απάντηση:

$$\int \frac{1}{4-x}dx = -\ln|4-x| + c \overset{4<x}{=} -\ln(x-4)+c$$

Σωστή απάντηση: Δ

3*. Το ολοκλήρωμα $\int \left(x-\frac{1}{x}\right)^2 dx$ στο $(0,+\infty)$ είναι ίσο με

Α. $\frac{\left(x-\frac{1}{x}\right)^3}{3}+c$ **Β.** $2\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ **Γ.** $\frac{(1-\ln x)^3}{3}+c$,

Δ. $\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}-2x+c$ **Ε.** $\frac{\left(x-\frac{1}{x}\right)^3}{3}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)+c$.

Απάντηση:

$$\int\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 dx=\int\left(x^2+\frac{1}{x^2}-2\right)dx=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}-2x+c$$

Σωστή απάντηση: Δ

4. Το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1}|x^2-1|dx$ είναι ίσο με

Α. $\frac{4}{3}$, **Β.** 0, **Γ.** $-\frac{4}{3}$, **Δ.** $\frac{2}{3}$, **Ε.** $\frac{5}{3}$.

Απάντηση:

$$I=\int_{-1}^{1}|x^2-1|dx=\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=\int_{-1}^{1}1dx-\int_{-1}^{1}x^2dx=2-\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{4}{3}$$

Σωστή απάντηση: Α

5*. Το ολοκλήρωμα $\int \ln x dx$ είναι ίσο με

Α. $\frac{1}{x}+c$, **Β.** $\frac{\ln^2 x}{2}+c$, **Γ.** $x(\ln x-1)$, **Δ.** $\frac{\ln^3 x}{3}+c$.

Απάντηση:

$$\int \ln x dx=\int \ln x\cdot x' dx=x\ln x-x+c=x(\ln x-1)+c$$

Σωστή απάντηση: Γ

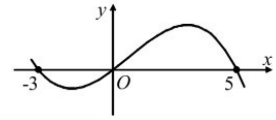
6. Έστω f,g δυο παραγωγίσιμες συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους στο $[\alpha,\beta]$. Αν $f(x)\le g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει:

Α. $f'(x)\le g'(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$, **Β.** $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\le\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$

Γ. $\int f(x)dx\le\int g(x)dx$, $x\in[\alpha,\beta]$, **Δ.** $\int_{\beta}^{\alpha}f(x)dx\le\int_{\beta}^{\alpha}g(x)dx$.

Σωστή απάντηση: Β

7. Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του διπλανού σχήματος είναι ίσο με



Α. $\int_{-3}^{5} f(x)dx$, **Β.** $\int_{5}^{-3} f(x)dx$.

Γ. $\int_{-3}^{0} f(x)dx - \int_{0}^{5} f(x)dx$, **Δ.** $-\int_{-3}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{5} f(x)dx$.

Σωστή απάντηση: Δ

8. Αν $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in [-1,1]$ και $f(0) = g(0) + 2$, τότε για κάθε $x \in [-1,1]$ ισχύει:

Α. $f(x) = g(x) - 2$ **Β.** $\int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))dx = 4$.

Γ. $f(x) \le g(x) , x \in [-1,1]$ **Δ.** Οι C_f , C_g έχουν κοινό σημείο στο $[-1,1]$.

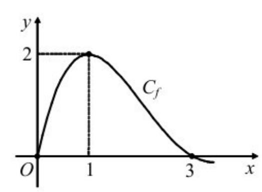
Απάντηση:

$$f'(x) = g'(x) \Rightarrow f(x) = g(x) + c \overset{x=0}{\Rightarrow} f(0) = g(0) + c \Rightarrow c = 2$$

Άρα $f(x)=g(x)+2 \Rightarrow f(x) - g(x) = 2 \Rightarrow \int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))dx = \int_{-1}^{1} 2dx = 4$

Σωστή απάντηση: Β

9. Έστω η συνάρτηση $F(x) = \int_{1}^{x} f(t)dt$ όπου f η συνάρτηση του διπλανού σχήματος. Τότε η $F'(1)$ είναι ίση με



Α. 0 **Β.** 1 **Γ.** 2 **Δ.** $\frac{1}{2}$.

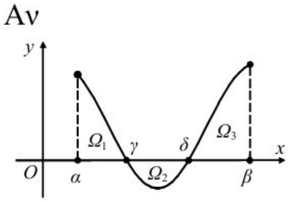
Απάντηση:

$F(x) = \int_{1}^{x} f(t)dt \Rightarrow F'(x) = f(x) \Rightarrow F'(1) = f(1) = 2$ (Σχήμα)

Σωστή απάντηση: Γ

10. Έστω η συνάρτηση f του διπλανού σχήματος. Αν $E(\Omega_1) = 2 , E(\Omega_2) = 1$ και $E(\Omega_3) = 3$

τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναι ίσο με



Α. 6 **Β.** -4 **Γ.** 4 **Δ.** 0 **Ε.** 2

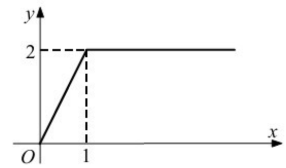
Απάντηση:

$$\int_{\alpha}^{\delta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx - \int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\delta} f(x)dx = E(\Omega_1) - E(\Omega_2) + E(\Omega_3)$$

$=4$

Σωστή απάντηση: Γ

11. Έστω η συνάρτηση $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, όπου f η συνάρτηση του διπλανού σχήματος. Τότε



Α. $F(x)=x^2$

Β. $F(x)=\begin{cases} 2x, & 0\le x<1 \\ 2, & 1\le x \end{cases}$

Γ. $F(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x<1 \\ 2x, & 1\le x \end{cases}$

Δ. $F(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x<1 \\ 2x-1, & 1\le x \end{cases}$

Απάντηση:

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt \Rightarrow F'(x)=f(x)=\begin{cases} 2x & 0\le x<1 \\ 2 & x\ge 1 \end{cases}$$

Στο διάστημα (0,1) το σύνολο των αρχικών είναι:

$$\int F'(x)dx=\int f(x)dx=\int 2xdx=x^2+c_1 \Rightarrow F(x)=x^2+c_1$$

Στο διάστημα $(1,+\infty)$ είναι:

$$\int F'(x)dx=\int f(x)dx=\int 2dx=2x+c_2 \Rightarrow F(x)=2x+c_2$$

Άρα $F(x)=\begin{cases} x^2+c_1 & 0\le x<1 \\ 2x+c_2 & x\ge 1 \end{cases}$

F αρχική της f άρα συνεχής

$$\lim_{x\to 1^-}F(x)=\lim_{x\to 1^+}F(x)\Rightarrow 1+c_1=2+c_2\Rightarrow c_2=-1+c_1$$

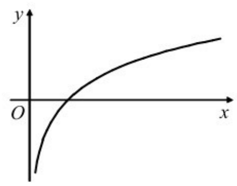
Άρα $F(x)=\begin{cases} x^2+c_1 & 0\le x<1 \\ 2x-1+c_1 & x\ge 1 \end{cases}$

για $c_1=0$ είναι $F(x)=\begin{cases} x^2 & 0\le x<1 \\ 2x-1 & x\ge 1 \end{cases}$

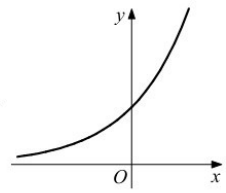
Σωστή απάντηση: Δ

III.

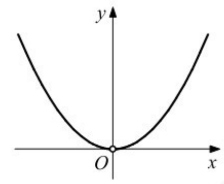
1*. Ποιο από τα παρακάτω σχήματα αντιπροσωπεύει τη γραφική παράσταση μιας λύσης της διαφορικής εξίσωσης $xy' = y$, με $x, y > 0$.



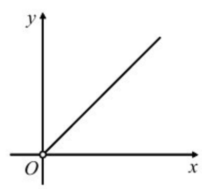
Α



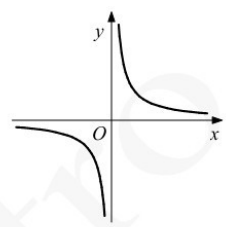
Β



Γ



Δ



Ε

Σωστή απάντηση: Δ

2. Ποια από τα παρακάτω ολοκληρώματα είναι καλώς ορισμένα;

Α. $\int_0^1 \frac{1}{x-1}dx$ **Β.** $\int_0^{\pi/2} \eta\mu x dx$ **Γ.** $\int_0^{\pi} \varepsilon\varphi x dx$

Δ. $\int_0^1 \ln x dx$ **Ε.** $\int_0^2 \sqrt{1-x^2}dx$ **Ζ.** $\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx$

Σωστές απαντήσεις: Β, Ζ

3*. Να εντοπίσετε το λάθος στις παρακάτω πράξεις:

$$\int \frac{1}{x}dx = \int (x)' \frac{1}{x}dx = x \cdot \frac{1}{x} - \int x\left(\frac{1}{x}\right)' dx$$

$$= 1 - \int x\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$= 1 + \int \frac{1}{x}dx.$$

Άρα $\int \frac{1}{x}dx = 1 + \int \frac{1}{x}dx$, οπότε $0 = 1!$

Απάντηση:

Αν F είναι μια παράγουσα της $f(x)=\frac{1}{x}$ τότε η σχέση $\int \frac{1}{x}dx = 1+\int \frac{1}{x}dx$ γράφεται $F(x)+c_1=1+F(x)+c_2$ οπότε $c_1-c_2=1$ και όχι $0=1$.
Επομένως δεν ισχύει η ιδιότητα της διαγραφής για την πρόσθεση αόριστων ολοκληρωμάτων.

4. Να εντοπίσετε το λάθος στις παρακάτω πράξεις

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+\frac{1}{u^2}}\cdot\left(-\frac{1}{u^2}\right)du=-\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+u^2}du=-I$$

$$(\text{Θέσαμε } x=\frac{1}{u} \text{ οπότε } dx=-\frac{1}{u^2}du).$$

Άρα $I=-I$ οπότε $I=0$. Αυτό, όμως, είναι άτοπο, αφού

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx>0, \text{ επειδή } \frac{1}{1+x^2}>0 \text{ για κάθε } x\in[-1,1].$$

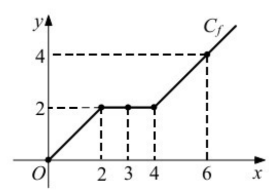
Απάντηση:

Επειδή το x παίρνει και την τιμή 0 δεν μπορούμε να θέσουμε $x=\frac{1}{u}\neq 0$

5. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt,$$

όπου f η συνάρτηση του διπλανού σχήματος. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά.



$F(0)=$ $F(2)=$ $F(3)=$ $F(4)=$ $F(6)=$

Απάντηση:

$F(0)=0$, $F(2)=\int_0^2 f(t)dt=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2$

$F(3)=\int_0^3 f(t)dt=\int_0^2 f(t)dt+\int_2^3 f(t)dt=2+1\cdot 2=4$

$F(4)=\int_0^4 f(t)dt=\int_0^3 f(t)dt+\int_3^4 f(t)dt=4+1\cdot 2=6$

$F(6)=\int_0^6 f(t)dt=\int_0^4 f(t)dt+\int_4^6 f(t)dt=6+\left(\frac{2+4}{2}\cdot 2\right)=6+6=12$