

Ένα όριο της μορφής $\frac{\alpha}{0}$, με $\alpha \in \mathbb{R}^*$, ισούται με $+\infty$ ή $-\infty$ ή δεν υπάρχει.

Παράδειγμα 1

Να βρεθούν τα παρακάτω όρια.

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x-5}{x^2} \quad \theta) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+2}{x-1} \quad \delta) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+3x+7}{x^2+3x+2} \quad \varsigma) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2-3}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$$

$$\varepsilon) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x - 2}{\sigma\upsilon\nu x - 1} \quad \zeta\tau) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \varepsilon\varphi x \quad \jmath) \lim_{x \rightarrow 0^+} \sigma\varphi x \quad \eta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x - x}$$

Λύση

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x-5}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left((3x-5) \cdot \frac{1}{x^2} \right) = -\infty, \text{ διότι } \lim_{x \rightarrow 0} (3x-5) = -5 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

$$\theta) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left((x+2) \cdot \frac{1}{x-1} \right) = -\infty, \text{ διότι } \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+2) = 3 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty.$$

$$\delta) f(x) = \frac{x^2+3x+7}{x^2+3x+2} = \frac{x^2+3x+7}{(x+1)(x+2)} = \frac{x^2+3x+7}{x+1} \cdot \frac{1}{x+2}$$

$$\text{Ισχύει } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+3x+7}{x+1} = \frac{4-6+7}{-2+1} = -5, \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{x+2} = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{x+2} = -\infty.$$

$$\text{Επομένως, } \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty, \text{ οπότε η } f \text{ δεν έχει όριο στο } -2.$$

$$\varsigma) f(x) = \frac{x^2-3}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} = \frac{(x^2-3)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(1+x)-(1-x)} = (x^2-3)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}) \cdot \frac{1}{2x}.$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2-3)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}) = -6 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2x} = +\infty, \text{ είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty.$$

$$\varepsilon) f(x) = (\eta\mu x - 2) \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x - 1}$$

$$\text{Ισχύει } \lim_{x \rightarrow 0} (\eta\mu x - 2) = -2, \lim_{x \rightarrow 0} (\sigma\upsilon\nu x - 1) = 0 \text{ και } \sigma\upsilon\nu x - 1 < 0 \text{ κοντά στο } 0,$$

$$\text{οπότε } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x - 1} = -\infty \text{ και άρα } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty.$$

$$\zeta\tau) \varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \eta\mu x \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}, \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \eta\mu x = 1, \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sigma\upsilon\nu x = 0 \text{ και}$$

$$\sigma\upsilon\nu x > 0 \text{ για κάθε } x \in (0, \frac{\pi}{2}). \text{ Άρα, } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \varepsilon\varphi x = +\infty.$$

3) $\sin x = \cos x \cdot \frac{1}{\tan x}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x = 0$ και $\tan x > 0$ για κάθε

$x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Επομένως, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\tan x} = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x = +\infty$.

η) $f(x) = \frac{\sin x}{\tan x - x} = \sin x \cdot \frac{1}{\tan x - x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} (\tan x - x) = 0$

. Αν $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, τότε $\tan x < x$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\tan x - x} = -\infty$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$.

. Αν $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, τότε $\tan x > x$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\tan x - x} = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$.

Άρα, η f δεν έχει όριο στο $x_0 = 0$.

Παράδειγμα 2

Να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + \lambda x + 4}{x^2 - 4x + 4}$

να έχει πεπερασμένο όριο στο σημείο $x_0 = 2$.

Λύση

Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4x + 4) = 4 - 8 + 4 = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + \lambda x + 4) = 2\lambda + 8$.

. Αν $\lambda \neq -4$, τότε $f(x) = (x^2 + \lambda x + 4) \cdot \frac{1}{(x-2)^2}$ και $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = (2\lambda + 8) \cdot (+\infty) = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \lambda > -4 \\ -\infty, & \text{αν } \lambda < -4 \end{cases}$.

. Αν $\lambda = -4$, τότε $f(x) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$.

Άρα, η f έχει πεπερασμένο όριο στο $x_0 = 2$, όταν $\lambda = -4$.

Παράδειγμα 3

Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^3 + \alpha x + \beta}{|x-1|}$ στο $x_0 = 1$.

Λύση

Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} |x-1| = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + \alpha x + \beta) = 1 + \alpha + \beta$

. Αν $1 + \alpha + \beta \neq 0$, τότε $f(x) = (x^3 + \alpha x + \beta) \cdot \frac{1}{|x-1|}$ και $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } 1 + \alpha + \beta > 0 \\ -\infty, & \text{αν } 1 + \alpha + \beta < 0 \end{cases}$.

• Αν $1+\alpha+\beta=0$, δηλαδή $\beta=-\alpha-1$, τότε έχουμε

$$f(x) = \frac{x^3+\alpha x-\alpha-1}{|x-1|} = \frac{(x^3-1)+\alpha(x-1)}{|x-1|} = \frac{(x-1)(x^2+x+1+\alpha)}{|x-1|} = \begin{cases} x^2+x+1+\alpha, & x>1 \\ -(x^2+x+1+\alpha), & x<1 \end{cases}$$

οπότε $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2+x+1+\alpha) = 3+\alpha$ και $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -3-\alpha$.

Η f έχει όριο στο $x_0=1$, αν και μόνο αν ισχύει $3+\alpha=-3-\alpha$, δηλ. $\alpha=-3$.
 Τότε είναι $\beta=-\alpha-1=2$ και $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$.
 Προφανώς, αν $\beta=-\alpha-1$ και $\alpha \neq -3$, τότε η f δεν έχει όριο στο $x_0=1$.

Παράδειγμα 4

Αν $v \in \mathbb{N}^*$, να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^v + \alpha x + \beta}{x-1} = 2$.

Λύση

Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 1} (x^v + \alpha x + \beta) = 1 + \alpha + \beta$.

• Αν $1+\alpha+\beta \neq 0$, τότε η $f(x) = \frac{x^v + \alpha x + \beta}{x-1} = (x^v + \alpha x + \beta) \cdot \frac{1}{x-1}$ δεν έχει όριο στο $x_0=1$, διότι

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } 1+\alpha+\beta > 0 \\ -\infty, & \text{αν } 1+\alpha+\beta < 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \begin{cases} -\infty, & \text{αν } 1+\alpha+\beta > 0 \\ +\infty, & \text{αν } 1+\alpha+\beta < 0 \end{cases}$$

• Αν $1+\alpha+\beta=0$, δηλαδή $\beta=-\alpha-1$, τότε έχουμε:

$$f(x) = \frac{x^v + \alpha x - \alpha - 1}{x-1} = \frac{(x^v-1) + \alpha(x-1)}{x-1} = x^{v-1} + x^{v-2} + \dots + x + 1 + \alpha \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^{v-1} + x^{v-2} + \dots + x + 1 + \alpha) = 1 + 1 + \dots + 1 + 1 + \alpha = v + \alpha.$$

Έτσι, ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$, όταν $\alpha = 2-v$ και $\beta = -\alpha-1 = v-3$.