

2.1 Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους

1. α) Να δείξετε ότι για οποιονδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10.$$

- β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y , ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$.

2. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε να ισχύουν $\frac{\alpha + \beta}{\beta} = 4$ και $\frac{\gamma}{\delta - \gamma} = \frac{1}{4}$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3\beta$ και $\delta = 5\gamma$.

- β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\Pi = \frac{\alpha\gamma + \beta\gamma}{\beta\delta - \beta\gamma}$.

3. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση: $(x - 2y)^2 - 2(3 - 2xy) = 5y^2 - 1$.

- α) Να αποδείξετε ότι $x^2 - y^2 = 5$.

- β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $P = (x + y)^3 (x - y)^3$.

4. Αν οι αριθμοί $2\alpha - 1$ και $\beta - 1$ είναι αντίστροφοι, με $\alpha \neq 1$ και $\beta \neq 1$ να δείξετε ότι:

- α) $2\alpha + \beta = 2\alpha\beta$,

- β) Οι αριθμοί $x = \alpha - \beta$ και $y = \alpha(1 - 2\beta) + 2\beta$ είναι αντίθετοι.

5. Για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύει: $\frac{4x + 5y}{x - 4y} = -2$.

- α) Να δείξετε ότι $y = 2x$.

- β) Για $y = 2x$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \frac{2x^2 + 3y^2 + xy}{xy}$.

6. Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $(x + 4y)(x + y) = 9xy$.

- α) Να αποδείξετε ότι

$$\text{i. } (2y - x)^2 = 0, \quad \text{ii. } y = \frac{x}{2}.$$

- β) Να αποδείξετε ότι $\left(2y - \frac{x}{2}\right)^2 + \left(2y + \frac{x}{2}\right)^2 = 10y^2$.

7. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, για τους οποίους ισχύουν $\alpha^2 = 2\alpha + \beta$ και $\beta^2 = 2\beta + \alpha$.

- α) Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i. } \alpha^2 - \beta^2 = \alpha - \beta, \quad \text{ii. } \alpha + \beta = 1.$$

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 + \beta^2$.

8. Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ και $\alpha\beta\gamma \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι: i. $\beta + \gamma = -\alpha$, ii. $\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} = -\alpha$.

β) Με παρόμοιο τρόπο να απλοποιήσετε τα κλάσματα $\frac{\beta^2}{\gamma + \alpha}$, $\frac{\gamma^2}{\alpha + \beta}$ και να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} + \frac{\beta^2}{\gamma + \alpha} + \frac{\gamma^2}{\alpha + \beta} = 0.$$

9. Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί. Ορίζουμε: $A = 2(x + y)^2 - (x - y)^2 - 6xy - y^2$.

α) Να αποδείξετε ότι: $A = x^2$.

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $B = 2 \cdot 2022^2 - 2020^2 - 6 \cdot 2021 - 1$ είναι ίσος με το τετράγωνο φυσικού αριθμού τον οποίο να προσδιορίσετε.

10. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \neq 0$, ισχύει ότι $(\alpha + \beta) \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) = 4$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2$, β) $\alpha = \beta$.

11. Δίνονται οι αλγεβρικές παραστάσεις $A = \frac{-\alpha}{\beta}$, $B = \alpha^2$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές των πραγματικών αριθμών α, β οι αλγεβρικές παραστάσεις A, B είναι πραγματικοί αριθμοί διαφορετικοί του 0.

β) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί A, B είναι αντίθετοι, αν και μόνο, αν οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι.

12. Στο διπλανό σχήμα το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ έχει πλευρά ίση με 6 και οι ευθείες EZ και $H\Theta$ είναι παράλληλες στις πλευρές του. Αν $KZ = x$ και $KH = y$, $x, y \in (0, 6)$, τότε:

α) Να υπολογίσετε τα E_1, E_2, E_3, E_4 με τη βοήθεια των x, y .

β) Να βρείτε τα εμβαδά E_1, E_2, E_3, E_4 των τεσσάρων ορθογώνιων του σχήματος όταν $x = 4$ και $y = 2$.

γ) Αν επιπλέον ισχύει $E_1 + E_3 = E_2 + E_4$, να αποδείξετε ότι:

i. $xy + 9 = 3(x + y)$,

ii. τουλάχιστον ένα από τα τμήματα EZ και $H\Theta$ διέρχεται από το κέντρο O του τετραγώνου.

