3.2 Η εξίσωση $x^{\nu} = \alpha$

3.3 Εξισώσεις 2ου βαθμού

1. **α)** Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 1 = 0$.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|x| + x = 0$.

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|x| + |x^2 - 1| + x = 0$.

2. **α)** Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ανισότητες ισχύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύουν ως ισότητες.

i. $x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4}$, **ii.** $x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4}$.

β) Να δείξετε ότι $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Δίνεται η παράσταση $A = \frac{(x^3 - 1)(x^3 + 1)}{x^2 - 1}$.

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση A.

ii. Με τη βοήθεια του **β)** ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να εξετάσετε αν η παράσταση A μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{9}{16}$.

3. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (\lambda - 1)x + 6 = 0 \; (1)$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1, να βρείτε το λ.

β) Για $\lambda = 2$ να λύσετε την εξίσωση (1).

4. Το πάτωμα του εργαστηρίου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις $x + 1$ μέτρα και x μέτρα.

α) Να γράψετε με τη βοήθεια του x την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος.

β) Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι 90 τετραγωνικά μέτρα, να βρείτε τις διαστάσεις του.

5. Αν α,β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $\alpha + \beta = 2$ και $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = -30$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -15$.

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

6. **α)** Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| = 3$.

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του **α)** ερωτήματος.

7. Δίνεται η παράσταση: $K = \frac{x^2 - 4x + 4}{2x^2 - 3x - 2}$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - 3x - 2$.

β) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση Κ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση Κ.

8. **α)** Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $-2x^2 + 10x = 12$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{-2x^2 + 10x - 12}{x - 2} = 0$.

9. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $\alpha \cdot \beta = 4$ και $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 20$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha + \beta = 5$.

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

10. Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + x - 1 \ (1)$.

α) Αν x_1, x_2 είναι ρίζες του τριωνύμου (1), να βρείτε την τιμή των παραστάσεων $x_1 + x_2$, $x_1 x_2$ και $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

β) Αν $\frac{1}{x_1} = -1$ και $\frac{1}{x_2} = 2$ να βρείτε μια εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τις $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$.

11. Δίνονται οι αριθμοί: $A = \frac{1}{5 + \sqrt{5}}$, $B = \frac{1}{5 - \sqrt{5}}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $A + B = \frac{1}{2}$ **ii.** $A \cdot B = \frac{1}{20}$

β) Να κατασκευάσετε μία εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς Α και Β.

12. **α)** Να λύσετε την εξίσωση $|2x - 1| = 3$.

β) Αν α, β με $\alpha < \beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση:

$$\alpha x^2 + \beta x + 3 = 0$$

13. Δίνονται οι αριθμοί: $A = \frac{1}{3 - \sqrt{7}}$, $B = \frac{1}{3 + \sqrt{7}}$.

α) Να δείξετε ότι: $A + B = 3$ και $A \cdot B = \frac{1}{2}$.

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς A, B.

14. Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί α ,β, τέτοιοι ώστε:

$$\alpha+\beta=12 \quad \text{και} \quad \alpha^2+\beta^2=272$$

α) Με τη βοήθεια της ταυτότητας $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$, να δείξετε ότι: $\alpha\cdot\beta=-64$.

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α, β .

γ) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α, β .

15. **α)** Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2-x-6=0 \ (1)$.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-1|<2$ (2).

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2).

16. Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2-2\alpha x-2\alpha-2=0$, με $\alpha\in\mathbb{R}^* \ (1)$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}^* \ (1)$ για τις οποίες η εξίσωση (1) έχει ρίζα το 3.

β) Για $\alpha=2$ να λύσετε την εξίσωση (1).

17. **α)** **i.** Να βρείτε για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$, ορίζεται η παράσταση: $A=\dfrac{x}{x-|x|}$.

ii. Για τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση A , να δείξετε ότι $A=\dfrac{1}{2}$.

β) Για $x<0$, να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{x^3}{x-|x|}=\dfrac{3}{2}x+2$.

18. **α)** Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση: $\Pi=\dfrac{2x^2-1}{x^2-x}+\dfrac{1}{1-x}$.

β) Για τις τιμές του x που βρήκατε στο **α)** ερώτημα, να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{2x^2-1}{x^2-x}+\dfrac{1}{1-x}=0$.

19. Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\lambda x+4\lambda+5=0$ με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης όταν $\lambda=-2$ και όταν $\lambda=3$.

β) **i.** Να αποδείξετε ότι αν $\lambda=5$, τότε η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα.

ii. Να εξετάσετε αν υπάρχει άλλη τιμή του λ, ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα.

γ) Αν ισχύει $|\lambda^2-4\lambda-5|=4\lambda-\lambda^2+5,\ \lambda\in\mathbb{R}-\{-1,5\}$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

20. Δίνεται η εξίσωση $x^2-4x+2-\lambda^2=0$, (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$, η (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), τότε:

i. Να βρείτε το $S=x_1+x_2$.

ii. Να βρείτε το $P=x_1\cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ .

γ) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2+\sqrt{3}$ τότε:

i. να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2-\sqrt{3}$,

ii. να βρείτε τον αριθμό λ.

21. Για την κάλυψη, με τετράγωνα πλακάκια, μέρους ενός τοίχου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλακάκια τύπου Α με πλευρά d cm ή πλακάκια τύπου Β με πλευρά $(d+1)$ cm.

α) Να βρείτε ως συνάρτηση του d, το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Α και κάθε πλακάκι τύπου Β.

β) Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί είτε με 200 πλακάκια τύπου Α είτε με 128 τύπου Β, να βρείτε:

i. τη διάσταση που έχει το πλακάκι κάθε τύπου.

ii. το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν.

22. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2-\lambda)x^2-(\lambda^2-1)x+\lambda-1=0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού.

β) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο ερώτημα (α) η (1) παίρνει τη μορφή: $\lambda x^2-(\lambda+1)x+1=0$.

γ) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του λ που βρήκατε στο ερώτημα (α) η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

δ) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι 2ου βαθμού.

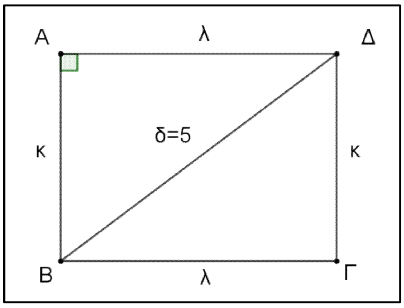
23. Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\lambda x+4(\lambda-1)=0$: (1) με άγνωστο το x και παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι η $\Delta=(2\lambda-4)^2$.

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης (1) για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ.

γ) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή της παραμέτρου λ ο αριθμός $x=2$ είναι λύση της εξίσωσης (1).

24. Δίνεται ορθογώνιο με διαστάσεις κ και λ του οποίου η περίμετρος είναι $\Pi=14$ cm και μια διαγώνιος $\delta=5$ cm.



α) **i.** Με χρήση της ταυτότητας $(\kappa+\lambda)^2=\kappa^2+2\kappa\lambda+\lambda^2$, να δείξετε ότι για το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου ισχύει $E=12\ cm^2$.

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί οι τις διαστάσεις κ και λ του ορθογωνίου είναι ρίζες της $x^2-7x+12=0$.

iii. Να βρείτε τις διαστάσεις κ και λ του ορθογωνίου.

β) Να δείξετε ότι ένα ορθογώνιο με περίμετρο $\Pi=14$ cm πρέπει να έχει εμβαδόν $E\le\frac{49}{4}$.

25. **α)** Να λύσετε την εξίσωση $x^2-3x-4=0$ (1)

β) Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α,β για τους οποίους ισχύει: $\alpha^2-3\alpha\beta-4\beta^2=0$.

i. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1).

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β.

26. Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2+(2\lambda-1)x+\lambda-1=0$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή.

β) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης ως συνάρτηση του λ.

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2 μονάδες.

27. **α)** Να λύσετε τις εξισώσεις: $3x^2-14x+8=0$ (1) και $8x^2-14x+3=0$ (2)

β) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \quad (3) \quad \text{και} \quad \gamma x^2+\beta x+\alpha=0 \quad (4), \quad \text{με } \alpha\cdot\gamma\neq 0.$$

Να αποδείξετε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι:

Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $\alpha\cdot\gamma\neq 0$, τότε

i. $\rho\neq 0$, **ii.** $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης (4).

28. **α)** Δίνεται η εξίσωση: $x^4-8x^2-9=0$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε την εξίσωση:

$$x^4+\beta x^2+\gamma=0 \ (1) \quad \text{με παραμέτρους } \beta,\gamma\in\mathbb{R}$$

Να δείξετε ότι αν $\gamma<0$, τότε:

i. $\beta^2-4\gamma>0$,

ii. Η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

29. Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2-(\alpha^2-1)x-\alpha=0$, με παράμετρο $\alpha\neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι: $\Delta=(\alpha^2+1)^2$.

β) Να βρείτε τις ρίζες ρ_1 και ρ_2 της εξίσωσης, ως συνάρτηση του α.

Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι $\rho_1=\alpha$ και $\rho_2=-\frac{1}{\alpha}$,

γ) Να βρείτε τις τιμές του α ώστε $|\rho_1-\rho_2|=2$.

30. Δίνεται η εξίσωση: $x^2-2x+\lambda=0$, με παράμετρο $\lambda<1$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.

β) Να δείξετε ότι: $x_1 + x_2 = 2$.

γ) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον $|x_1 - 2| = |x_2 + 2|$, τότε:

i. Να δείξετε ότι: $x_1 - x_2 = 4$.

ii. Να βρείτε τις ρίζες x_1, x_2 και η τιμή του λ.

31. Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)x + 16 = 0 \text{ όπου } \lambda > 0$$

α) Να βρείτε:

i. την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ.

ii. το εμβαδόν E του ορθογωνίου.

β) Να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 16$, για κάθε $\lambda > 0$.

γ) Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

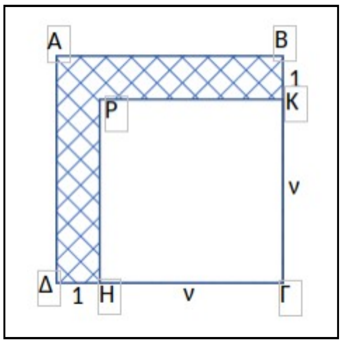
32. Κάθε περιττός ακέραιος αριθμός α γράφεται στη μορφή $\alpha = 2k + 1$, όπου k ακέραιος.

α) Να γράψετε τους αριθμούς 3, 5, 7 ως διαφορά τετραγώνων δύο ακεραίων.

β) i. Να αποδείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών ισούται πάντα με έναν περιττό ακέραιο.

ii. Να γράψετε τον αριθμό 2021 ως διαφορά δύο τετραγώνων ακεραίων αριθμών.

γ) Στο σχήμα τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΓΗΡΚ είναι τετράγωνα με $\Gamma H = \Gamma K = \nu$ και $BK = \Delta H = 1$. Αν γνωρίζουμε ότι το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν είναι ίσο με 45, να βρεθεί η τιμή του θετικού ακεραίου ν.



33. Έστω Ω το σύνολο που έχει ως στοιχεία τους αριθμούς που είναι οι ενδείξεις ενός ζαριού.

α) Να γράψετε με αναγραφή το σύνολο Ω.

β) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda - 2 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε:

i. το σύνολο Α που περιέχει ως στοιχεία τις τιμές του $\lambda \in \Omega$, αν επιπλέον γνωρίζετε ότι η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

ii. την πραγματική τιμή του λ, αν η εξίσωση έχει ρίζες αντίστροφες.

γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα **β)ii.** να υπολογίσετε τις ρίζες της εξίσωσης.

34. Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β, με $\alpha \neq \beta$ για τους οποίους ισχύει: $\dfrac{\alpha^2+1}{\beta^2+1}=\dfrac{\alpha}{\beta}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K=\dfrac{\alpha^{22}\cdot\left(\beta^3\right)^8}{\alpha^{-2}\cdot\left(\alpha\beta\right)^{25}}$.

γ) Αν επιπλέον οι μη μηδενικοί αριθμοί α και β εκφράζουν τα μήκη των πλευρών ορθογωνίου παραλληλογράμμου με άθροισμα $\dfrac{5}{2}$, να τους υπολογίσετε.

δ) Να βρείτε τον αριθμό που πρέπει να προσθέσετε στο α ή στο β, έτσι ώστε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο να γίνει τετράγωνο.

35. Μια δεξαμενή έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση τετράγωνο και ύψος ίσο με το ένα τέταρτο του μήκους της.

α) Αν η δεξαμενή έχει όγκο 16m^3, να βρείτε τις διαστάσεις της.

β) Λόγω έλλειψης χώρου η δεξαμενή ανακατασκευάζεται με βάση ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ύψος 2 μέτρα (όπως στο παρακάτω σχήμα). Αν το πλάτος της νέας δεξαμενής είναι κατά 2m μικρότερο από το μήκος της υπολογίστε τις διαστάσεις της βάσης προκειμένου ο όγκος να παραμείνει 16m^3.

γ) Αν η νέα δεξαμενή περιέχει 10m^3 πετρέλαιο να βρείτε το ύψος της στάθμης του πετρελαίου μέσα στη δεξαμενή.