ΛΥΣΗ

α)

i. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [-3,2] ως άθροισμα της συνεχούς στο [-3,2] με την πολυωνυμική x .

ii. Η C_f τέμνει τον άξονα x'x στα σημεία Α και Β τα οποία είναι εκατέρωθεν του Ο, οπότε έστω $A(x_1, 0)$ και $B(x_2, 0)$ με $x_1 < 0 < x_2$ και $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Στο διάστημα $[x_1, x_2] \subseteq [-3,2]$ η συνάρτηση g είναι συνεχής.

$g(x_1) = f(x_1) + x_1 = 0 + x_1 = x_1 < 0$

$g(x_2) = f(x_2) + x_2 = 0 + x_2 = x_2 > 0$

$g(x_1) \cdot g(x_2) = x_1 \cdot x_2 < 0$

Επομένως από το Θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(x_1, x_2) \subseteq [-3,2]$. Δηλαδή η $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (-1,2), τότε και η g είναι παραγωγίσιμη στο (-1,2) με $g'(x) = f'(x) + 1$. (1)

Η f παρουσιάζει μέγιστο στο 0 το $f(0) = 3$ και αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, από Θεώρημα Fermat θα ισχύει ότι $f'(0) = 0$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι: $y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0)$

Για $x_0 = 0$ έχουμε: $y - g(0) = g'(0)(x - 0)$. (2)

Αλλά $g(0) = f(0) + 0 = 3$ και $g'(0) = f'(0) + 1$ λόγω της (1) ή $g'(0) = 1$

Οπότε η σχέση (2) γίνεται: $y - 3 = x \Leftrightarrow y = x + 3$.