

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ & ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

*Απαντήσεις Θεμάτων Πανελλαδικών Εξετάσεων Εσπερινών Γενικών
Λυκείων*

ΘΕΜΑ Α

A.1 α) Ορισμός σχ. βιβλίο σελ. 15

β) i. θεωρία σχ. βιβλίο σελ. 35

ii. θεωρία σχ. βιβλίο σελ. 35-36

A.2 Σχ. βιβλίο σελ. 142

A.3 Θεώρημα σελ. 135

A.4 α) Λάθος

Αιτιολόγηση: σχόλιο σχ. βιβλίο σελ. 134

β) Λάθος, διότι αυτό ισχύει μόνο αν η f είναι συνεχής στο x_0

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + \beta x, & x < 1 \end{cases}$$

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη, είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 1$, οπότε και συνεχής στο 1, άρα ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \quad (1) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + \alpha) = 1 + \alpha = f(1) \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (e^{x-1} + \beta x) = e^0 + \beta = 1 + \beta \quad (4)$$

$$(2) \stackrel{(3),(4)}{\Rightarrow} 1 + \alpha = 1 + \beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$$

$$\text{Για } \alpha = \beta: f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + \alpha x, & x < 1 \end{cases}$$

$$x \in (1, \delta):$$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x^2 + \alpha - (1 + \alpha)}{x - 1} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1 \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \stackrel{(5)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2 \quad (6)$$

$$x \in (\gamma, 1):$$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{e^{x-1} + \alpha x - (1 + \alpha)}{x - 1} = \frac{e^{x-1} + \alpha x - 1 - \alpha}{x - 1} = \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} + \frac{\alpha(x - 1)}{x - 1} = \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} + \alpha \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \stackrel{(7)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} + \alpha = \left. \frac{d(e^{x-1})}{dx} \right|_{x=1} + \alpha = 1 + \alpha \quad (8)$$

$$\stackrel{(6),(8)}{(1)} \Rightarrow 2 = 1 + \alpha \Leftrightarrow \alpha = 1$$

Επειδή $\alpha = \beta$ έχουμε $\alpha = \beta = 1$

$$\text{Τότε } f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2$$

Δ.2

$$\text{Για } \alpha = \beta = 1 \text{ έχω: } f(x) = \begin{cases} e^{x-1} + x, & x < 1 \\ x^2 + 1, & x \geq 1 \end{cases}.$$

$$\text{Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ με } f'(x) = \begin{cases} e^{x-1} + 1, & x < 1 \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}, \text{ διότι } f'(1) = 2 \text{ (από Γ1)}$$

$$f'(x) > 0 \text{ στο } (-\infty, 1) \text{ και } f'(x) > 0 \text{ στο } [1, +\infty) \text{ άρα } f'(x) > 0 \text{ στο } \mathbb{R}$$

$$f \text{ συνεχής στο } \mathbb{R} \text{ άρα η } f \uparrow \text{ στο } \mathbb{R}.$$

$$\text{Σύνολο τιμών: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{x-1} + x) = -\infty \quad (1)$$

$$\text{Διότι } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-1} \stackrel{u=x-1}{=} \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ u \rightarrow -\infty}} e^u = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = +\infty \quad (2)$$

Άρα, το σύνολο τιμών της f είναι: $f(\mathcal{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)^{(1),(2)} = \mathcal{R}$