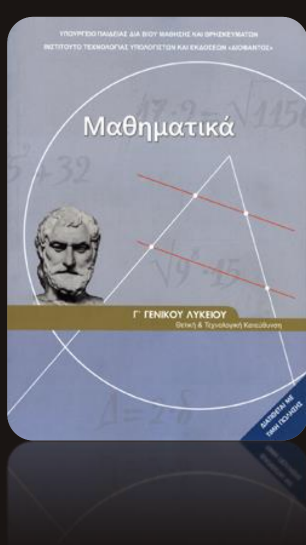
ΛΥΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΤΡΙΤΗ

4 Ιουνίου 2024



ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

lisari team

ΛΥΣΕΙΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2024

3η έκδοση

Αντωνόπουλος Νίκος

Βελαώρας Γιάννης

Βοσκάκης Σήφης

Γιαννόπουλος Μ.

Μανώλης Ανδρέας

Ποδηματάς Θωμάς

Σίσκας Χ.

Συντονισμός

Παπαμικρούλης Δημήτρης

Οι απαντήσεις - λύσεις είναι αποτέλεσμα της συλλογικής δουλειάς των μελών της **lisari team**

3η έκδοση: 6 – 6 – 2024 *(συνεχής ανανέωση)*

Οι λύσεις διατίθεται **αποκλειστικά**

από το μαθηματικό ιστότοπο

lisari.blogspot.com

Πρόλογος

Στο παρόν αρχείο περιλαμβάνονται οι απαντήσεις των Πανελλαδικών Εξετάσεων 2024 στο μάθημα **Μαθηματικά Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής.** Η παρουσίαση των απαντήσεων είναι πλήρης και αναλυτική στο μέγιστο δυνατό, προκειμένου οι μαθητές να μπορούν να μελετήσουν και να επεξεργαστούν εύκολα το αρχείο.

Η εργασία αυτή εκπονήθηκε αποκλειστικά από τη γνωστή **διαδικτυακή ομάδα Μαθηματικών** από διάφορα μέρη της Ελλάδος, τη **lisari team.** Φέτος εστιάσαμε στη ποικιλία των λύσεων και όσο στο χρόνο που θα αναρτηθούν οι λύσεις.

Την αρχική συγγραφή των λύσεων ακολούθησαν ενδελεχείς έλεγχοι, διορθώσεις και βελτιώσεις με στόχο μια **πληρέστερη και πιο ποιοτική παρουσίαση**. Ζητούμε συγνώμη για τυχόν παραλείψεις, λάθη ή αστοχίες που ενδεχομένως θα έχουν διαφύγει της προσοχής μας, γεγονός αναπόφευκτο δεδομένων των στενών χρονικών περιθωρίων. Θα ακολουθήσουν επόμενες εκδόσεις, όπου η εν λόγω παρουσίαση θα βελτιωθεί, ίσως εμπλουτιστεί και με εναλλακτικές λύσεις.

Οποιαδήποτε σχόλια, παρατηρήσεις, διορθώσεις και βελτιώσεις επί των λύσεων είναι ευπρόσδεκτα στην ηλεκτρονική διεύθυνση lisari.blogspot@gmail.com.

Με εκτίμηση

lisariteam

4 Ιουνίου 2024

lisari team

1. Αντωνόπουλος Νίκος (3ο ΓΕΛ Άργους)

2. Αυγερινός Βασίλης (Φροντιστήριο "Διάταξη" - Ν. Σμύρνη)

3. Βελαώρας Γιάννης (Φροντιστήριο "Βελαώρας" - Λιβαδειά Βοιωτίας)

4. Βοσκάκης Σήφης (Φροντιστήριο "Ευθύνη" - Ρέθυμνο)

5. Γιαννόπουλος Μιχάλης (Θεσσαλονίκη - Αμερικάνικη Γεωργική Σχολή)

6. Γκριμπαβιώτης Παναγιώτης (Φροντιστήριο "Λύση" - Άρτα)

7. Δούδης Δημήτρης (3ο Λύκειο Αλεξανδρούπολης)

8. Ζαμπέλης Γιάννης (Φροντιστήρια "Πουκαμισάς" Γλυφάδας)

9. Κακαβάς Βασίλης (Φροντιστήριο "Ώθηση" - Μαρούσι)

10. Κάκανος Γιάννης (Φροντιστήριο "Παπαπαναγιώτου – Κάκανος" - Σέρρες)

11. Κανάβης Χρήστος (6ο ΓΕΛ Αιγάλεω)

12. Κατζιώτη Χαρά (2ο Γυμνάσιο Πρέβεζας)

13. Κουλούρης Ανδρέας (3ο ΓΕΛ Γαλατσίου)

14. Κουστέρης Χρήστος (Φροντιστήριο "Στόχος" - Περιστέρι)

15. Κοπάδης Αθανάσιος (Φροντιστήριο 19+ στο Πολύγωνο και Ευρωπαϊκό Πρότυπο)

16. Κοσόγλου Ιορδάνης (ΓΕ.Λ Εξαπλατάνου)

17. Μανώλης Ανδρέας (Φροντιστήριο "Ρηγάκης" και Φροντιστήριο 20' – Κοζάνη)

18. Μαρούγκας Χρήστος (3ο ΓΕΛ Κηφισιάς)

19. Μπαδέμης Δημήτρης (Καθηγητής μαθηματικών στην Ιδιωτική Εκπαίδευση)

20. Νάννος Μιχάλης (1ο Γυμνάσιο Σαλαμίνας)

21. Νικολόπουλος Αθανάσιος (2ο ΓΕΛ, Ζάκυνθος)

22. Παγώνης Θεόδωρος (Φροντιστήριο "Εις τη ν" - Αγρίνιο)

23. Παπαμικρούλης Δημήτρης (Εκπαιδευτικός Οργανισμός "Ρόμβος")

24. Ποδηματάς Θωμάς (Σπουδαστήριο Μαθηματικών Θωμάς και Ρόζα Ποδηματά - Βόλος)

25. Πολύζος Γιώργος (τ. πάρεδρος στο Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, συγγραφέας)

26. Ράπτης Γιώργος (6ο ΓΕΛ Βόλου)

27. Σίσκας Χρήστος (Φροντιστήριο "Μπαχαράκης" - Θεσσαλονίκη)

28. Σκομπρής Νίκος (Συγγραφέας – 1ο Λύκειο Χαλκίδας)

29. Σπλήνης Νίκος (Φροντιστής)

30. Σταυρόπουλος Παύλος (Ιδιωτικά Εκπαιδευτήρια Δούκα)

31. Σταυρόπουλος Σταύρος (Πρόεδρος Ε.Μ.Ε Κορινθίας - ΓΕΛ Ζευγολατιού)

32. Τάσος Νίκος (Σύμβουλος Ι.Ε.Π.)

33. Τσακαλάκος Τάκης (Συνταξιούχος αλλά ενεργός μαθηματικός)

34. Τσιριόπουλος Μπάμπης (Συνταξιούχος , συγγραφέας)

35. Χαραλάμπους Σταύρος (Μουσικό Σχολείο Λαμίας)

36. Χασάπης Γεώργιος (Ιδιωτικός υπάλληλος)

37. Χατζόπουλος Μάκης (Πρότυπο ΓΕΛ Βαρβακείου Σχολής)

lisari team / Σχολικό έτος 2023 – 24
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΤΡΙΤΗ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΘΕΤΙΚΗΣ, ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΕΠΤΑ (7)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. (Σχολικό βιβλίο σελ. 76)

Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<\zeta<f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\zeta$, $x\in[\alpha,\beta]$, τότε παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $g(\alpha)\cdot g(\beta)<0$,

αφού $g(\alpha)=f(\alpha)-\zeta<0$ και $g(\beta)=f(\beta)-\zeta>0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$g(x_0)=f(x_0)-\zeta=0,\ \text{οπότε}\ f(x_0)=\zeta.$$

Α2. (Σχολικό βιβλίο σελ. 155)

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Θα λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ, αν η $\mathbf{f'}$ είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.

Α3. (Σχολικό βιβλίο σελ. 216)

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt=G(\beta)-G(\alpha)$

Α4. α) **Σ** β) **Σ** γ) **Λ** δ) **Λ** ε) **Σ**

ΘΕΜΑ Β

B1) Είναι $D_f = D_g \cap D_h - \{x \in D_g \cap D_h \,/\, h(x) = 0\}$. Έχουμε,

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Οπότε $D_f = [1, +\infty) - \{1\} = (1, +\infty)$ με

$$f(x) = \left(\frac{g}{h}\right)(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\frac{x+1}{\sqrt{x}}}{\frac{x-1}{\sqrt{x}}} = \frac{x+1}{x-1}.$$

Είναι $D_r = D_g \cap D_h = [1, +\infty)$ με

$$r(x) = (gh)(x) = g(x)h(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = x - \frac{1}{x}.$$

B2) Η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2} < 0 \text{ για κάθε } x > 1.$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα οπότε και 1-1 δηλαδή αντιστρέφεται. Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το σύνολο ορισμού της f, δηλαδή

$$D_{f^{-1}} = f(D_f) \underset{\text{συν.}}{\overset{\downarrow}{=}} \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to1^+} f(x)\right) = (1, +\infty)$$

διότι

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$
- $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+} \left[(x+1)\frac{1}{x-1}\right] = +\infty$ διότι $\lim\limits_{x\to1^+}(x+1) = 2 > 0$

και

$\lim\limits_{x\to1^+}(x-1) = 0$ με $x-1>0$ για x κοντά στο 1 με $x>1$, άρα $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$.

Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ έχουμε:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow yx - y = x + 1 \Leftrightarrow yx - x = y + 1$$

$$\Leftrightarrow x(y-1) = y + 1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{y-1} = f^{-1}(y).$$

Είναι $D_f = D_{f^{-1}} = (1, +\infty)$ και $f(x) = f^{-1}(x)$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$ οπότε $f = f^{-1}$.

B3) Η r είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$ άρα η C_r δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{r(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x - \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2-1}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1 = \lambda.$$

$$\lim_{x\to+\infty} (r(x) - \lambda x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x - \frac{1}{x} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0 = \beta.$$

Οπότε η ευθεία $\varepsilon: \ y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_r στο $+\infty$.

Β4) Πρέπει $x > 1$ και $f(x) > 1$ που ισχύει για κάθε $x > 1$ αφού $f(D_f) = (1, +\infty)$. Λύνουμε την εξίσωση

$$\left(f^{-1}(f(x))\right)^2 = 1 + 4r(x) \Leftrightarrow x^2 = 1 + 4\left(x - \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow x^2 = 1 + 4x - \frac{4}{x} \Leftrightarrow x^3 = x + 4x^2 - 4$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x - 4x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 - 1\right) - 4\left(x^2 - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 4)\left(x^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x = -1 \text{ ή } x = 1}_{\text{απορρίπτονται}} \text{ ή } x = 4 \ (\text{δεκτή}).$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ οπότε θα είναι και συνεχής στο 2. Επομένως έχουμε :

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \lim_{x \to 2^-}\left(-2x + 4 + e^{\lambda}\right) = \lim_{x \to 2^+}\left(-x^2 + 4x - 3 + \lambda\right) \Leftrightarrow e^{\lambda} = \lambda + 1 \Leftrightarrow \lambda = 0$$

διότι ισχύει $e^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

Γ2. Για $x \in (0, 2)$ είναι $f'(x) = -2 < 0$, οπότε η f αφού είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα για $x \in [0, 2]$.

Για $x \in (2, +\infty)$ είναι $f'(x) = -2x + 4 = -2(x - 2) < 0$, οπότε η f, αφού είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα για $x \in [2, +\infty)$.

Επομένως, $f'(x) < 0$ στο $[0, 2) \cup (2, +\infty)$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$, άρα (κριτήριο ακροτάτων σελ. 144) είναι γνησίως φθίνουσα στο D_f.

Η f θα παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $x = 0$ το $f(0) = 5$.

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
f	$\searrow$		

Γ3. i. Η f είναι συνεχής στο $[0, 3]$ ως συνεχής στο $[0, +\infty)$. Θα εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$. Έχουμε

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{5 - 2x - 1}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{-2(x - 2)}{x - 2} = -2$$

και

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{-x^2 + 4x - 3 - 1}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{-x^2 + 4x - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{-(x - 2)^2}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+}\left[-(x - 2)\right] = 0.$$

Οπότε

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \neq \lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}.$$

Συνεπώς η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$ άρα δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο $[0,3]$

ii. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Δ και Ε έχει συντελεστή διεύθυνσης:

$$\lambda_{\Delta E} = \frac{f(3)-f(0)}{3-0} = \frac{0-5}{3} = -\frac{5}{3}.$$

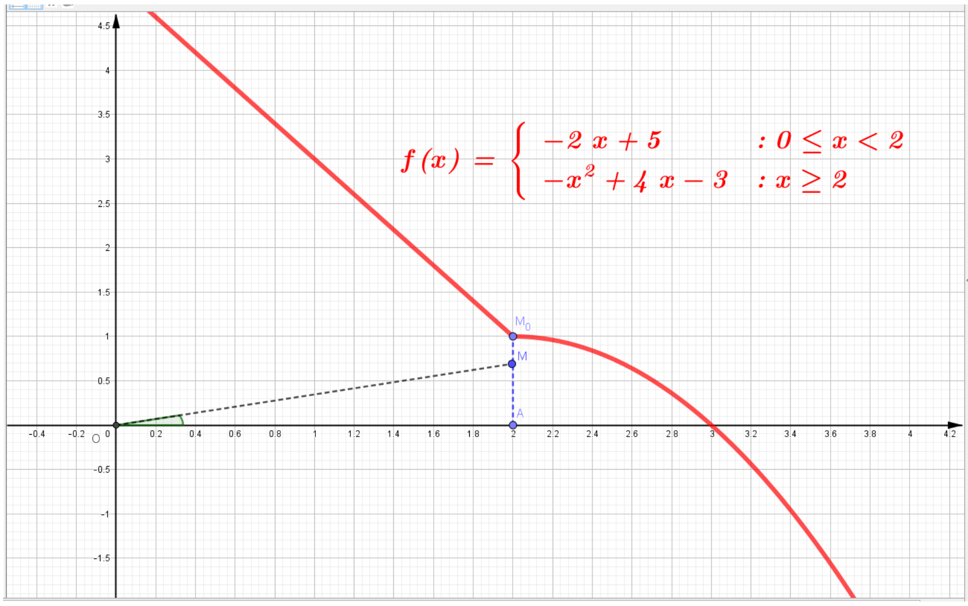
Για να είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f παράλληλη στην ΔΕ θα αναζητήσουμε αν υπάρχει $\xi \in (0,3)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \lambda_{\Delta E} = -\frac{5}{3}.$$

- Αν $\xi \in (0,2)$ τότε $f'(\xi) = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow -2 = -\frac{5}{3}$, άτοπο
- Αν $\xi \in (2,3)$ τότε $\xi \in (2,3)$, $f'(\xi) = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow -2\xi + 4 = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow -2\xi = -\frac{17}{3} \Leftrightarrow \xi = \frac{17}{6}$, δεκτή.

Συνεπώς η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\Gamma\left(\frac{17}{6}, f\left(\frac{17}{6}\right)\right)$ είναι παράλληλη στην ΔΕ

Γ4.



Το σημείο Μ κινείται κατακόρυφα στην AM_0 και ξεκινά από την θέση $A(2,0)$. Η ταχύτητά του είναι $\upsilon = 0,5\,\mu/\sec$, άρα $y'(t) = 0,5 = (0,5t)'$, άρα $y(t) = 0,5t + c$, για κάθε $t \ge 0$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $y(0) = 0$ άρα $c = 0$, οπότε $y(t) = 0,5t$, $t \ge 0$

Τη χρονική στιγμή t_0 που το κινητό θα φτάσει στη θέση $M_0(2,1)$, γιατί η ευθεία $x = 2$ τέμνει τη γραφική παράσταση C_f στη σημείο $(2, f(2))$ ή $(2,1)$.

Έτσι,

$$y(t_0) = 1 \Leftrightarrow 0,5t_0 = 1 \Leftrightarrow t_0 = 2\sec.$$

Από το τρίγωνο ΑΟΜ είναι :

$$\varepsilon\varphi\omega=\frac{AM}{OA}\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega(t)=\frac{y(t)}{2}\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega(t)=\frac{0,5t}{2}.$$

Την $t_0=2$, είναι $\varepsilon\varphi(\omega(t_0))=\frac{1}{2}$. Άρα:

$$(\varepsilon\varphi\omega(t))'=\left(\frac{0,5t}{2}\right)'\Leftrightarrow\left(1+\varepsilon\varphi^2(\omega(t))\right)\omega'(t)=\frac{1}{4}\ \text{ και την } t_0:$$

$$\left(1+\frac{1}{4}\right)\omega'(t_0)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow \omega'(t_0)=\frac{1}{5}\ \text{rad / sec}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $D_f=(0,+\infty)$ με $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$. Για κάθε $x>0$, λύνουμε την εξίσωση:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1-\ln x}{x^2}=0\Leftrightarrow 1-\ln x=0\Leftrightarrow \ln x=1\Leftrightarrow x=e.$$

Το πρόσημο της f', η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$ 0	e	$+\infty$
$1-\ln x$		$+$ 0	$-$
x^2		$+$	$+$
$f'(x)$		$+$ 0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$

Η f παρουσιάζει στο e, (ολικό) μέγιστο, το $f(e)=\frac{1+\alpha e}{e}$ κι αφού $f((0,+\infty))=\left(-\infty,1+\frac{1}{e}\right]$ έχουμε ότι:

$$f(e)=1+\frac{1}{e}\Leftrightarrow\frac{1+\alpha e}{e}=1+\frac{1}{e}\Leftrightarrow 1+\alpha e=e+1\Leftrightarrow \alpha e=e\Leftrightarrow \alpha=1.$$

Δ2. Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},1\right]$ επίσης

- $f\left(\frac{1}{2}\right)=-2\ln 2+1=\ln e-\ln 4<0$, και
- $f(1)=1>0$.

Οπότε $f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f(1)<0$, άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

Το x_0 είναι μοναδικό στο $\Delta_1=(0,e)$ γιατί η f είναι γνησίως αύξουσα. Επίσης στο $\Delta_2=[e,+\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα άρα

$$f(\Delta_2)=\left(\lim_{x\to+\infty} f(x), f(e)\right]=\left(1\ ,\ 1+\frac{1}{e}\right]$$

διότι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}+1\right)=1$$

επειδή

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\underset{DLP}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0.$$

Το $0\notin f(\Delta_2)$ άρα δεν υπάρχει άλλη ρίζα της f στο Δ_2.

Οπότε η ρίζα $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ είναι μοναδική.

Δ3. i) Είναι:

$$f(4)=\frac{\ln 4}{4}+1=\frac{2\ln 2}{4}+1=\frac{\ln 2}{2}+1=f(2).$$

Για $x\in(0,e]$ η f είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1 – 1, οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$f(x)=f(4)\Leftrightarrow f(x)=f(2)\Leftrightarrow x=2.$$

Για $x\in[e,+\infty)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα και 1 – 1, οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$f(x)=f(4)\Leftrightarrow x=4.$$

Επομένως η εξίσωση $f(x)=f(4)$ έχει ακριβώς δυο λύσεις τις $x_1=2$ και $x_2=4$.

ii) Η ανίσωση ισοδύναμα γίνεται:

$$2^x\le x^2\Leftrightarrow \ln 2^x\le \ln x^2\Leftrightarrow x\ln 2\le 2\ln x\Leftrightarrow \frac{\ln x}{x}\ge\frac{\ln 2}{2}\Leftrightarrow\frac{\ln x}{x}+1\ge\frac{\ln 2}{2}+1\Leftrightarrow f(x)\ge f(2).$$

Για $x\in(0,e]$ η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε η ανίσωση γίνεται:

$$f(x)\ge f(2)\Leftrightarrow 2\le x\le e.$$

Για $x\in[e,+\infty]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα οπότε η ανίσωση γίνεται:

$$f(x)\ge f(2)\Leftrightarrow f(x)\ge f(4)\Leftrightarrow e\le x\le 4.$$

Επομένως, η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x\in[2,4]$.

Δ4. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E(\Omega)=\int_{-\ln 2}^{0}\left|f(e^x)\cdot\frac{1-x}{e^x}\right|dx=\int_{-\ln 2}^{0}\left|f(e^x)\right|\cdot\frac{1-x}{e^x}dx,$$

αφού $\frac{1-x}{e^x}>0$, για κάθε $x<0$.

Θέτουμε $f(e^x)=u$,τότε $f'(e^x)e^x\,dx=du\Leftrightarrow\frac{1-x}{e^x}dx=du$

- για $x=-\ln 2$, $u=f\left(e^{-\ln 2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)$

- για $x=0$, $u=f\left(e^0\right)=f(1)$.

Τότε

$$E(\Omega)=\int_{f\left(\frac{1}{2}\right)}^{f(1)}|u|\,du=-\int_{f\left(\frac{1}{2}\right)}^{f(x_0)}|u|\,du+\int_{f(x_0)}^{f(1)}|u|\,du=-\int_{f\left(\frac{1}{2}\right)}^{0}|u|\,du+\int_{0}^{f(1)}|u|\,du$$

όμως

$$f\left(\frac{1}{2}\right)<0 \text{ και } f(1)>0$$

άρα

$$\begin{aligned}E(\Omega)&=-\int_{f\left(\frac{1}{2}\right)}^{0}u\,du+\int_{0}^{f(1)}u\,du\\&=-\frac{1}{2}\left[u^2\right]_{f\left(\frac{1}{2}\right)}^{0}+\frac{1}{2}\left[u^2\right]_{0}^{f(1)}\\&=\frac{1}{2}f^2\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f^2(1)\\&=\frac{1}{2}(-2\ln 2+1)^2+\frac{1}{2}\cdot 1\\&=2\ln^2 2-2\ln 2+1 \text{ τ.μ.}\end{aligned}$$