

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΕΜΠΤΗ 30 ΜΑΪΟΥ 2002

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΘΕΜΑ 1°

A. Σχολικό βιβλίο σελίδες 334 - 335

B.1. Σχολικό βιβλίο σελίδες 224 - 225

B2. α. Λάθος, β. Λάθος, γ. Σωστό, δ. Σωστό, ε. Σωστό.

Θέμα 2°

α. $f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = i^3 z + i^8 z + i^{13} z + i^{18} z = -iz + z + iz - z = 0.$

β. $f(13) = i^{13} \cdot z = i \cdot z = \left(\sin \frac{\pi}{2} + i \cos \frac{\pi}{2} \right) \cdot \rho (\sin \theta + i \cos \theta)$

$$= \rho \cdot \left[\sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) + i \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \right]$$

γ. $z = \rho (\sin \theta + i \cos \theta) = 2 \left(\sin \frac{\pi}{3} + i \cos \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + \sqrt{3} i$

$f(13) = i \cdot z = i \cdot (1 + \sqrt{3} i) = -\sqrt{3} + i$

Άρα $A(1, \sqrt{3})$, $B(-\sqrt{3}, 1)$ και $\vec{OA} = (1, \sqrt{3})$ και $\vec{OB} = (-\sqrt{3}, 1)$

$(OAB) = \frac{1}{2} \left| \det(\vec{OA}, \vec{OB}) \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |1 + 3| = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2 \text{ τ.μ.}$

Θέμα 3°

α. $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)) = f(g(x_2))$

και επειδή η $f \circ g$ είναι «1 - 1», είναι $x_1 = x_2$.

β. $g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$ και η g είναι «1 - 1», άρα

$f(x) + x^3 - x = f(x) + 2x - 1 \Leftrightarrow x^3 - x - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 1 = 0.$

Θεωρούμε τη συνάρτηση h , με $h(x) = x^3 - 3x + 1$.

$h'(x) = (x^3 - 3x + 1)' = 3x^2 - 3$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$h'(x) = 3x^2 - 3$	+	○	○	+
$h(x)$				

• $\Delta_1 = (-\infty, -1)$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x + 1) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1} h(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - 3x + 1) = 3 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} h \uparrow \text{ στο } \Delta_1 \\ \Rightarrow h(\Delta_1) = (-\infty, 3) \end{array}$$

$0 \in h(\Delta_1)$ άρα η $h(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα ρ_1 στο $\Delta_1 = (-\infty, -1)$ και $\rho_1 < 0$

• $\Delta_2 = [-1, 1]$

$$\left. \begin{aligned} h(-1) &= 3 \\ h(1) &= -1 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} h \downarrow \text{ στο } \Delta_2 \\ \Rightarrow h(\Delta_2) = [-1, 3] \end{array}$$

$0 \in h(\Delta_2)$ άρα η $h(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα ρ_2 στο $\Delta_2 = [-1, 1]$

• $\Delta_3 = (1, +\infty)$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 3x + 1) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x + 1) = +\infty \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} h \uparrow \text{ στο } \Delta_3 \\ \Rightarrow h(\Delta_3) = (-1, +\infty) \end{array}$$

$0 \in h(\Delta_3)$ άρα η $h(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα ρ_3 στο $\Delta_3 = (1, +\infty)$ και $\rho_3 > 0$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\rho_2 > 0$.

► η h είναι συνεχής στο $[0, 1]$

► $h(0) = 1$ και $h(1) = -1$

Από Θ. Bolzano υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$

και επειδή $\rho_1 < 0$ και $\rho_3 > 1$ θα είναι $\rho_2 \in (0, 1)$.

Θέμα 4^ο

α. $h(x) > g(x) \Leftrightarrow h(x) - g(x) > 0$ άρα $\int_a^b [h(x) - g(x)] dx > 0 \Leftrightarrow$

$$\int_a^b h(x) dx - \int_a^b g(x) dx > 0 \Leftrightarrow \int_a^b h(x) dx > \int_a^b g(x) dx.$$

β. i. $[f(x) - e^{-f(x)}]' = (x-1)'$ $\Leftrightarrow f'(x) + e^{-f(x)} \cdot f'(x) = 1 \Leftrightarrow$

$$f'(x) \cdot [1 + e^{-f(x)}] = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{1 + e^{-f(x)}} \text{ ή } f'(x) = \frac{e^{f(x)}}{1 + e^{f(x)}}$$

ii. 1^{ος} τρόπος

Θα δείξω $\frac{x}{2} < f(x) < x \cdot f'(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{f(x)}{x} < f'(x) \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2} < \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} < f'(x)$$

- η f είναι συνεχής στο $[0, x]$
 - η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, x)$
- Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, x)$,
τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

$$f'(0) = \frac{e^{f(0)}}{1 + e^{f(0)}} = \frac{e^0}{1 + e^0} = \frac{1}{2}$$

Άρα αρκεί να δείξουμε $f'(0) < f'(\xi) < f'(x)$, με $0 < \xi < x$.
Δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left[\frac{e^{f(x)}}{1 + e^{f(x)}} \right]' = \frac{[e^{f(x)}]' \cdot [1 + e^{f(x)}] - e^{f(x)} \cdot [1 + e^{f(x)}]'}{[1 + e^{f(x)}]^2} \\ &= \frac{e^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot [1 + e^{f(x)}] - e^{f(x)} \cdot e^{f(x)} \cdot f'(x)}{[1 + e^{f(x)}]^2} = \frac{e^{f(x)} \cdot f'(x)}{[1 + e^{f(x)}]^2} > 0 \end{aligned}$$

διότι $f'(x) > 0$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα.

2^{ος} τρόπος

➤ Θεωρούμε τη συνάρτηση g , με $g(x) = f(x) - \frac{x}{2}$.

$$g'(x) = f'(x) - \frac{1}{2} = \frac{e^{f(x)}}{1 + e^{f(x)}} - \frac{1}{2} = \frac{e^{f(x)} - 1}{2(1 + e^{f(x)})} > 0, \text{ για } x > 0$$

διότι $x > 0 \xrightarrow{f \uparrow} f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow e^{f(x)} > e^0 \Leftrightarrow e^{f(x)} - 1 > 0$
άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

$$x > 0 \xrightarrow{g \uparrow} g(x) > g(0) \Leftrightarrow f(x) - \frac{x}{2} > 0 \Leftrightarrow f(x) > \frac{x}{2} \quad (1).$$

➤ Θεωρούμε τη συνάρτηση h , με $h(x) = f(x) - x \cdot f'(x)$.

$$h'(x) = f'(x) - f'(x) - x \cdot f''(x) = -x \cdot f''(x).$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left[\frac{e^{f(x)}}{1 + e^{f(x)}} \right]' = \frac{[e^{f(x)}]' \cdot [1 + e^{f(x)}] - e^{f(x)} \cdot [1 + e^{f(x)}]'}{[1 + e^{f(x)}]^2} \\ &= \frac{e^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot [1 + e^{f(x)}] - e^{f(x)} \cdot e^{f(x)} \cdot f'(x)}{[1 + e^{f(x)}]^2} = \frac{e^{f(x)} \cdot f'(x)}{[1 + e^{f(x)}]^2} > 0 \end{aligned}$$

διότι $f'(x) > 0$.

Άρα $h'(x) < 0$, για $x > 0$,
δηλαδή η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

$$x > 0 \xrightarrow{h \downarrow} h(x) < h(0) \Leftrightarrow f(x) - x \cdot f'(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < x \cdot f'(x) \quad (2).$$

Από (1) και (2) έχουμε : $\frac{x}{2} < f(x) < x \cdot f'(x)$, για κάθε $x > 0$.

iii. Είναι $\frac{x}{2} \leq f(x) \leq x \cdot f'(x)$, για κάθε $x \geq 0$,

άρα $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \geq 0$

και $E = \int_0^1 f(x) dx$.

$$\bullet \frac{x}{2} < f(x) \xrightarrow{(a)} \int_0^1 \frac{x}{2} dx < \int_0^1 f(x) dx \Leftrightarrow$$

$$\left[\frac{x^2}{4} \right]_0^1 < E \Leftrightarrow \frac{1}{4} < E \quad (3)$$

$$\bullet f(x) < x \cdot f'(x) \xrightarrow{(a)} \int_0^1 f(x) dx < \int_0^1 x \cdot f'(x) dx \Leftrightarrow$$

$$E < [x \cdot f(x)]_0^1 - \int_0^1 (x)' \cdot f(x) dx \Leftrightarrow E < f(1) - \int_0^1 f(x) dx \Leftrightarrow$$

$$E < f(1) - E \Leftrightarrow 2E < f(1) \Leftrightarrow E < \frac{1}{2} \cdot f(1) \quad (4)$$

Από (3) και (4) έχουμε $\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} \cdot f(1)$

