

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 29 ΜΑΪΟΥ 2003**

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΘΕΜΑ 1°

A. Σχολικό βιβλίο σελίδα 217

B. Σχολικό βιβλίο σελίδα 247

Γ. α. ΣΩΣΤΟ, β. ΣΩΣΤΟ, γ. ΣΩΣΤΟ, δ. ΛΑΘΟΣ, ε. ΛΑΘΟΣ.

ΘΕΜΑ 2°

$$\alpha. w = 3z - i \cdot \bar{z} + 4 = 3(\alpha + \beta i) - i(\alpha - \beta i) + 4 = 3\alpha + 3\beta i - \alpha i - \beta + 4 \\ = (3\alpha - \beta + 4) + (3\beta - \alpha)i$$

$$\text{άρα } \operatorname{Re}(w) = 3\alpha - \beta + 4 \text{ και } \operatorname{Im}(w) = 3\beta - \alpha$$

$$\beta. x = 3\alpha - \beta + 4 \text{ και } y = 3\beta - \alpha$$

$$(x, y) \in (\varepsilon') : y = x - 12 \Leftrightarrow \square$$

$$3\beta - \alpha = 3\alpha - \beta + 4 - 12 \Leftrightarrow$$

$$\beta = \alpha - 2 \text{ άρα } (\alpha, \beta) \in (\varepsilon) : y = x - 2$$

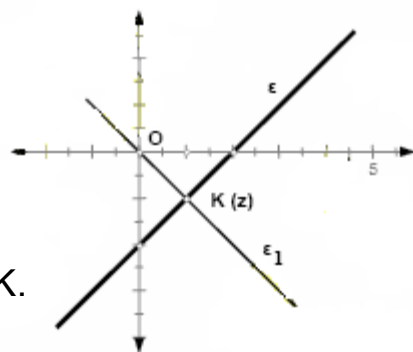
γ. Από το $O(0, 0)$ φέρνω ευθεία ε_1

κάθετη στην ε την οποία τέμνει στο σημείο K .

Είναι $\lambda_\varepsilon = 1$ άρα $\lambda_{\varepsilon_1} = -1$ και $(\varepsilon_1) : y = -x$.

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

άρα ο μιγαδικός με το ελάχιστο μέτρο είναι ο $z_0 = 1 - i$



ΘΕΜΑ 3°

α. $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$$f''(x) = 20x^3 + 6x = x \cdot (20x^2 + 6)$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$\circ$	$+$
$f(x)$	$\cap$		$\cup$

Η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο $(-\infty, 0]$, ενώ στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο $[0, +\infty)$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και 1-1, δηλαδή αντιστρέφεται.

β. Μας ζητούν να δείξουμε ότι $f(e^x) \geq f(1+x)$.

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,

αρκεί να δείξουμε ότι $e^x \geq x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση g , με $g(x) = e^x - x - 1$, $x \in \mathbb{R}$
 $g'(x) = e^x - 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		$\circ$	$+$
$g(x)$	$\nwarrow$		$\nearrow$

Η g παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 0$.

$$g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq x + 1.$$

γ. Είναι $f'(0) = 1$, άρα η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $O(0, 0)$ είναι:

$$y - 0 = 1 \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y = x$$

Από συμπέρασμα του σχολικού βιβλίου (σελίδα 155),

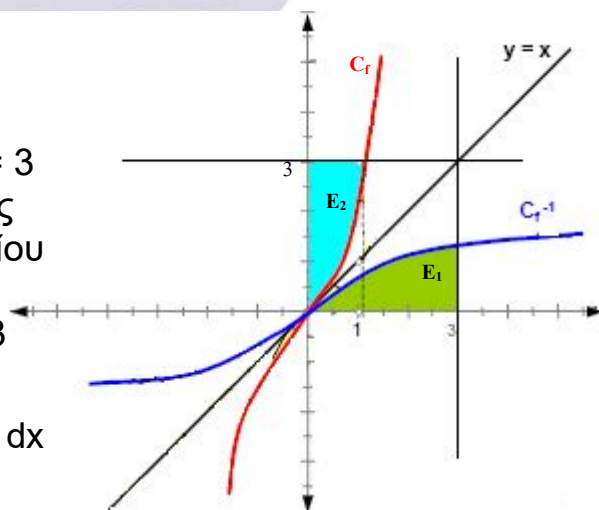
οι C_f και $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

δ. Από τα παραπάνω προκύπτει το παρακάτω σχήμα

1^{ος} τρόπος

Το ζητούμενο εμβαδόν E_1

που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} , την ευθεία $x = 3$ και τον άξονα $x'x$ λόγω συμμετρίας ισούται με το εμβαδόν E_2 του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την ευθεία $y = 3$ και τον άξονα $y'y$.



$$E = \int_0^1 [3 - f(x)] dx = \int_0^1 (3 - x^5 - x^3 - x) dx$$

$$= \left[3x - \frac{x^6}{6} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1$$

$$= 3 - \frac{1}{6} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{25}{12} \text{ τ.μ.}$$

2^{ος} τρόπος

$$E = \int_0^3 f^{-1}(x) dx$$

$$= \int_0^1 u(5u^4 + u^2 + 1) du$$

$$= \int_0^1 (5u^5 + u^3 + u) du = \left[\frac{5u^6}{6} + \frac{u^4}{4} + \frac{u^2}{2} \right]_0^1$$

$$= \frac{5}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{25}{12} \text{ τ.μ.}$$

$$\text{Θέτω } f^{-1}(x) = u$$

$$x = f(u)$$

$$x = u^5 + u^3 + u$$

$$dx = (5u^4 + 3u^2 + 1)du$$

x	0	3
u	0	1

ΘΕΜΑ 4^ο

α. Είναι $\gamma \neq \delta$, διότι αν $\gamma = \delta$ τότε $f(\gamma) = f(\delta)$ και $f(\gamma) \cdot f(\delta) = [f(\gamma)]^2 \geq 0$
(άτοπο διότι $f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0$)

Έστω $\gamma < \delta$

- f συνεχής στο $[\gamma, \delta] \subseteq [\alpha, \beta]$
- $f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0$

Από Θ. Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\gamma, \delta)$,
τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο (α, β) .

β. Έστω ότι $f(\gamma) > 0$ και $f(\delta) < 0$.

- • f συνεχής στο $[\alpha, \gamma]$
- f παραγωγίσιμη στο (α, γ)

Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\eta_1 \in (\alpha, \gamma)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\eta_1) = \frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha} > 0 \quad (1)$$

- • f συνεχής στο $[\gamma, x_0]$
- f παραγωγίσιμη στο (γ, x_0)

Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\eta_2 \in (\gamma, x_0)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\eta_2) = \frac{f(x_0) - f(\gamma)}{x_0 - \gamma} < 0 \quad (2)$$

- • f συνεχής στο $[x_0, \delta]$
- f παραγωγίσιμη στο (x_0, δ)

Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\eta_3 \in (x_0, \delta)$, τέτοιο ώστε

$$f'(\eta_3) = \frac{f(\delta) - f(x_0)}{\delta - x_0} < 0 \quad (3)$$

- • f συνεχής στο $[\delta, \beta]$
- f παραγωγίσιμη στο (δ, β)

Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\eta_4 \in (\delta, \beta)$, τέτοιο ώστε

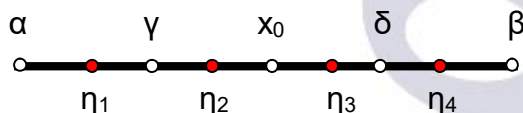
$$f'(\eta_4) = \frac{f(\beta) - f(\delta)}{\beta - \delta} > 0 \quad (4)$$

- • f' συνεχής στο $[\eta_1, \eta_2]$
- f' παραγωγίσιμη στο (η_1, η_2)

Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (\eta_1, \eta_2)$ τέτοιο ώστε

$$f''(\xi_1) = \frac{f'(\eta_2) - f'(\eta_1)}{\eta_2 - \eta_1} < 0 \quad \text{από (1) και (2)}$$

-
- f' συνεχής στο $[\eta_3, \eta_4]$
 - f' παραγωγίσιμη στο (η_3, η_4)
- Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (\eta_3, \eta_4)$ τέτοιο ώστε
- $$f''(\xi_2) = \frac{f'(\eta_4) - f'(\eta_3)}{\eta_4 - \eta_3} > 0 \text{ από (3) και (4)}$$



- γ. • f'' συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$
- $f''(\xi_1) < 0$ και $f''(\xi_2) > 0$ από (β) ερώτημα
- Από Θ. Bolzano η $f''(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα ξ , που είναι θέση **πιθανού σημείου καμπής**.

ΣΧΟΛΙΟ : Το ότι ζητήθηκε ν' αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f , είναι λανθασμένο διότι δεν μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του ξ .
Η διατύπωση έπρεπε να είναι :
«γ. Υπάρχει ένα τουλάχιστον πιθανό σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .».