

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 27 ΜΑΪΟΥ 2006
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΘΕΜΑ 1^ο

A.1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 253

A.2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 273

B. α. ΛΑΘΟΣ, β. ΣΩΣΤΟ, γ. ΣΩΣΤΟ, δ. ΛΑΘΟΣ, ε. ΣΩΣΤΟ.

ΘΕΜΑ 2^ο

α. 1^{ος} τρόπος

$$f'(x) = 2(x - 2), x \geq 2.$$

Είναι $f'(x) > 0$ για $x > 2$,

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$.

Επομένως η f είναι «1 - 1».

2^{ος} τρόπος

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow$$

$$2 + (x_1 - 2)^2 = 2 + (x_2 - 2)^2 \Leftrightarrow$$

$$(x_1 - 2)^2 = (x_2 - 2)^2 \Leftrightarrow$$

$$|x_1 - 2| = |x_2 - 2| \text{ και επειδή } x_1 \geq 2, x_2 \geq 2 \text{ είναι}$$

$$x_1 - 2 = x_2 - 2 \Leftrightarrow$$

$$x_1 = x_2$$

Επομένως η f είναι «1 - 1».

β. Η f είναι «1 - 1» άρα η f είναι αντιστρέψιμη.

$$y = 2 + (x - 2)^2 \Leftrightarrow$$

$$y - 2 = (x - 2)^2$$

Πρέπει $y \geq 2$

$$x - 2 = \sqrt{y - 2} \Leftrightarrow$$

$$x = 2 + \sqrt{y - 2}$$

$$\text{Άρα } f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x - 2}, x \geq 2$$

γ. i) Για να βρούμε τα κοινά σημεία των C_f και $y = x$ λύνουμε την εξίσωση $f(x) = x$.

$$f(x) = x \Leftrightarrow$$

$$2 + (x - 2)^2 = x \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 2 \text{ ή } x = 3$$

Άρα τα κοινά σημεία των C_f και $y = x$ είναι τα $A(2, 2)$ και $B(3, 3)$.

Για να βρούμε τα κοινά σημεία των $C_{f^{-1}}$ και $y = x$ λύνουμε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x$.

$$f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow$$

$$2 + \sqrt{x - 2} = x \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{x - 2} = x - 2 \Leftrightarrow$$

$$x - 2 = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 2 \text{ ή } x = 3$$

Άρα τα κοινά σημεία των $C_{f^{-1}}$ και $y = x$ είναι τα $A(2, 2)$ και $B(3, 3)$.

ii) Οι f και f^{-1} είναι συνεχείς στο $[2, 3]$.

Αναζητούμε το πρόσημο της $\Delta(x) = f(x) - f^{-1}(x) = (x - 2)^2 - \sqrt{x - 2}$

1^{ος} τρόπος

$$\Delta(x) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - 2)^2 - \sqrt{x - 2} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - 2)^2 \geq \sqrt{x - 2} \Leftrightarrow$$

$$(x - 2)^4 \geq x - 2 \Leftrightarrow$$

$$(x - 2)^4 - (x - 2) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - 2)[(x - 2)^3 - 1] \geq 0 \quad x \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$(x - 2)^3 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - 2)^3 \geq 1 \Leftrightarrow x - 2 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 3$$

Άρα $\Delta(x) \leq 0$ στο $[2, 3]$

2^{ος} τρόπος

Από προηγούμενο ερώτημα έχουμε ότι οι C_f , $C_{f^{-1}}$ τέμνονται στα $A(2,2)$ και $B(3,3)$, άρα η $\Delta(x)$ έχει μοναδικές ρίζες τις 2 και 3. Στο διάστημα $(2, 3)$ η συνεχής $\Delta(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο.

$$\Delta\left(\frac{5}{2}\right) = f\left(\frac{5}{2}\right) - f^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) = 2 + \left(\frac{5}{2} - 2\right)^2 - 2 - \sqrt{\frac{5}{2} - 2} = \frac{1}{4} - \sqrt{\frac{1}{2}} < 0$$

Άρα $\Delta(x) \leq 0$ στο $[2, 3]$

$$\begin{aligned} E &= - \int_2^3 \Delta(x) dx = - \int_2^3 [(x-2)^2 - \sqrt{x-2}] dx \\ &= \int_2^3 \sqrt{x-2} dx - \int_2^3 (x-2)^2 dx \\ &= \left[\frac{2}{3} \sqrt{(x-2)^3} \right]_2^3 - \left[\frac{(x-2)^3}{3} \right]_2^3 \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ τ. μ.} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 3^ο

1^η λύση

α. i) Θα δείξουμε ότι $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1|$

$$\text{Είναι } z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow z_1 = -z_2 - z_3$$

$$|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| \Leftrightarrow$$

$$|-z_2 - z_3 - z_2| = |z_3 + z_2 + z_3| \Leftrightarrow$$

$$|-2z_2 - z_3| = |2z_3 + z_2| \Leftrightarrow$$

$$|2z_2 + z_3|^2 = |2z_3 + z_2|^2 \Leftrightarrow$$

$$(2z_2 + z_3)(2\bar{z}_2 + \bar{z}_3) = (2z_3 + z_2)(2\bar{z}_3 + \bar{z}_2) \Leftrightarrow$$

$$4z_2\bar{z}_2 + 2z_2\bar{z}_3 + 2\bar{z}_2z_3 + z_3\bar{z}_3 = 4z_3\bar{z}_3 + 2z_2\bar{z}_3 + 2\bar{z}_2z_3 + z_2\bar{z}_2 \Leftrightarrow$$

$$3z_2\bar{z}_2 = 3z_3\bar{z}_3 \Leftrightarrow$$

$$3|z_2|^2 = 3|z_3|^2 \Leftrightarrow$$

$$3 = 3 \text{ που ισχύει}$$

Ομοίως δείχνουμε ότι $|z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$.

$$\text{ii)} |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2| = 1 + 1 = 2$$

$$\text{άρα } |z_1 - z_2|^2 \leq 4$$

$$(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2 + z_2\bar{z}_2 \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$|z_1|^2 - (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2) + |z_2|^2 \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$1 - 2\text{Re}(z_1\bar{z}_2) + 1 \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$-2\text{Re}(z_1\bar{z}_2) \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$\text{Re}(z_1\bar{z}_2) \geq -1$$

2^η λύση

$$\text{α. i)} \text{Είναι } z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = -z_3$$

$$|z_1 + z_2| = |-z_3| \Leftrightarrow$$

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_3|^2 \Leftrightarrow$$

$$(z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = 1 \Leftrightarrow$$

$$z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 + z_2\bar{z}_2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$|z_1|^2 + (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2) + |z_2|^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$1 + 2\text{Re}(z_1\bar{z}_2) + 1 = 1 \Leftrightarrow$$

$$2\text{Re}(z_1\bar{z}_2) = -1 \Leftrightarrow \text{Re}(z_1\bar{z}_2) = -\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)$$

$$= z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2 + z_2\bar{z}_2$$

$$= |z_1|^2 - (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2) + |z_2|^2$$

$$= 1 - 2\text{Re}(z_1\bar{z}_2) + 1$$

$$\stackrel{(1)}{=} 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\text{Άρα } |z_1 - z_2| = \sqrt{3}$$

$$\text{Ομοίως δείχνουμε ότι } |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3| = \sqrt{3}.$$

$$\text{ii)} \text{Είναι } |z_1 - z_2|^2 = (\sqrt{3})^2 = 3 < 4 \quad \text{και} \quad \text{Re}(z_1\bar{z}_2) = -\frac{1}{2} < -1$$

3^η λύση

α. i) Άσκηση 9 Α' ομάδας σχολικού βιβλίου σελίδα 101

$$\text{Αποδεικνύω ότι } |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$$

$$\text{Είναι } z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$z_1 + z_2 = -z_3$$

$$\text{Άρα } |-z_3|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 \Leftrightarrow$$

$$1^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2 \Leftrightarrow$$

$$|z_1 - z_2|^2 = 3 \Leftrightarrow$$

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$$

$$\text{Ομοίως } |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3| = \sqrt{3}$$

$$\text{Άρα } |z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$$

$$\text{ii) Είναι } |z_1 - z_2|^2 = (\sqrt{3})^2 = 3 < 4 \text{ και}$$

$$|z_1 - z_2|^2 = 3 \Leftrightarrow (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = 3 \Leftrightarrow$$

$$z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2 + z_2\bar{z}_2 = 3 \Leftrightarrow$$

$$|z_1|^2 - (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2) + |z_2|^2 = 3 \Leftrightarrow$$

$$1 - 2\text{Re}(z_1\bar{z}_2) + 1 = 3 \Leftrightarrow$$

$$-2\text{Re}(z_1\bar{z}_2) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\text{Re}(z_1\bar{z}_2) = -\frac{1}{2} < -1$$

β. Οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 είναι σημεία του μοναδιαίου κύκλου και επειδή $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$ σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο.

ΘΕΜΑ 4^ο

α. Πρέπει $x \neq 1$ και $x > 0$.

Άρα $D_f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{(x+1)'(x-1) - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} - \frac{1}{x} = -\frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x} < 0 \text{ για } x \in D_f$$

Άρα f γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα $(0, 1)$ και $(1, +\infty)$.

Στο $\Delta_1 = (0, 1)$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x \right) = -\infty$$

άρα $f(\Delta_1) = \mathbb{R}$

Στο $\Delta_2 = (1, +\infty)$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1} - \ln x \right) = -\infty$$

άρα $f(\Delta_2) = \mathbb{R}$

Επομένως το σύνολο τιμών είναι $f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = \mathbb{R}$.

β. $0 \in f(\Delta_1)$ και f γνησίως φθίνουσα στο Δ_1 .

Άρα η $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο Δ_1 .

$0 \in f(\Delta_2)$ και f γνησίως φθίνουσα στο Δ_2 .

Άρα η $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο Δ_2 .

Επομένως η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο D_f .

γ. 1^{ος} τρόπος

$$g'(x) = \frac{1}{x}, x > 0 \text{ και } h'(x) = e^x, x \in \mathbb{R}.$$

Βρίσκουμε την εφαπτόμενη (ε) της C_g στο $A(\alpha, \ln \alpha)$

$$(\varepsilon): y - g(\alpha) = g'(\alpha)(x - \alpha)$$

$$(\varepsilon): y - \ln \alpha = \frac{1}{\alpha}(x - \alpha)$$

Η (ε) είναι και εφαπτομένη της C_h στο B

$$\text{Άρα } \lambda_\varepsilon = g'(\alpha) = h'(\beta)$$

$$\frac{1}{\alpha} = e^\beta \text{ ή } \beta = -\ln \alpha \quad (1)$$

$B \in \varepsilon$ άρα

$$e^\beta - \ln \alpha = \frac{1}{\alpha}(\beta - \alpha) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{1}{\alpha} - \ln \alpha = \frac{1}{\alpha}(-\ln \alpha - \alpha) \Leftrightarrow$$

$$1 - \alpha \ln \alpha = -\ln \alpha - \alpha \Leftrightarrow$$

$$\alpha + 1 = (\alpha - 1) \ln \alpha \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} = \ln \alpha \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} - \ln \alpha = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(\alpha) = 0$$

άρα το α είναι ρίζα της $f(x) = 0$.

2^{ος} τρόπος

$$g'(x) = \frac{1}{x}, x > 0 \text{ και } h'(x) = e^x, x \in \mathbb{R}.$$

Βρίσκουμε την εφαπτόμενη (ε_1) της C_g στο $A(\alpha, \ln \alpha)$

$$(\varepsilon_1): y - g(\alpha) = g'(\alpha)(x - \alpha)$$

$$(\varepsilon_1): y - \ln \alpha = \frac{1}{\alpha}(x - \alpha) \Leftrightarrow$$

$$(\varepsilon_1): y = \frac{1}{\alpha}x - 1 + \ln \alpha$$

Αν $\alpha = 1$ τότε η εφαπτομένη της C_g στο $A(1, 0)$ είναι η $y = x - 1$, ενώ η εφαπτομένη της C_h στο $B(1, 0)$ είναι η $y = x + 1$ και δεν ταυτίζονται. Άρα $\alpha \neq 1$.

Βρίσκουμε και την εφαπτόμενη (ε_2) της C_h στο $B(\beta, e^\beta)$

$$(\varepsilon_2): y - h(\beta) = h'(\beta)(x - \beta)$$

$$(\varepsilon_2): y - e^\beta = e^\beta(x - \beta) \Leftrightarrow$$

$$(\varepsilon_2): y = e^\beta x - \beta e^\beta + e^\beta$$

Για να ταυτίζονται οι (ε_1) και (ε_2) πρέπει :

$$\frac{1}{\alpha} = e^\beta \Leftrightarrow \ln \alpha = \beta \quad (1) \quad \text{και}$$

$$-1 + \ln \alpha = -\beta e^\beta + e^\beta \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε

$$-1 + \ln \alpha = \ln \alpha \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$-\alpha - \alpha \ln \alpha = -\ln \alpha + 1 \Leftrightarrow$$

$$\alpha + 1 = (\alpha - 1) \ln \alpha \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} = \ln \alpha \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} - \ln \alpha = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(\alpha) = 0$$

άρα το α είναι ρίζα της $f(x) = 0$.

Αν $\alpha = 1$ τότε η εφαπτομένη της C_g στο $A(1, 0)$ είναι η $y = x - 1$, ενώ η εφαπτομένη της C_h στο $B(1, 0)$ είναι η $y = x + 1$ και δεν ταυτίζονται. Άρα $\alpha \neq 1$.

δ. Από το (γ) ερώτημα προκύπτει ότι το πλήθος των κοινών εφαπτόμενων των C_g και C_h ισούται με το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Από το (β) ερώτημα η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες άρα οι C_g και C_h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες.