

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2009
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΘΕΜΑ 1°

A.1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 251

A.2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 213

B. α. ΣΩΣΤΟ

β. ΣΩΣΤΟ

γ. ΛΑΘΟΣ

δ. ΛΑΘΟΣ

ε. ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ 2°

A.α. $\begin{cases} x = 2\lambda + 1 \\ y = 2\lambda - 1 \end{cases} \xrightarrow{(-)} x - y = 2 \Leftrightarrow y = x - 2$

Άρα οι εικόνες των εικόνων του z
ανήκουν στην ευθεία $y = x - 2$.

β. 1ος τρόπος

Φέρνουμε την ευθεία $OM \perp \varepsilon$.

$$\lambda_{\varepsilon_1} = -\frac{1}{\lambda_\varepsilon} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$(\varepsilon_1) : y - 0 = -1(x - 0) \Leftrightarrow y = -x$$

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = x - 2 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

$M(1, -1)$ και

ο μιγαδικός που έχει το μικρότερο μέτρο είναι ο $z_0 = 1 - i$.

2ος τρόπος

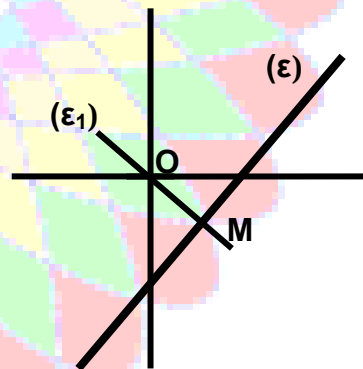
$$|z| = \sqrt{(2\lambda + 1)^2 + (2\lambda - 1)^2}$$

$$= \sqrt{4\lambda^2 + 4\lambda + 1 + 4\lambda^2 - 4\lambda + 1}$$

$$= \sqrt{8\lambda^2 + 2}$$

Το $|z|$ γίνεται ελάχιστο όταν $\lambda = 0$

Για $\lambda = 0$ έχουμε $z_0 = 1 - i$.



B. Θέτω $w = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

$$|w|^2 + \bar{w} - 12 = z_0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + x - yi - 12 = 1 - i \Leftrightarrow$$

$$(x^2 + y^2 + x - 12) - yi = 1 - i$$

άρα $y = 1$ και

$$x^2 + y^2 + x - 12 = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ή } x = -4$$

Επομένως $w = 3 + i$ ή $w = -4 + i$.

ΘΕΜΑ 3^ο

A. $f'(x) = [\alpha^x - \ln(x+1)]' = \alpha^x \ln \alpha - \frac{1}{x+1}$, $x > -1$

Για κάθε $x > -1$ είναι $f(x) \geq f(0)$,

άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 0.

Το 0 είναι εσωτερικό σημείο του $(-1, +\infty)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο 0

Από Θ. Fermat $f'(0) = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = e$

B.α. Για $\alpha = e$ είναι $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}$ και $f''(x) = e^x + \frac{1}{(x+1)^2}$

$f''(x) > 0$ άρα η f είναι κυρτή στο $(-1, +\infty)$.

β. Στο $(-1, +\infty)$ η f' είναι γνησίως αύξουσα (f κυρτή)

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(0) \xrightarrow{f' \uparrow} x > 0$$

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		○	+
$f(x)$			

γ. 1^{ος} τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = (x-2)[f(\beta) - 1] + (x-1)[f(\gamma) - 1]$.

• Η g είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως πολυωνυμική

• $g(1) = 1 - f(\beta) < 0$

$g(2) = f(\gamma) - 1 > 0$

Από Θ. Bolzano

υπάρχει ένα τουλάχιστον

$\xi \in (1, 2)$, τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0 \Leftrightarrow$

• $-1 < x < 0 \xrightarrow{f \downarrow} f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 1$

• $x > 0 \xrightarrow{f \uparrow} f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 1$

Άρα $f(\beta) > 1$ και $f(\gamma) > 1$

$$\begin{aligned}
 (\xi - 2)[f(\beta) - 1] + (\xi - 1)[f(\gamma) - 1] &= 0 \quad 1 < \xi < 2 \Leftrightarrow \\
 \frac{(\xi - 2)[f(\beta) - 1]}{(\xi - 1)(\xi - 2)} + \frac{(\xi - 1)[f(\gamma) - 1]}{(\xi - 1)(\xi - 2)} &= 0 \Leftrightarrow \\
 \frac{f(\beta) - 1}{\xi - 1} + \frac{f(\gamma) - 1}{\xi - 2} &= 0.
 \end{aligned}$$

άρα η εξίσωση $\frac{f(\beta) - 1}{x - 1} + \frac{f(\gamma) - 1}{x - 2} = 0$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$

2^{ος} τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση $w(x) = \frac{f(\beta) - 1}{x - 1} + \frac{f(\gamma) - 1}{x - 2}, x \in (1, 2)$.

• Η w είναι συνεχής στο $(1, 2)$ ως πράξεις συνεχών

• $\lim_{x \rightarrow 1^+} w(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{f(\beta) - 1}{x - 1} + \frac{f(\gamma) - 1}{x - 2} \right] = +\infty,$

διότι $f(\beta) - 1 > 0, f(\gamma) - 1 > 0$ και $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x - 1} = +\infty$

• $\lim_{x \rightarrow 2^-} w(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[\frac{f(\beta) - 1}{x - 1} + \frac{f(\gamma) - 1}{x - 2} \right] = -\infty,$

διότι $f(\beta) - 1 > 0, f(\gamma) - 1 > 0$ και $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x - 2} = -\infty$

Άρα το σύνολο τιμών της w είναι το $\mathbb{R}$ και

η εξίσωση $w(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(1, 2)$.

3^{ος} τρόπος

$$\frac{f(\beta) - 1}{x - 1} + \frac{f(\gamma) - 1}{x - 2} = 0 \quad x \neq 1 \text{ και } x \neq 2 \Leftrightarrow$$

$$[f(\beta) - 1](x - 2) + [f(\gamma) - 1](x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$[f(\beta) - 1]x - 2f(\beta) + 2 + [f(\gamma) - 1]x - f(\gamma) + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$[f(\beta) - 1]x + [f(\gamma) - 1]x = 2f(\beta) - 2 + f(\gamma) - 1 \Leftrightarrow$$

$$[f(\beta) + f(\gamma) - 2]x = 2f(\beta) + f(\gamma) - 3 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{2f(\beta) + f(\gamma) - 3}{f(\beta) + f(\gamma) - 2} \quad \text{μοναδική λύση}$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι $1 < \frac{2f(\beta) + f(\gamma) - 3}{f(\beta) + f(\gamma) - 2} < 2$.

ΘΕΜΑ 4^ο

α. • Θεωρούμε τη συνάρτηση F , με $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

$H f$ είναι συνεχής στο $[0, 2]$,

άρα η F είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 2]$ με $F'(x) = f(x)$

• Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση f_1 , με $f_1(x) = x \cdot f(x)$.

Η f_1 είναι συνεχής στο $[0, 2]$ ως γινόμενο συνεχών,

άρα η H είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 2]$ με $H'(x) = x \cdot f(x)$.

▷ Η συνάρτηση G , με $G(x) = \frac{H(x)}{x} - F(x) + 3$

είναι συνεχής στο $(0, 2]$, ως πράξεις συνεχών (1).

▷ στο $x_0 = 0$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{H(x)}{x} - F(x) + 3 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{H(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) + 3 \\ &= 0 - F(0) + 3 = 3 \quad (2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{H(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x t \cdot f(t) dt}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cdot f(x)}{1} \quad \text{L'Hospital} \\ &= 0 \cdot f(0) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} 6 \frac{1 - \sqrt{1 - t^2}}{t^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6(1 - \sqrt{1 - t^2})(1 + \sqrt{1 - t^2})}{t^2(1 + \sqrt{1 - t^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6t^2}{t^2(1 + \sqrt{1 - t^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6}{1 + \sqrt{1 - t^2}} = 3 \quad (3)\end{aligned}$$

Από (2) και (3) έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = G(0)$,

άρα η G είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ (4)

Από (1) και (4) προκύπτει ότι η G είναι συνεχής στο $[0, 2]$

β. Για $x \in (0, 2)$ η G είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων

$$\begin{aligned}
 G'(x) &= \left[\frac{H(x)}{x} - F(x) + 3 \right]' \\
 &= \left[\frac{H(x)}{x} \right]' - F'(x) \\
 &= \left[\frac{H(x)}{x} \right]' - f(x) \\
 &= \frac{H'(x)x - H(x)}{x^2} - f(x) \\
 &= \frac{x^2 f(x) - H(x)}{x^2} - f(x) \\
 &= f(x) - \frac{H(x)}{x^2} - f(x) \\
 &= -\frac{H(x)}{x^2}
 \end{aligned}$$

$$\gamma. \int_0^2 (t-2)f(t)dt = 0 \Leftrightarrow \int_0^2 [t \cdot f(t) - 2f(t)]dt = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 t \cdot f(t)dt - 2 \int_0^2 f(t)dt = 0 \Leftrightarrow$$

$$H(2) = 2F(2) \Leftrightarrow \frac{H(2)}{2} = F(2) \quad (5)$$

• η G είναι συνεχής στο $[0, 2]$

• η G είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ με $G'(x) = -\frac{H(x)}{x^2}$

• $G(0) = 3$

$$G(2) = \frac{H(2)}{2} - F(2) + 3 \stackrel{(5)}{=} 3$$

από Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\alpha \in (0, 2)$,

τέτοιο ώστε $G'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow$

$$-\frac{H(\alpha)}{\alpha^2} = 0 \Leftrightarrow H(\alpha) = 0$$

δ. 1^{ος} τρόπος

- η G είναι συνεχής στο $[0, \alpha]$

- η G είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \alpha)$ με $G'(x) = -\frac{H(x)}{x^2}$

από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, \alpha)$, τέτοιο ώστε

$$G'(\xi) = \frac{G(\alpha) - G(0)}{\alpha - 0} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{H(\xi)}{\xi^2} = \frac{\frac{H(\alpha)}{\alpha} - F(\alpha) + 3 - 3}{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{\int_0^\xi tf(t) dt}{\xi^2} = -\frac{\int_0^\alpha f(t) dt}{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\alpha \cdot \int_0^\xi tf(t) dt = \xi^2 \cdot \int_0^\alpha f(t) dt$$

2^{ος} τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση $G_1(x) = G(x) + x \cdot \frac{F(\alpha)}{\alpha}$

- η G_1 είναι συνεχής στο $[0, \alpha]$

- η G_1 είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \alpha)$ με $G_1'(x) = -\frac{H(x)}{x^2} + \frac{F(\alpha)}{\alpha}$

- $G_1(0) = G(0) = 3$

$$G_1(\alpha) = G(\alpha) + F(\alpha) = \frac{H(\alpha)}{\alpha} - F(\alpha) + 3 + F(\alpha) = \frac{0}{\alpha} + 3 = 3$$

από Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, \alpha)$, τέτοιο ώστε

$$G_1'(\xi) = 0 \Leftrightarrow -\frac{H(\xi)}{\xi^2} + \frac{F(\alpha)}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{\int_0^\xi tf(t) dt}{\xi^2} = -\frac{\int_0^\alpha f(t) dt}{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\alpha \cdot \int_0^\xi tf(t) dt = \xi^2 \cdot \int_0^\alpha f(t) dt$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ – ΣΧΟΛΙΑ ΓΙΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ

Θέματα κλασικά αλλά και λίγο πιο εύκολα από πέρυσι.
Καλύπτουν μεγάλο εύρος ύλης και εξετάζουν τους μαθητές σε όλα σχεδόν τα θεωρήματα (Θ. Bolzano, Θ. Fermat, Θ. Rolle, Θ.Μ.Τ.)
Τα ερωτήματα 3Bγ, 4B αλλά ειδικά το 4Γ τα πιο δύσκολα.

ΘΕΜΑ1: **Θεωρία χωρίς παγίδες στα Σ-Λ**

ΘΕΜΑ2 : **Κλασικό θέμα μιγαδικών**

- α. Απλό. Επειδή η εκφώνηση δίνει δεδομένο ότι οι εικόνες των μιγαδικών βρίσκονται σε ευθεία, θα μπορούσε κάποιος να βρει δύο μιγαδικούς z_1 και z_2 (για δύο τιμές του λ), την ευθεία (ε) που διέρχεται από τις εικόνες των z_1, z_2 . Απλά έπρεπε να επαληθεύσει ότι όλοι οι μιγαδικοί έχουν εικόνες πάνω στην (ε).
β. Αν δεν είχες βρει την εξίσωση της ευθείας μπορούσες να πάρεις τα μόρια.
γ. Ανεξάρτητο από τα α, β διότι δίνει το z_0 .

ΘΕΜΑ3 : **Θα μπορούσε να ήταν καλύτερο.**

- Α. Κλασικό Θ. Fermat (δεν εξετάζει μαθηματική σκέψη αλλά απομνημόνευση μεθοδολογίας).
Β. α. απλό
β. Εύκολο ειδικά αν κάνεις πινάκα
γ. Μπορεί να θεωρηθεί «ατυχές».
Το πηγαίνανε για Θ. Bolzano.
 - Λυνόταν σαν μια πρωτοβάθμια εξίσωση χωρίς Θ. Bolzano.
 - Η ρίζα είναι μοναδική και προσδιορίσιμη.
 - Η χρησιμότητα του θεωρήματος Bolzano είναι για την ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας και όχι για τον προσδιορισμό της.
 - Θα μπορούσε να γίνει ένα πολύ καλό ερώτημα ως εξής :
Αν $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση
$$\frac{f(\beta) - 1}{(\beta - 1)^{2009}} + \frac{f(\gamma) - 1}{(\gamma - 2)^{2009}} = 0$$
 έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(1, 2)$.

Επίσης θα μπορούσε η κυρτότητα της f (η f είναι κυρτή για κάθε $a \in \mathbb{R}$) να μπει σαν Α ερώτημα και το Θ. Fermat στο Β. Πολλοί (κυρίως καθηγητές) ασχολήθηκαν (κακώς) με τη μοναδικότητα του ακροτάτου. Η κυρτότητα μας το απαντούσε άμεσα.

ΘΕΜΑ 4: **Καλό θέμα**

- Α. Πολύ γράψιμο (απαιτεί τέλεια διατύπωση)
Β. Απλό (συνέχεια σε διάστημα και σε σημείο με τον ορισμό) και βοηθητικό για το ερώτημα Γ.
Γ. Δύσκολο γιατί υπάρχουν τόσες πολλές συναρτήσεις στο θέμα που μερικούς τους μπερδέψαν, οι επιλογές είναι πολλές και πρέπει να στραφείς στα προηγούμενα ερωτήματα σκεφτόμενος τι σου ζητούν και τι γνωρίζεις [συνεχής η G στο $[0, 2]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 2]$]
Δ. Το πιο δύσκολο ερώτημα (έχει τον ίδιο τρόπο σκέψης με το 4Γ) και οι επιλογές είναι Θ.Μ.Τ. με τη G ή Θ. Rolle με κατάλληλη συνάρτηση που έπρεπε να «κατασκευάσεις».