



Κελάφας

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΔΕΥΤΕΡΑ 27 ΜΑΪΟΥ 2013

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ &
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδες 334 - 335

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 246

A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 222

A4. α. Λάθος, β. Σωστό, γ. Σωστό, δ. Λάθος, ε. Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

B1. $(z - 2)(\bar{z} - 2) + |z - 2| = 2 \Leftrightarrow$

$$|z - 2|^2 + |z - 2| - 2 = 0$$

Θέτουμε $|z - 2| = \omega \geq 0$ και έχουμε:

$$\omega^2 + \omega - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\omega = 1 \text{ ή } \omega = -2 \text{ (απορρίπτεται)}$$

$$\text{άρα } |z - 2| = 1$$

Επομένως ο ζητούμενος γ.τ. είναι

ο κύκλος C με κέντρο K (2, 0) και ακτίνα $\rho = 1$

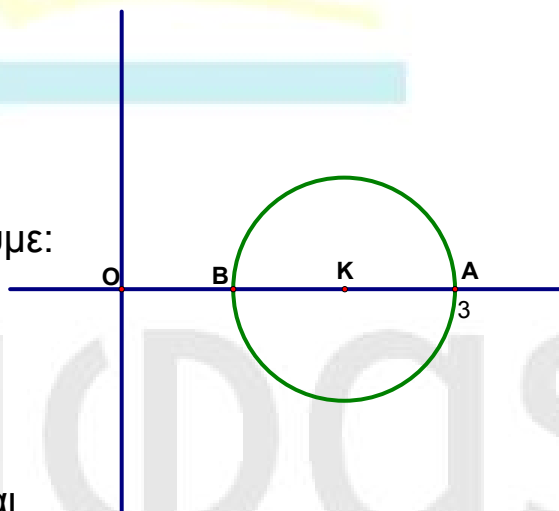
1^{ος} τρόπος

Από το σχήμα βλέπουμε ότι

$$|z|_{\max} = (OA) = 3, \text{ άρα } |z| \leq 3$$

2^{ος} τρόπος

$$|z| = |(z - 2) + 2| \leq |z - 2| + |2| \stackrel{|z - 2| = 1}{=} 1 + 2 = 3$$



Κελάφας

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

B2. • z_1, z_2 είναι συζυγείς μιγαδικοί, άρα $\text{Im}(z_1) = -\text{Im}(z_2)$

$$|\text{Im}(z_1) - \text{Im}(z_2)| = 2 \Leftrightarrow |2\text{Im}(z_1)| = 2 \Leftrightarrow$$

$$|\text{Im}(z_1)| = 1 \Leftrightarrow \text{Im}(z_1) = \pm 1$$

Άρα $z_{1,2} = \kappa \pm i, \kappa \in \mathbb{R}$

$$\bullet |z_1 - 2| = 1 \Leftrightarrow |\kappa \pm i - 2| = 1 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(\kappa - 2)^2 + 1^2} = 1 \Leftrightarrow (\kappa - 2)^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow$$

$$(\kappa - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \kappa = 2, \text{ άρα } z_{1,2} = 2 \pm i$$

$$\bullet \text{ Τύποι Vieta } \begin{cases} S = -\beta = z_1 + z_2 = 4, \text{ άρα } \beta = -4 \\ P = \gamma = z_1 \cdot z_2 = (2 + i)(2 - i) = 5, \text{ άρα } \gamma = 5 \end{cases}$$

B3. $v^3 + \alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0 = 0 \Leftrightarrow \alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0 = -v^3 \Rightarrow$

$$|\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0| = |-v^3| \Leftrightarrow |v|^3 = |\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0|$$

$$\text{Είναι } |v|^3 = \underbrace{|\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0|}_{\text{τριγωνική ανισότητα}} \leq |\alpha_2||v|^2 + |\alpha_1||v| + |\alpha_0|$$

$\begin{matrix} |\alpha_0| \leq 3 \\ |\alpha_1| \leq 3 \\ \Leftrightarrow \\ |\alpha_2| \leq 3 \end{matrix}$

$$|v|^3 \leq 3|v|^2 + 3|v| + 3 \Leftrightarrow |v|^3 - 3|v|^2 - 3|v| - 3 \leq 0 \quad (1)$$

1^{ος} τρόπος

$$(1) \Leftrightarrow |v|^3 - 3|v|^2 - 3|v| - 4 \leq -1 \Leftrightarrow$$

$$(|v| - 4) \cdot \underbrace{(|v|^2 + |v| + 1)}_{\text{θετικός}} \leq -1 < 0, \text{ άρα } |v| - 4 < 0 \Leftrightarrow |v| < 4$$

2^{ος} τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση f , με $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 3, x \geq 4$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 3 = 3(x - 1)^2 - 6 > 0, \text{ για } x \geq 4$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[4, +\infty)$

$$\text{Αν } |v| \geq 4 \xRightarrow{f \uparrow} f(|v|) \geq f(4) \Leftrightarrow |v|^3 - 3|v|^2 - 3|v| - 3 \geq 1$$

Αυτό είναι ΑΤΟΠΟ από τη σχέση (1), άρα $|v| < 4$

3^{ος} τρόπος

Προφανώς $v \neq 0$

$$v^3 + \alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0 = 0 \stackrel{v \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{v^3}{v^3} + \frac{\alpha_2 v^2}{v^3} + \frac{\alpha_1 v}{v^3} + \frac{\alpha_0}{v^3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$1 + \frac{\alpha_2}{v} + \frac{\alpha_1}{v^2} + \frac{\alpha_0}{v^3} = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha_2}{v} + \frac{\alpha_1}{v^2} + \frac{\alpha_0}{v^3} = -1$$

$$\text{Είναι } \left| \frac{\alpha_2}{v} + \frac{\alpha_1}{v^2} + \frac{\alpha_0}{v^3} \right| = |-1| = 1$$

$$\left| \frac{\alpha_2}{v} + \frac{\alpha_1}{v^2} + \frac{\alpha_0}{v^3} \right| \leq \left| \frac{\alpha_2}{v} \right| + \left| \frac{\alpha_1}{v^2} \right| + \left| \frac{\alpha_0}{v^3} \right| \Leftrightarrow$$

$$\left| \frac{\alpha_2}{v} + \frac{\alpha_1}{v^2} + \frac{\alpha_0}{v^3} \right| \leq \frac{|\alpha_2|}{|v|} + \frac{|\alpha_1|}{|v|^2} + \frac{|\alpha_0|}{|v|^3} \quad \begin{matrix} | \alpha_0 | \leq 3 \\ | \alpha_1 | \leq 3 \\ | \alpha_2 | \leq 3 \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\left| \frac{\alpha_2}{v} + \frac{\alpha_1}{v^2} + \frac{\alpha_0}{v^3} \right| \leq \frac{3}{|v|} + \frac{3}{|v|^2} + \frac{3}{|v|^3} \quad (1)$$

Αν $|v| \geq 4$, τότε :

$$\left. \begin{aligned} & \bullet \frac{1}{|v|} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{|v|} \leq \frac{3}{4} \\ & \bullet \frac{1}{|v|} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{|v|^2} \leq \frac{1}{16} \Leftrightarrow \frac{3}{|v|} \leq \frac{3}{16} \\ & \bullet \frac{1}{|v|} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{|v|^3} \leq \frac{1}{64} \Leftrightarrow \frac{3}{|v|} \leq \frac{3}{64} \end{aligned} \right\} \stackrel{(+)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{3}{|v|} + \frac{3}{|v|^2} + \frac{3}{|v|^3} \leq \frac{63}{64} \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε $1 \leq \frac{63}{64} \rightarrow \text{ΑΤΟΠΟ,}$

άρα $|v| < 4$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$[f(x) + x] \cdot [f'(x) + 1] = x \Leftrightarrow$$

$$2[f(x) + x] \cdot [f'(x) + 1] = 2x \Leftrightarrow$$

$$([f(x) + x]^2)' = (x^2)'$$

από συνέπειες Θ.Μ.Τ. είναι $[f(x) + x]^2 = x^2 + c$

$$\text{για } x = 0 \text{ έχω } [f(0) + 0]^2 = c \Leftrightarrow c = 1$$

$$\text{Άρα } [f(x) + x]^2 = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}.$$

Έστω $K(x) = f(x) + x, x \in \mathbb{R}$.

Η $K(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα συνεχών

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι :

$$[f(x) + x]^2 = x^2 + 1 > 0$$

$$[K(x)]^2 > 0, \text{ άρα } K(x) \neq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα από συνέπειες θ. Bolzano,

η $K(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Είναι $K(0) = f(0) = 1 > 0$, άρα

$$\text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι } K(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) + x > 0$$

Οπότε από την $[f(x) + x]^2 = x^2 + 1$ έχουμε

$$f(x) + x = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x, x \in \mathbb{R}.$$

Γ2. 1^{ος} τρόπος

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x - 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1$$

$$f'(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} < 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{αφού } \sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x,$$

$$\text{οπότε } \sqrt{x^2 + 1} > x \Leftrightarrow x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$$

άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και "1-1"

Έχω την εξίσωση

$$f(g(x)) = 1 \Leftrightarrow f(g(x)) = f(0) \stackrel{f^{-1}-1}{\Leftrightarrow} g(x) = 0$$

$$g'(x) = 3x^2 + 3x$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow 3x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -1$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	○	○	+
$g(x)$				

Αν $x \in A_1 = (-\infty, -1]$ η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \\ g(-1) &= -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \text{ άρα } g(A_1) = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$$

Αν $x \in A_2 = (-1, 0]$ η g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) &= -\frac{1}{2} \\ g(0) &= -1 \end{aligned} \right\} \text{ άρα } g(A_2) = \left[-1, -\frac{1}{2}\right)$$

Αν $x \in A_3 = (0, +\infty)$ η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= -1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= +\infty \end{aligned} \right\} \text{ άρα } g(A_3) = (-1, +\infty)$$

$0 \notin g(A_1)$, άρα δεν υπάρχει ρίζα στο $A_1 = (-\infty, -1]$

$0 \notin g(A_2)$, άρα δεν υπάρχει ρίζα στο $A_2 = (-1, 0]$

$0 \in g(A_3)$ άρα έχει ρίζα στο $A_3 = (0, +\infty)$

η οποία είναι μοναδική αφού g γνησίως αύξουσα στο A_3

άρα η εξίσωση $f(g(x)) = 1$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

Γ2. 2^{ος} τρόπος

$$D_{\text{fog}} = \{x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f\} = \mathbb{R}$$

$$f(g(x)) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{g^2(x) + 1} - g(x) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{g^2(x) + 1} = g(x) + 1$$

$$\bullet g(x) + 1 = x^3 + \frac{3x^2}{2} = x^2 \cdot \left(x + \frac{3}{2}\right)$$

$$\triangleright \text{Για } x < -\frac{3}{2} \text{ είναι } g(x) + 1 < 0 < \sqrt{g^2(x) + 1},$$

άρα η εξίσωση είναι αδύνατη

$$\triangleright \text{Για } x \geq -\frac{3}{2} \text{ είναι } g(x) + 1 \geq 0 \text{ και η εξίσωση γίνεται}$$

$$\left(\sqrt{g^2(x) + 1}\right)^2 = [g(x) + 1]^2 \Leftrightarrow g^2(x) + 1 = g^2(x) + 2g(x) + 1$$

$$\Leftrightarrow 2g(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$$

$$g'(x) = 3x^2 + 3x$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow 3x(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -1$$

x	-3/2	-1	0	$+\infty$	
g'(x)	+	○	-	○	+
g(x)					

Αν $x \in A_1 = \left[-\frac{3}{2}, -1\right]$ η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα

$$\left. \begin{array}{l} g\left(-\frac{3}{2}\right) = -1 \\ g(-1) = -\frac{1}{2} \end{array} \right\} \text{ άρα } g(A_1) = \left[-1, -\frac{1}{2}\right]$$

Αν $x \in A_2 = (-1, 0]$ η g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = -\frac{1}{2} \\ g(0) = -1 \end{array} \right\} \text{ άρα } g(A_2) = \left[-1, -\frac{1}{2}\right)$$

Αν $x \in A_3 = (0, +\infty)$ η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \end{array} \right\} \text{ άρα } g(A_3) = (-1, +\infty)$$

$0 \notin g(A_1)$, άρα δεν υπάρχει ρίζα στο $A_1 = \left[-\frac{3}{2}, -1\right]$

$0 \notin g(A_2)$, άρα δεν υπάρχει ρίζα στο $A_2 = (-1, 0]$

$0 \in g(A_3)$ άρα έχει ρίζα στο $A_3 = (0, +\infty)$

η οποία είναι μοναδική αφού g γνησίως αύξουσα στο A_3

άρα η εξίσωση $f(g(x)) = 1$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

Γ3. 1^{ος} τρόπος

$$\int_{x-\frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt = f\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \varepsilon\phi x \Leftrightarrow -\int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t) dt = f\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow$$

$$-\sigma\upsilon\nu x \cdot \int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t) dt = \eta\mu x \cdot f\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x \cdot f\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sigma\upsilon\nu x \cdot \int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t) dt \Leftrightarrow \left[\eta\mu x \cdot \int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t) dt \right]' = 0$$

Έστω συνάρτηση h , με $h(x) = \eta\mu x \cdot \int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t) dt$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής άρα η συνάρτηση f_1 , με

$f_1(x) = \int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t) dt$ είναι παρ/μη στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, άρα και συνεχής

- η h είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ως γινόμενο συνεχών

- η h είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ ως γινόμενο

παραγωγίσιμων με $h'(x) = \eta\mu x \cdot f\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sigma\upsilon\nu x \cdot \int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t) dt$

- $h(0) = \eta\mu 0 \cdot \int_0^{-\frac{\pi}{4}} f(t) dt = 0$ και $h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \eta\mu \frac{\pi}{4} \cdot \int_0^0 f(t) dt = 0$

Άρα από θ. Rolle

η εξίσωση $h'(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

Άρα υπάρχει ένα $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, ώστε $\int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt = f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \varepsilon\phi x_0$.

2^{ος} τρόπος

$$\int_{x-\frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt = f\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \varepsilon\varphi x \Leftrightarrow$$

$$\int_{x-\frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt - f\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \varepsilon\varphi x = 0$$

Έστω συνάρτηση S , με

$$S(x) = \int_{x-\frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt - f\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \varepsilon\varphi x, x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής άρα η συνάρτηση f_1 , με

$$f_1(x) = \int_{x-\frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } \left[0, \frac{\pi}{4}\right],$$

άρα η f_1 είναι και συνεχής

• η S είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ως πράξεις συνεχών

• $S(0) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt > 0$ (*)

$$S\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^0 f(t) dt - f(0) \cdot \varepsilon\varphi \frac{\pi}{4} = -1 < 0$$

(*) Για κάθε $t \in \mathbb{R}$, είναι $f(t) = \sqrt{t^2 + 1} - t > 0$
αφού $\sqrt{t^2 + 1} > \sqrt{t^2} = |t| \geq t$
άρα $\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt > 0$

Άρα από θ. Bolzano

η εξίσωση $S(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, τέτοιο ώστε

$$S(x_0) = 0 \Leftrightarrow \int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt = f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \varepsilon\varphi x_0$$

ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1. \bullet \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1) - f(1-h) + f(1)}{h} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(1+5h) - f(1)}{h} - \frac{f(1-h) - f(1)}{h} \right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[5 \frac{f(1+5h) - f(1)}{5h} + \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} \right] = 0$$

$$\triangleright \lim_{h \rightarrow 0} 5 \frac{f(1+5h) - f(1)}{5h} \stackrel{5h=t}{=} 5 \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t) - f(1)}{t} = 5f'(1)$$

$$\triangleright \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} \stackrel{-h=u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(1+u) - f(1)}{u} = f'(1)$$

$$\text{επομένως } 6f'(1) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{f'(1) = 0}$$

Η f' είναι γνησίως αύξουσα, άρα το $x_0 = 1$ είναι μοναδική ρίζα της f' .

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(1) \stackrel{f' \uparrow}{\Leftrightarrow} x > 1$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+
$f(x)$	↘		↗

Επομένως η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$.

$$\Delta 2. g'(x) = \left(\int_a^x \frac{f(t) - 1}{t - 1} dt \right)' = \frac{f(x) - 1}{x - 1}, x > 1$$

$$x > 1 \xrightarrow{f \uparrow} f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) > 1, \text{ άρα } g'(x) > 0$$

Επομένως η **g** είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$

1^{ος} τρόπος

$$\text{Θεωρούμε } G(x) = \int_x^{x+1} g(u) du, x > 1$$

$$G(x) = \int_x^a g(u) du + \int_a^{x+1} g(u) du = \int_a^{x+1} g(u) du - \int_a^x g(u) du$$

$$\text{Είναι } G'(x) = \left(\int_a^{x+1} g(u) du \right)' - \left(\int_a^x g(u) du \right)' = g(x+1) - g(x)$$

$$x+1 > x \xrightarrow{g \uparrow} g(x+1) > g(x) \Leftrightarrow G'(x) > 0$$

Επομένως η **G** είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$

Είναι $8x^2 + 5 > 1$ και $2x^4 + 5 > 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u) du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u) du \Leftrightarrow$$

$$G(8x^2 + 5) > G(2x^4 + 5) \xrightarrow{G \uparrow} \Leftrightarrow$$

$$8x^2 + 5 > 2x^4 + 5 \Leftrightarrow$$

$$2x^4 - 8x^2 < 0 \Leftrightarrow 2x^2(x^2 - 4) < 0$$

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$2x^2$	+		+		+
$x^2 - 4$	+		-		+
γινόμενο	+		-		+

Επομένως $x \in (-2, 0) \cup (0, 2)$.

2^{ος} τρόπος

Θεωρούμε $\varphi(x) = \int_{2x^2+5}^{2x^2+6} g(u) du, x \geq 0$

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \int_{2x^2+5}^0 g(u) du + \int_0^{2x^2+6} g(u) du \\ &= \int_0^{2x^2+6} g(u) du - \int_0^{2x^2+5} g(u) du\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Είναι } \varphi'(x) &= \left(\int_0^{2x^2+6} g(u) du \right)' - \left(\int_0^{2x^2+5} g(u) du \right)' \\ &= 4x \cdot g(2x^2+6) - 4x \cdot g(2x^2+5) \\ &= 4x \cdot [g(2x^2+6) - g(2x^2+5)]\end{aligned}$$

$$2x^2+6 > 2x^2+5 \xrightarrow{g \uparrow} g(2x^2+6) > g(2x^2+5)$$

Είναι $\varphi'(x) > 0$, για $x > 0$

Επομένως η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

$$\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u) du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u) du \Leftrightarrow \varphi(2|x|) > \varphi(x^2)$$

Είναι $2|x| \geq 0, x^2 \geq 0$ και φ γν. αύξουσα στο $[0, +\infty)$

$$\text{άρα } 2|x| > x^2 \Leftrightarrow 2|x| > |x|^2 \Leftrightarrow$$

$$|x|(|x| - 2) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x| > 0 \\ |x| - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ |x| < 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ -2 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2, 0) \cup (0, 2)$$

$$\Delta 3. g''(x) = \left[\frac{f(x) - 1}{x - 1} \right]' = \frac{f'(x)(x - 1) - f(x) + 1}{(x - 1)^2}$$

$$= \frac{f'(x)}{x - 1} - \frac{f(x) - 1}{(x - 1)^2} = \frac{f'(x)}{x - 1} - \frac{g'(x)}{x - 1} = \frac{f'(x) - g'(x)}{x - 1}$$

Για $x > 1$ η f είναι παραγωγίσιμη στο $[1, x]$
 άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (1, x)$, τέτοιο ώστε
 $f'(\xi) = \frac{f(x) - 1}{x - 1} = g'(x)$

Επομένως $g''(x) = \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - 1}$, για $x > 1$

$x > \xi \xLeftrightarrow{f \uparrow} f'(x) > f'(\xi)$, άρα $g''(x) > 0$,

άρα **g κυρτή στο $(1, +\infty)$**

1^{ος} τρόπος

$$(\alpha - 1) \cdot \int_{\alpha}^x \frac{f(t) - 1}{t - 1} dt = (f(\alpha) - 1) \cdot (x - \alpha) \quad \alpha > 1 \Leftrightarrow$$

$$g(x) = \frac{f(\alpha) - 1}{\alpha - 1} \cdot (x - \alpha) \quad \frac{f(\alpha) - 1}{\alpha - 1} = g'(\alpha) \Leftrightarrow g(x) - g'(\alpha) \cdot (x - \alpha) = 0$$

Θεωρούμε $Q(x) = g(x) - g'(\alpha) \cdot (x - \alpha)$, $x > 1$

Προφανής ρίζα $x = \alpha$ και $Q'(x) = g'(x) - g'(\alpha)$

$Q'(x) > 0 \Leftrightarrow g'(x) > g'(\alpha) \xLeftrightarrow{g \text{ κυρτή}} x > \alpha$

x	1	α	$+\infty$
$Q'(x)$		-	+
$Q(x)$		$\searrow$	$\nearrow$

$1 < x < \alpha \xLeftrightarrow{Q \downarrow} Q(x) > Q(\alpha) \Leftrightarrow Q(x) > 0$

$x > \alpha \xLeftrightarrow{Q \uparrow} Q(x) > Q(\alpha) \Leftrightarrow Q(x) > 0$

Επομένως η Q έχει μοναδική ρίζα την $x = \alpha$.

2^{ος} τρόπος

$$(\alpha - 1) \cdot \int_{\alpha}^x \frac{f(t) - 1}{t - 1} dt = (f(\alpha) - 1) \cdot (x - \alpha) \quad \alpha > 1 \Leftrightarrow$$

$$g(x) = \frac{f(\alpha) - 1}{\alpha - 1} \cdot (x - \alpha) \quad \frac{f(\alpha) - 1}{\alpha - 1} = g'(\alpha) \Leftrightarrow g(x) - g'(\alpha) \cdot (x - \alpha) = 0$$

(ε) : η εφαπτομένη της C_g στο $M(\alpha, g(\alpha))$

$$(ε) : y - g(\alpha) = g'(\alpha) \cdot (x - \alpha) \Leftrightarrow y = g'(\alpha) \cdot (x - \alpha)$$

Η g είναι κυρτή στο $(1, +\infty)$,

άρα η C_g βρίσκεται πάνω από την (ε)

με εξαίρεση το σημείο επαφής M

άρα $g(x) \geq g'(\alpha) \cdot (x - \alpha)$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = \alpha$

Επομένως η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την $x = \alpha$.