ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ & ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	***02-06-2014***
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:	***ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ***

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1: Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 251

Α2: Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 273

Α3: Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 150

Α4: α) Λ **β)** Σ **γ)** Σ **δ)** Σ **ε)** Λ

ΘΕΜΑ Β

Β$_1$. Θέτουμε $z = x + yi$ επομένως έχουμε $|z|^2 = x^2 + y^2$ και $z + \bar{z} = 2x$ συνεπώς η δοθείσα σχέση γίνεται: $2\left(x^2 + y^2\right) + 2xi - 4 - 2i = 0 \Leftrightarrow 2\left[\left(x^2 + y^2\right) - 2\right] + 2(x-1)i = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2 + y^2\right) - 2 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Άρα οι μιγαδικοί είναι οι: $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$

Β$_2$. Υπολογίζουμε τον λόγο: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i-1}{1+1} = \frac{2i}{2} = i$, επομένως έχουμε

$$w = 3\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{39} = 3 \cdot i^{39} = 3 \cdot i^3 = 3(-i) = -3i$$

B$_3$. Υπολογίζουμε αρχικά το $|4z_1 - z_2 - i| = |4(1+i)-(1-i)-i| = |4+4i-1+i-i| = |3+4i| = 5$

Επομένως έχουμε $|u+w| = 5 \Leftrightarrow |u-(0+3i)| = 5$, άρα ο γεωμ. Τόπος των εικόνων του u είναι κύκλος με κέντρο Κ(0,3) και ακτίνα ρ=5.

ΘΕΜΑ Γ

Γ$_1$. $A_h = \mathbb{R}$. Η h είναι συνεχής και 2 φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με:

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{e^x+1}\cdot\left(e^x+1\right)' = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x+1-e^x}{e^x} = \frac{1}{e^x+1}$$

$$h''(x) = -\frac{1}{\left(e^x+1\right)^2}\cdot\left(e^x+1\right)' = -\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2} < 0,\ x\in\mathbb{R}.$$

Άρα η h είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

Γ$_2$. Τα δύο μέλη της ανίσωσης είναι θετικά ,λογαριθμίζουμε με βάση το e και τα δύο μέλη και έχουμε: $\ln e^{h(2h'(x))} < \ln\frac{e}{e+1} \Leftrightarrow h\left(2h'(x)\right) < \ln\frac{e}{e+1}$.

Παρατηρούμε ότι: $h(1) = 1-\ln(e+1) = \ln e - \ln(e+1) = \ln\frac{e}{e+1}$

Επομένως έχουμε: $h\left(2h'(x)\right) < h(1)$

Επειδή η $h'(x) > 0,\ x\in\mathbb{R}$ η h γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Οπότε η ανίσωση γίνεται τελικά:

$$h\left(2h'(x)\right) < h(1) \overset{h\ \text{γν. αυξ.}}{\Leftrightarrow} 2h'(x) < 1 \Leftrightarrow h'(x) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow h'(x) < h'(0) \overset{h'\ \text{γν.φθ.}}{\Leftrightarrow} x > 0$$

Γ$_3$. Υπολογίζουμε το $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ για την οριζόντια ασύμπτωτη της C_f

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x - \ln\left(e^x+1\right)\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\ln e^x - \ln\left(e^x+1\right)\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)\right],$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(e^x+1\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1.$$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\ln1=0$, επομένως η y=0 είναι οριζόντια ασύμπτωτη του διαγράμματος της h στο $+\infty$

Για τον υπολογισμό της πλάγιας ασύμπτωτης υπολογίζουμε αρχικά τα παρακάτω όρια:

- $\lambda=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-\ln\left(e^x+1\right)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[1-\ln\left(e^x+1\right)\frac{1}{x}\right]=1-0\cdot0=1$
- $\beta=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(h(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\ln\left(e^x+1\right)\right)=0$

Επομένως η y=x είναι πλάγια ασύμπτωτη του C_h στο $-\infty$

Γ4.

$$\varphi(x)=e^x\left[x-\ln\left(e^x+1\right)+\ln2\right]=e^x\left[\ln e^x+\ln2-\ln\left(e^x+1\right)\right]=e^x\ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right),x\in\mathbb{R}$$

Λύνουμε την εξίσωση $\varphi(x)=0$

$$\varphi(x)=0\Leftrightarrow e^x\ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)=0\Leftrightarrow\ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)=\ln1\Leftrightarrow\frac{2e^x}{e^x+1}=1\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow x=0$$

Και στην συνέχεια την αντίστοιχη ανίσωση: $\varphi(x)>0$

$$\varphi(x)>0\Leftrightarrow e^x\ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)>0\Leftrightarrow\ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)>\ln1\Leftrightarrow\frac{2e^x}{e^x+1}>1\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow x>0$$

Η φ συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών με $\varphi(x)>0,\ x\in[0,1]$, άρα

$$E(\Omega)=\int_0^1\varphi(x)dx=\int_0^1e^x\ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)dx=\int_0^1\left(e^x\right)'\ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)dx=$$

$$\left[e^x\ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)\right]_0^1-\int_0^1e^x\frac{e^x+1}{2e^x}\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)'dx=e\ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2e^{2x}+2e^x-2e^{2x}}{e^x+1}dx=$$

$$e\ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2e^x}{e^x+1}dx = e\ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)-\int_0^1\left[\ln\left(e^x+1\right)\right]'dx=$$

$$e\ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)-\left[\ln\left(e^x+1\right)\right]_0^1=e\ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)-\left[\ln\left(e+1\right)-\ln2\right]=$$

$$e\ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)-\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)=\ln\left[\frac{\left(\frac{2e}{e+1}\right)^e}{\frac{e+1}{2}}\right]=\ln\left[\left(\frac{2}{e+1}\right)^{e+1}\cdot e^e\right]=e+\left(e+1\right)\ln\frac{2}{e+1}\text{ τ.μ}$$

ΘΕΜΑ Δ

$Δ_1$. $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(e^x-1\right)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x}{1}=1,\ f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$

Άρα η f συνεχής στο $x_0=0$

Για $x\neq0$: $f'(x)=\frac{e^x x-\left(e^x-1\right)}{x^2}=\frac{e^x x-e^x+1}{x^2}$

Έστω $h(x)=e^x x-e^x+1,\ x\in\mathbb{R}$, επειδή η h είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων έχουμε:

$h'(x)=e^x+e^x x-e^x=xe^x,\ h'(x)=0\Leftrightarrow x=0,$

$h'(x)>0\Leftrightarrow x>0$

x	$-\infty$	0 $+\infty$
h'	-	+
h	↘	↗

Η h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=0$ άρα: $h(x)\geq h(0)\Leftrightarrow h(x)\geq0,\ x\in\mathbb{R}$

Επομένως, $f'(x)>0,\ x\neq0$. Συνεπώς f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

$Δ_2$. α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών

$f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(0,+\infty)$, αφού

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-1}{x}=0,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x-1)'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty$$

Άρα $f(x)>0,\ x\in\mathbb{R}$. Επειδή $\int_1^{2f'(x)} f(u)du=0$, έχουμε:

- **Αν** $2f'(x)>1$ **, τότε** $\int_1^{2f'(x)} f(u)du>0$, άτοπο
- **Αν** $2f'(x)<1$ **, τότε** $\int_1^{2f'(x)} f(u)du<0$, άτοπο

Συνεπώς $2f'(x)=1\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{2}$

Είναι: $$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to0}\frac{(e^x-1-x)'}{(x^2)'}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{2x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to0}\frac{(e^x-1)'}{(2x)'}=\lim_{x\to0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$$

Δηλαδή $f'(0)=\frac{1}{2}$ και επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα, τότε η $x=0$ είναι μοναδική λύση

β) Επειδή $x'(t)=\left[2f(x(t))\right]'\Leftrightarrow x'(t)=2f'(x(t))\cdot x'(t)\overset{x'(t)>0}{\Leftrightarrow} f'(x(t))=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f'(0)=f'(x(t))\overset{f'\text{"1-1"}}{\Leftrightarrow} x(t)=0.$$

Συνεπώς το σημείο είναι το $M(0,1)$

Δ$_3$.

$$g(x)=\left(xf(x)+1-e\right)^2\cdot(x-2)^2=\left(x\frac{e^x-1}{x}+1-e\right)^2\cdot(x-2)^2=\left(e^x-e\right)^2(x-2)^2$$

Επειδή η g είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο και σύνθεση παραγωγίσιμων θα έχουμε:

$$g'(x)=2\left(e^x-e\right)e^x(x-2)^2+\left(e^x-e\right)^2 2(x-2)=$$

$$=2\left(e^x-e\right)(x-2)\left[e^x(x-2)+e^x-e\right]=2\left(e^x-e\right)(x-2)\left(xe^x-e^x-e\right)$$

Θέτουμε: $\varphi(x) = xe^x - e^x - e,\ x > 0,$

$$\varphi'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x > 0$$, συνεπώς η φ γνησίως αύξουσα

- Η φ συνεχής στο $[1,2]$, ως πράξεις συνεχών
- $\varphi(1) = -e < 0,\ \varphi(2) = e^2 - e = e(e-1) > 0$. Άρα $\varphi(1)\cdot\varphi(2) < 0$

Από θεώρημα Bolzano η $\varphi(x) = 0$, θα έχει μία τουλάχιστον ρίζα x_0 στο $(1,2)$.

Επειδή η φ είναι γνησίως αύξουσα τότε η ρίζα x_0 είναι μοναδική

Άρα όταν $x > x_0 \Leftrightarrow \varphi(x) > 0,\ x < x_0 \Leftrightarrow \varphi(x) < 0$

Οπότε για τη g' έχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών:

x	0 ⋯ 1	1 ⋯ x_0	x_0 ⋯ 2	2 ⋯ $+\infty$
$2(e^x - e)$	-	+	+	+
$x-2$	-	-	-	+
$xe^x - e^x - e$	-	-	+	+
g'	-	+	-	+
g	↘	↗	↘	↗

Η g είναι γνησίως φθίνουσα στα $(0,1]$, $[x_0,2]$ και η g γνησίως αύξουσα στα $[1,x_0]$, $[2,+\infty)$.

Άρα για $x=1$ το $g(1)$ τοπικό ελάχιστο ,

για $x = x_0$ το $g(x_0)$ τοπικό μέγιστο και

για $x=2$ το $g(2)$ τοπικό ελάχιστο.