

**ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΩΝ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ, 02/06/2025

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη θεωρήματος σελ.186 , σχολικό βιβλίο.

A2. Διατύπωση Θεωρήματος, σελ.76, σχολικό βιβλίο.

A3. Ορισμός κατακόρυφης ασύμπτωτης, σελ. 161, σχολικό βιβλίο.

A4. α) Σωστό β) Σωστό γ) Λάθος δ) Λάθος ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. Αφού η f έχει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = 1$ και η f είναι παραγωγίσιμη (ως πολυωνυμική) με $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 9$, θα είναι:

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 2a + 12 = 0 \Leftrightarrow a = -6$$

B2. Για $a=-6$ είναι: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ και $f'(x) = 3x^2 - 6x + 9$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = 3$ και η μονοτονία της f είναι:

f γν. αύξουσα στα διαστήματα $[0, 1)$, $[1, 3]$ και $(3, +\infty)$ και οι εικόνες τους είναι:

$\Delta 1 = f([0, 1)) = [-3, 1)$ με $0 \in \Delta 1$, άρα η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[0, 1)$ και είναι μοναδική αφού η f είναι γν. αύξουσα στο $[0, 1)$.

$\Delta 2 = f([1, 3]) = [-3, 1]$ με $0 \in \Delta 2$, άρα η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[1, 3]$ και είναι μοναδική, αφού η f είναι γν. φθίνουσα στο $[1, 3]$.

$\Delta 3 = f((3, +\infty)) = (-3, +\infty)$ με $0 \in \Delta 3$ άρα η f μια τουλάχιστον ρίζα στο $[1, 3]$ και είναι μοναδική, αφού η f είναι γν. αύξουσα στο $(1, +\infty)$.

άρα η f έχει τρεις θετικές πραγματικές ρίζες.

Εναλλακτικά: Αν εφαρμόσουμε το θεώρημα του Bolzano στα διαστήματα $[0, 1]$, $[1, 3]$ και π.χ. $[3, 5]$ θα πάρουμε από μία τουλάχιστον ρίζα σε κάθε ένα από αυτά άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τρεις θετικές ρίζες (οι οποίες είναι και μοναδικές).

B3. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη (ως πολυωνυμική) με:

$f''(x) = 6x - 12 = 6(x - 2)$, άρα η f είναι κυρτή στο διάστημα $[2, +\infty)$ και κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 2]$ και στο σημείο $K(2, f(2))$, $K(2, -1)$ είναι σημείο καμπής.

B4. Η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο $A(\xi, f(\xi))$ είναι:

$$(ε1): y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow y = f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi)$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της g στο σημείο $B(\xi, g(\xi))$ είναι:

$$(\varepsilon 2): y - g(\xi) = g'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow y = g'(\xi)(x - \xi) + g(\xi)$$

Για να τέμνονται οι (ε1) και (ε2) πρέπει:

$$f'(\xi)(x - \xi) + f(\xi) = g'(\xi)(x - \xi) + g(\xi) \Leftrightarrow f(\xi) = (x - \xi) + g(\xi)$$

Αφού τέμνονται σε σημείο του άξονα $y'y$ θα είναι σημείο $K(0,y)$, άρα:

$$f(\xi) = -\xi + \xi + f(\xi) \text{ ή } 0 = 0 \text{ που είναι αληθές.}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για να είναι η f συνεχής στο 0 πρέπει:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (\sqrt{x^2} + x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (e^x \eta \mu x) = 0$$

Άρα η f είναι συνεχής στο 0.

Θα εξετάσουμε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{x^2} + x - 0}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{e^x \eta \mu x}{x} = 1$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 (αρκεί το πρώτο όριο για να πούμε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0)).

Γ2. Ασύμπτωτες της C_f :

Πλάγιες και οριζόντιες στο $+\infty$: $y = \lambda x + \beta$ με:

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2} + x}{x} = 1$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2} + x - x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2} + x + x} = \frac{1}{2}.$$

Άρα η ευθεία $y = x + \frac{1}{2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Όμοια στο $-\infty$ έχουμε:

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \eta \mu x = 0, \text{ διότι:}$$

$$|e^x \eta \mu x| \leq e^x \Leftrightarrow -e^x \leq e^x \eta \mu x \leq e^x$$

και $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x) = 0$, επομένως από το κριτήριο της

παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \eta \mu x = 0$

Γ3. Οι C_f και η (ε) τέμνονται στα σημεία που αποτελούν λύσεις της εξίσωσης:

$$f(x) = x + \frac{1}{2}, x \in (-\pi, 0)$$

$$\text{Θέτουμε: } g(x) = f(x) - x - \frac{1}{2}, x \in (-\pi, 0)$$

$$\text{Έχουμε: } g(-\pi) = f(-\pi) + \pi - \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2} > 0$$

$$g(0) = f(0) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$$

Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της $g(x)$ στο διάστημα $(-\pi, 0)$.

Γ4. Έστω $M(x(t), y(t))$ ή $M(x(t), f(x(t)))$

Πρέπει να ισχύει:

$$x'(t) = (f(x(t)))' \Leftrightarrow x'(t) = \left(\sqrt{x^2(t) + x(t)} \right)' \Leftrightarrow x'(t) = \frac{2x(t)x'(t) + x'(t)}{2\left(\sqrt{x^2(t) + x(t)}\right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x'(t) \cdot \sqrt{x^2(t) + x(t)} = 2x(t)x'(t) + x'(t) \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2(t) + x(t)} = 2x(t) + 1,$$

$$\text{αφού } x'(t) > 0$$

Υψώνοντας την τελευταία σχέση στο τετράγωνο έχουμε:

$$4x^2(t) + 4x(t) = 4x^2(t) + 4x(t) + 1 \Leftrightarrow 0 = 1$$

Που είναι άτοπο. Άρα δεν υπάρχει χρονική στιγμή τέτοια ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης να είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης για το σημείο M .

Σημείωση: Η περίπτωση $t=0$ θα πρέπει κανονικά να εξεταστεί ως ιδιαίτερη με βάση τον ορισμό.

ΘΕΜΑ 4

Δ1. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $g'(x) = 0, x > 0$. Έχουμε:

$$g'(x) = \frac{F'(x)x^{\ln x} - F(x)}{(x^{\ln x})^2} = \dots \dots \frac{x^{\ln x}(xf(x) - 2F(x)\ln x)}{(x^{\ln x})^2} = 0$$

Άρα $g(x) = c, c = \text{σταθερά}$.

Δ2.ι) Έχουμε διαδοχικά (απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{\frac{1}{x}} = f'(1) = 2,$$

αφού η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f είναι παράλληλη με την ευθεία

$$y = 2x$$

Σημείωση: Η $f'(x)$ είναι συνεχής για $x > 0$ ως ημίγειρα συνεχώς συναρτήσεων στο $x > 0$.

ii) Στην δοθείσα σχέση θέτοντας $x=1$ έχουμε: $1 \cdot f(1) = 2F(1)\ln 1$, άρα $f(1) = 0$

Έχουμε:

$$F(x) = \frac{xf(x)}{2\ln x}, F(1) = \lim_{x \rightarrow 1} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x)}{2\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{2} \frac{f(x)}{\ln x} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

$$\text{Άρα: } g(x) = c \Leftrightarrow \frac{F(1)}{1^{\ln 1}} = c \Leftrightarrow c = F(1) = 1$$

$$\text{Άρα: } \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = 1 \Leftrightarrow F(x) = x^{\ln x}, x > 0$$

43. Η $F(x)$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $(0, +\infty)$ με:

$$e^{\ln^2 x} = (x^{\ln x})' = (e^{\ln^2 x})' = e^{\ln^2 x} 2 \frac{\ln x}{x} = \frac{2e^{\ln^2 x}}{x} \ln x$$

Άρα: Για $x > 1$ είναι $\ln x > 0$ άρα $F'(x) > 0$ και άρα η F είναι γν. αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

Για $0 < x < 1$ είναι $\ln x < 0$, άρα $F'(x) < 0$ και άρα η F είναι γν. φθίνουσα στο $(0, 1]$.

Η εξίσωση: $F(x^2) = F(x) - (x - 1)^2$ έχει προφανώς ρίζα το $x=0$.

Εστω ότι έχει και άλλη ρίζα $\xi \neq 0$, τότε:

- Αν $0 < \xi < 1 \Leftrightarrow \xi^2 < \xi \Leftrightarrow F(\xi^2) > F(\xi)$ (Αφού η F είναι γν. φθίνουσα στο $(0, 1]$). Άρα: $F(\xi^2) - F(\xi) > 0 \Leftrightarrow -(x - 1)^2 > 0$, άτοπο.
- Αν $\xi > 1 \Leftrightarrow \xi^2 > \xi \Leftrightarrow F(\xi^2) > F(\xi)$ (Αφού η F είναι γν. αύξουσα στο $[1, +\infty)$). Άρα $F(\xi^2) - F(\xi) > 0 \Leftrightarrow -(x - 1)^2 > 0$, άτοπο.

Επομένως η δοθείσα εξίσωση έχει μοναδική ρίζα στο $(0, +\infty)$ την $x=1$.

44. Το εμβαδόν που αναφέρεται είναι:

$$E = \int_1^e |F(x)| dx, \text{ Για } x \in (1, e) \text{ είναι } F(x) > 0, \text{ άρα } E = \int_1^e F(x) dx$$

$$F(x) = x^{\ln x} = e^{\ln^2 x}$$

Γνωρίζουμε ότι: $e^x \geq x + 1, x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει για $x=0$ άρα θα ισχύει και :

$$F(x) = e^{\ln^2 x} \geq \ln^2 x + 1, x > 0$$

Άρα:

$$\int_1^e F(x) dx \geq \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx \Leftrightarrow E \geq \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα:

$$\begin{aligned} \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx &= \int_1^e \ln^2 x dx + \int_1^e 1 dx = \int_1^e \ln^2 x (x)' dx + e - 1 = \\ &= [x \ln^2 x]_1^e - \int_1^e 2x \ln x \cdot \frac{1}{x} dx + e - 1 = e - 2 \int_1^e \ln x dx = e - 2[x \ln x - x]_1^e + e - \\ &1 = e - 2 + e - 1 = 2e - 3. \end{aligned}$$

ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

ΣΥΜΒΟΥΛΟΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ ΠΕ03 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΥΚΛΑΔΩΝ & Α' ΑΘΗΝΑΣ

ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΗΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ, ΤΜΗΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΚΡΗΤΗΣ

