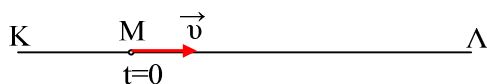


Γραφικές παραστάσεις στην απλή αρμονική ταλάντωση.

Ένα σημειακό αντικείμενο εκτελεί απλά αρμονική ταλάντωση, μεταξύ δύο ακραίων θέσεων Κ και Λ, όπου $(ΚΛ)=0,4\text{m}$ και τη χρονική στιγμή $t_0=0$, περνά από το σημείο Μ, το οποίο απέχει κατά $0,3\text{m}$ από το Λ, κατευθυνόμενο προς τα δεξιά, όπου παίρνουμε την θετική κατεύθυνση.

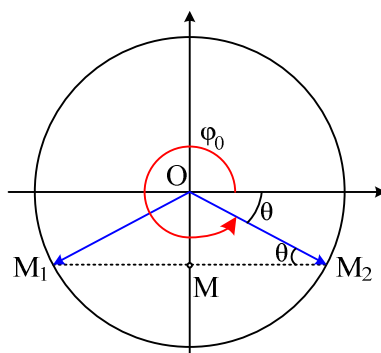


Τη στιγμή αυτή δέχεται δύναμη επαφής μέτρου $F=10\text{N}$. Τη χρονική στιγμή $t_1=\pi/30\text{s}$ η ταχύτητα του σώματος γίνεται μέγιστη για πρώτη φορά.

- Να κάνετε το διάγραμμα της φάσης ταλάντωσης, σε συνάρτηση με το χρόνο σε βαθμολογημένους άξονες.
- Να κάνετε επίσης τη γραφική παράσταση της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης σε συνάρτηση με την ταχύτητα του σώματος σε βαθμολογημένους άξονες.
- Να υπολογίσετε το έργο της δύναμης που ασκείται στο σώμα, από τη στιγμή $t_0=0$, έως τη στιγμή $t_1=\pi/15\text{s}$.

Απάντηση:

- Αφού $(ΚΛ)=0,4\text{m}$, το πλάτος ταλάντωσης είναι $A=0,2\text{m}$ και για $t=0$ το σώμα περνά από τη θέση $x=-0,1\text{m}$. Παίρνοντας τον κύκλο αναφοράς της ταλάντωσης έχουμε:



Τη στιγμή $t_0=0$ το σώμα βρίσκεται στο σημείο Μ, συνεπώς το περιστρεφόμενο διάνυσμα βρίσκεται είτε στη θέση M_1 είτε στη θέση M_2 , αλλά μεταξύ των δύο επιλέγουμε το M_2 , αφού το σώμα επιστρέφει στη θέση ισορροπίας του Ο. Στο τρίγωνο όμως OMM_1 η πλευρά OM είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας, συνεπώς η γωνία $\theta=30^\circ$.

Έτσι η αρχική φάση αντιστοιχεί στη γωνία ϕ_0 που είναι σημειωμένη στο σχήμα και:

$$\phi_0=2\pi-\theta=2\pi-\pi/6=11\pi/6$$

Εξάλλου για να φτάσει το περιστρεφόμενο διάνυσμα σε οριζόντια θέση, οπότε το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας του και έχει μέγιστη ταχύτητα, περνά χρονικό διάστημα t_1 και έχουμε:

$$\omega = \frac{\theta}{t_1} = \frac{\pi/6}{\pi/30} \text{ rad/s} = 5 \text{ rad/s}$$

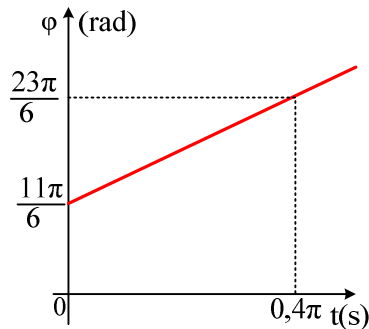
Η εξίσωση της φάσης είναι της μορφής:

$$\varphi = \omega t + \varphi_0$$

και με αντικατάσταση:

$$\varphi = 5t + \frac{11\pi}{6}$$

Σε χρόνο ίσο με την περίοδο όπου $T = 2\pi/\omega = 0,4\pi$, η φάση θα γίνει ίση με $23\pi/6$ rad οπότε η γραφική παράσταση είναι αυτή του παρακάτω σχήματος.



- ii) Η δύναμη επαναφοράς δίνεται από την σχέση $F = -Dx$ και αφού για $t=0$ $x=-0,1\text{m}$ παίρνουμε $D=100\text{N/m}$.

Εξάλλου $D = m\omega^2$ από όπου $m = D/\omega^2 = 4\text{kg}$, ενώ η ενέργεια ταλάντωσης είναι:

$$E = U_{\max} = \frac{1}{2} D \cdot A^2$$

και με αντικατάσταση $E=2\text{J}$.

Ενώ η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης είναι:

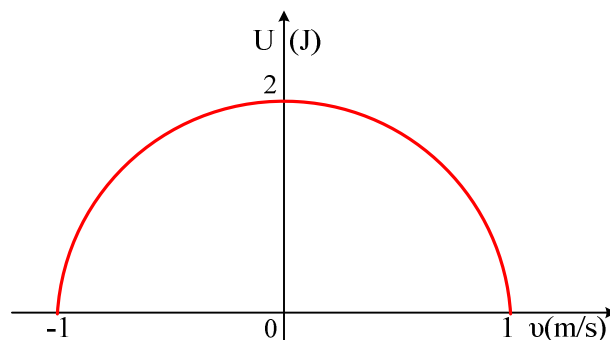
$$v_{\max} = \omega \cdot A = 1\text{m/s}.$$

Η ενέργεια ταλάντωσης παραμένει σταθερή, οπότε:

$$K + U = E \rightarrow$$

$$U = E - \frac{1}{2} mv^2$$

Η γραφική παράσταση είναι αυτή του παρακάτω σχήματος.



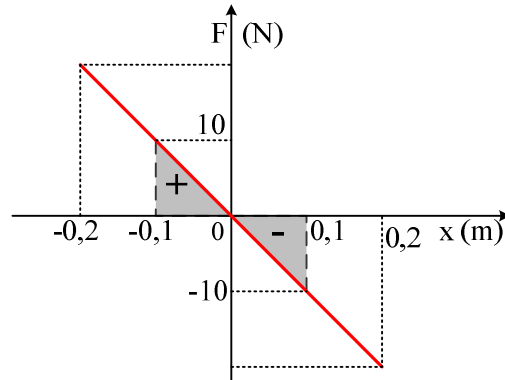
- iii) Αν πάρουμε την εξίσωση της απομάκρυνσης έχουμε:

$$x = A \sin(\omega t + 11\pi/6)$$

Και για $t_1 = \pi/15\text{s}$ παίρνουμε:

$$x = 0,2 \cdot \eta\mu(5 \cdot \pi/15 + 11\pi/6) = 0,2 \cdot \eta\mu(13\pi/6) = 0,1\text{m}.$$

Κάνοντας τη γραφική παράσταση της δύναμης επαναφοράς σε συνάρτηση με την απομάκρυνση παίρνουμε το παρακάτω διάγραμμα.



Το ζητούμενο έργο της δύναμης είναι ίση με το εμβαδόν του χωρίου που έχει γκρι χρώμα, οπότε:

$$W = \frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot 10\text{J} + \frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot (-10)\text{J} = 0$$

ΥΓ.

Προφανώς το έργο θα μπορούσε να υπολογισθεί και από το ΘΜΚΕ αφού προηγουμένως από την ενέργεια ταλάντωσης βρίσκαμε ότι $K_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}}$.

dmargaris@sch.gr