

ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΑ ΤΡΕΧΟΝΤΑ ΚΥΜΑΤΑ

I. Τρέχοντα Κύματα

TP.B1 Μια πηγή αρμονικής διαταραχής O βρίσκεται στην αρχή του άξονα διάδοσης Ox του κύματος και έχει $x_0=0$. Το κύμα διαδίδεται κατά τη θετική φορά του άξονα. Το σημείο O ταλαντώνεται με εξίσωση απομάκρυνσης, $y=A\eta\mu(\omega t)$. Κάποια χρονική στιγμή t σημείο M του άξονα Ox βρίσκεται σε απομάκρυνση $y_M=+A$. Την ίδια στιγμή άλλο σημείο Λ του ίδιου άξονα του οποίου η φάση προηγείται της φάσης του M και απέχει από το M απόσταση $\Delta x=5\lambda/6$, θα βρίσκεται σε θέση:

(α) $y=0$

(β) $y=+A$

(γ) $y=+A/2$

Λύση

Για τη φάση του M : $y_M=+A \rightarrow A\eta\mu\phi_M=+A \rightarrow \eta\mu\phi_M=1 \rightarrow \phi_M=2\kappa\pi+\pi/2$

Από την απόσταση ΛM βρίσκω τη φάση του σημείου Λ ($\phi_\Lambda > \phi_M$) την ίδια χρονική στιγμή

$$\Delta\phi=2\pi\frac{\Delta x}{\lambda} \rightarrow \phi_\Lambda-\phi_M=2\pi\frac{5\lambda}{\lambda} \rightarrow \phi_\Lambda=\phi_M+5\pi/3 \rightarrow \phi_\Lambda=2\kappa\pi+\pi/2+5\pi/3 \rightarrow \phi_\Lambda=2\kappa\pi+13\pi/6$$

$$\text{Αρα } y_\Lambda=A\eta\mu\phi_\Lambda=A\eta\mu(2\kappa\pi+13\pi/6)=A\eta\mu(\pi/6)=\frac{A}{2} \rightarrow y_\Lambda=\frac{A}{2}$$

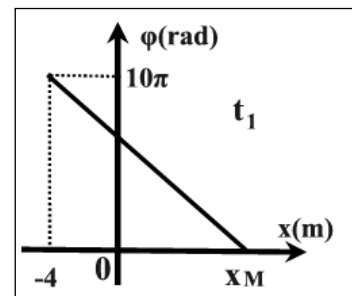
TP.B2 Κύμα μήκους κύματος $\lambda=2\text{m}$ διαδίδεται προς τη θετική φορά του άξονα $x'Ox$. Τη χρονική στιγμή $t=0$ το μέτωπο του κύματος είναι στη θέση (O) με $x_0=0$. Το σημείο O διέρχεται από τις ακραίες θέσεις ταλάντωσης κάθε $0,25\text{ s}$. Στο διάγραμμα βλέπουμε τη φάση ταλάντωσης των μορίων του ελαστικού σε σχέση με τη θέση x του κάθε σημείου κάποια χρονική στιγμή t_1 .

I. Η θέση x του σημείου M είναι

(α) $x=6\text{m}$

(β) $x=8\text{m}$

(γ) $x=10\text{m}$



II. Αν η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι διπλάσια από την μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης των μορίων του ελαστικού μέσου, η εξίσωση του κύματος είναι

(α) $y=\frac{\pi}{20}\eta\mu(4\pi t-\pi x)$

(β) $y=\frac{\pi}{10}\eta\mu(2\pi t-\pi x)$

(γ) $y=\frac{\pi}{10}\eta\mu(4\pi t-\pi x)$

Λύση

I. Για την περίοδο: $\frac{T}{2}=0,25\text{s} \rightarrow T=0,5\text{s} \rightarrow f=2\text{Hz}$

Για $x=-4\text{m}$, $\phi=10\pi\text{ rad}$. Η φάση: $\phi=2\pi ft-2\pi x/\lambda \rightarrow 10\pi=4\pi t_1-\frac{2\pi(-4)}{2} \rightarrow t_1=1,5\text{s}$

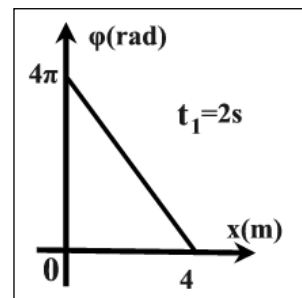
Για τη $\phi_M=0 \rightarrow \phi_M=4\pi t_1-\frac{2\pi x}{\lambda} \rightarrow 0=4\pi \cdot 1,5-\pi \cdot x \rightarrow x=6\text{m}$

II. Για τις ταχύτητες: $v=\lambda \cdot f \rightarrow v=4\text{m/s}$

$$v=2A \cdot \omega \rightarrow A=\frac{v}{4\pi f} \rightarrow A=\frac{4}{8\pi}=\frac{2}{\pi}=\frac{2\pi}{\pi^2} \rightarrow A=0,2\pi\text{ m/s}$$

Αρα η εξίσωση του κύματος θα είναι: $y=A\eta\mu(\omega t-2\pi x/\lambda) \rightarrow y=0,2\pi \cdot \eta\mu(4\pi t-\pi x)$ στο SI

TPB.3 Το άκρο Ο γραμμικού, ομογενούς ελαστικού μέσου που εκτείνεται κατά την διεύθυνση του ημιάξονα Οx αρχίζει, τη χρονική στιγμή $t=0$, να ταλαντώνεται σύμφωνα με την εξίσωση $y=A\eta\mu\omega t$, και δημιουργεί εγκάρσιο αρμονικό κύμα. Η γραφική παράσταση της φάσης της ταλάντωσης των σημείων του μέσου, τη χρονική στιγμή $t_1=2s$, σε συνάρτηση με τη θέση x, φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα. Τη χρονική στιγμή $t_2=2,25s$



I. τα σημεία της χορδής που βρίσκονται σε ακραία θέση της τροχιάς τους είναι:

- (α) 4 (β) 5 (γ) 6

II. τα σημεία της χορδής που βρίσκονται σε απομάκρυνση $y=-A/2$ και με ταχύτητα θετικής αλγεβρικής τιμής είναι:

- (α) 2 (β) 3 (γ) 4

Λύση

I. Για τη φάση ισχύει: $\varphi=2\pi f \cdot t - 2\pi \frac{x}{\lambda}$ (1)

Από τη γραφική έχουμε για $t_1=2s$, $x=0$ και $\varphi=4\pi$ rad (2)

Από (1)(2) $\rightarrow f=1Hz$ και $T=1s$

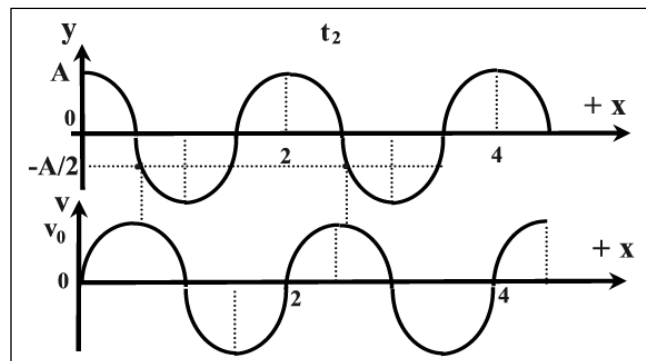
Από τη γραφική έχουμε για $t_1=2s$, $x=4$ και $\varphi=0$ rad (3)

Από (1)(3) $\rightarrow \lambda=2m$. Άρα και $v=\lambda \cdot f=2m/s$

Σχεδιάζουμε το στιγμιότυπο $y=f(x)$ τη χρονική στιγμή $t_2=2,25s$ που το μέτωπο του κύματος έχει ταξιδέψει κατά $x=v \cdot t_2 = 2 \cdot 2,25 = 4,5m$ δηλαδή $x/\lambda = 4,5/2 = 2,25$ μήκη κύματος.

Άρα σε ακραία θέση βρίσκονται 5 σημεία. (β)

II. Τα σημεία με $y=-A/2$ είναι συνολικά 5 αλλά μόνο τα δύο εξ αυτών έχουν $v>0$. Αυτό φαίνεται στο διάγραμμα $v=f(x)$. Σωστό το (α)



TP.B4 Εγκάρσιο αρμονικό κύμα της μορφής $y=A\eta\mu(2\pi t/T - 2\pi x/\lambda)$ διαδίδεται σε χορδή μεγάλου μήκους. Ένα σημείο Μ με $x_M=10\lambda$ αρχίζει να ταλαντώνεται όταν το υλικό σημείο Ν με θέση $x_N=5\lambda/4$

(α) θα βρίσκεται στη θέση $y=+A$.

(β) θα βρίσκεται στη θέση $y=-A$.

(γ) Θα διέρχεται από τη θέση $y=0$ με $v>0$.

Λύση

Όταν το κύμα φτάνει στο Μ τότε η φάση του Μ είναι μηδέν αφού τότε αρχίζει το σημείο να ταλαντώνεται.

$$\Delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta} \varphi_M=0 \rightarrow \varphi=2\pi \frac{t}{T} - 2\pi \frac{x}{\lambda} = 0 \rightarrow \frac{t}{T} = 10 \rightarrow t=10T$$

Την ίδια στιγμή το σημείο Ν θα βρίσκεται σε απομάκρυνση $y_M=A\eta\mu(2\pi \frac{t}{T} - 2\pi \frac{x}{\lambda})=A\eta\mu(20\pi - \frac{5\pi}{2}) \rightarrow$

$$\text{Άρα: } y_N=A \cdot \eta\mu(17,5\pi)=A\eta\mu(18\pi - \frac{\pi}{2}) \rightarrow y=-A$$

ΤΡ.Β5 Σε οριζόντιο ελαστικό νήμα διαδίδεται αρμονικό κύμα με $f_1=40\text{Hz}$, Μεταξύ δύο θέσεων ισορροπίας Κ και Λ χωρούν 20 μήκη κύματος. Αν η συχνότητα του κύματος γίνει f_2 , τότε μεταξύ των ίδιων σημείων του ίδιου νήματος χωρούν ακόμη άλλα 10 μήκη κύματος. Η ποσοστιαία μεταβολή της συχνότητας του κύματος είναι:

- (α) $\pi\%=50\%$ (β) $\pi\%=100\%$ (γ) $\pi\%=75\%$

Λύση

Στην ίδια απόσταση $\Delta x = 20\lambda_1 = 30\lambda_2 \rightarrow 20 \frac{v}{f_1} = 30 \frac{v}{f_2} \rightarrow f_2 = \frac{3}{2} f_1$

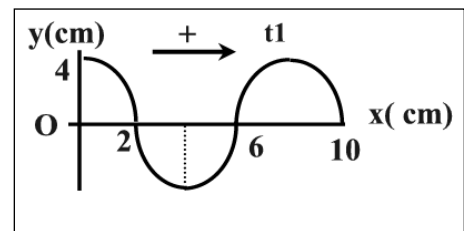
Η μεταβολή της συχνότητας είναι $\Delta f = f_2 - f_1 = 0,5f_1$

Το ποσοστό αύξησης θα είναι: $\pi\% = \frac{\Delta f}{f_1} 100\% = 50\%$

ΤΡ.Β6 Στο διπλανό σχήμα φαίνεται στιγμιότυπο εγκάρσιου αρμονικού κύματος που διαδίδεται κατά τη θετική φορά του άξονα Οx, τη χρονική στιγμή t_1 . Το σημείο Ο αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_0=0$ με θετική φορά.

I. Η χρονική στιγμή t_1 είναι ίση με:

- (α) 3T (β) 5T/2 (γ) 5T/4



II. Πόσο προχωρά το μέτωπο κύματος μέχρι η πηγή να κάνει μια πλήρη ταλάντωση;

- (α) 2cm, (β) 4cm (γ) 8cm

III. Προς ποια κατεύθυνση κινούνται τα σημεία $x_1=2\text{cm}$ και $x_2=6\text{cm}$, τη χρονική στιγμή t_1 ;

- (α) προς τα πάνω, (β) προς τα κάτω. (γ) είναι ακίνητα

Λύση

I. Το μήκος κύματος είναι $\lambda=8\text{cm}$ άρα το σημείο $x=10\text{cm} \rightarrow x=5\lambda/4$, ως μέτωπο του κύματος έχει:

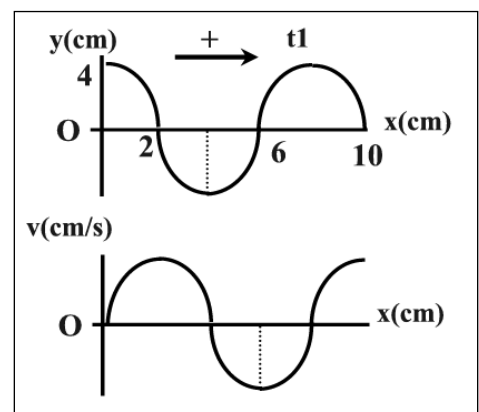
$$\varphi=0 \rightarrow \frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda} = 0 \rightarrow \frac{2\pi t}{T} = \frac{5\lambda}{2\lambda} \rightarrow t = \frac{5T}{4}$$

II. Μέχρι η πηγή να κάνει μια πλήρη ταλάντωση $\Delta t=T$ το μέτωπο προχωρά κατά

$$\Delta x = v \cdot T = \lambda \rightarrow \Delta x = 8\text{cm}$$

III. Ένας τρόπος για να βρω την κατεύθυνση κίνησης είναι να κάνω τη γραφική παράσταση $v=f(x)$. Από το διάγραμμα φαίνεται ότι το σημείο $x=2\text{cm}$ έχει $v=v_0>0$, άρα κινείται προς τα πάνω και το σημείο $x=6\text{cm}$ έχει $v=-v_0<0$, άρα κινείται προς τα κάτω. Το σημείο $x=10\text{cm}$ που τη χρονική στιγμή t_1 είναι το μέτωπο του κύματος έχει ταχύτητα $v>0$ διότι αρχίζει να ταλαντώνεται και θα έχει ίδια ταχύτητα με το σημείο $x=0$ όταν αυτό άρχισε να ταλαντώνεται δηλαδή **θετική**.

Ο άλλος τρόπος είναι να υπολογίσουμε την αλγεβρική τιμή της ταχύτητας των εν λόγω σημείων με $x=2\text{cm}$ και $x=6\text{cm}$ από την

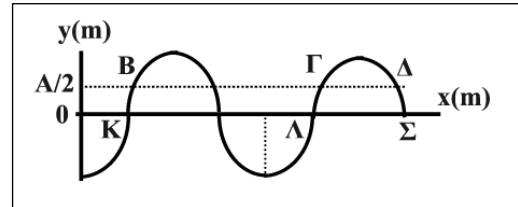


εξίσωση της ταχύτητας $v=v_0 \sin(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda})$ και από το πρόσημο να καταλάβουμε τη φορά κίνησης

ΤΡ.Β7 Γραμμικό αρμονικό κύμα διαδίδεται στη διεύθυνση του άξονα x/Ox προς τη θετική κατεύθυνση και η αρχή του άξονα O , ($x=0$) αρχίζει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t=0$, με εξίσωση ταλάντωσης $y=A\sin\omega t$. Το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_1 φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Η διαφορά φάσης

I. των σημείων B και Γ την ίδια χρονική στιγμή είναι
(α) $\pi/2$ rad, (β) 2π rad, (γ) $3\pi/2$ rad,

II. των σημείων B και Δ την ίδια χρονική στιγμή είναι
(α) $\pi/2$ rad, (β) 2π rad, (γ) $8\pi/3$ rad



Λύση

I. Η απόσταση των ΘI των σημείων B και Γ είναι $\Delta x=\lambda$ διότι βρίσκονται δεξιά από τα σημεία K και Δ και απέχουν ίσες αποστάσεις από αυτά και η απόσταση $K\Delta=\lambda$ Άρα

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} \rightarrow \Delta\phi = 2\pi \text{ rad}$$

II. Το στιγμιότυπο του κύματος είναι τη χρονική στιγμή t_1 την οποία υπολογίζω είτε μηδενίζοντας τη φάση του μετώπου, $\phi_{\Sigma}=0$ ή από $x_{\Sigma}=7\lambda/4 \rightarrow vt=7\lambda/4 \rightarrow t_1=7T/4$. Τα σημεία B και Δ έχουν τη χρονική στιγμή $t=t_1=7T/4$ απομάκρυνση $y=A/2$. Από την εξίσωση της απομάκρυνσης

$$\frac{A}{2} = A\sin(\phi) \rightarrow \sin\phi = 1/2 \rightarrow \phi = 2k\pi + \pi/6 \quad (1) \text{ και } \phi = 2k\pi + 5\pi/6 \quad (2)$$

Το Δ είναι το 4^ο κατά σειρά σημείο με $y=A/2$, το πιο απομακρυσμένο από το O, άρα θα έχει τη μικρότερη φάση άρα από την εξίσωση (1) με $k=0$ βρίσκω τη φάση του δηλαδή $\phi_{\Delta}=\pi/6$ rad.

Το B είναι το 1^ο σημείο με $y=A/2$ άρα το πλησιέστερο στο O άρα θα έχει τη μεγαλύτερη φάση. Από την (2) εξίσωση και για $k=1$ βρίσκω τη φάση του. Δηλαδή $\phi_B = 17\pi/6$ rad.

$$\text{Άρα } \Delta\phi = \phi_B - \phi_{\Delta} = 16\pi/6 \rightarrow \Delta\phi = 8\pi/3 \text{ rad}$$

ΤΡ.Β8 Εγκάρσιο κύμα διαδίδεται κατά μήκος του άξονα Ox ενός γραμμικού ελαστικού μέσου.

Τη χρονική στιγμή $t=0$ το σημείο O με $x=0$ ξεκινάει κατακόρυφη ταλάντωση με εξίσωση $y=A\sin(\omega t)$. Σημείο M του μέσου έχει σε μια χρονική στιγμή t_1 φάση $\phi_{M,1}=3\pi/2$ rad, ενώ ένα άλλο σημείο Λ έχει τη χρονική στιγμή $t_2=t_1+3T/4$ φάση $\phi_{\Lambda,2}=5\pi$ rad. Αν το κύμα διαδίδεται κατά τη θετική φορά του άξονα τη στιγμή που η απομάκρυνση του σημείου Λ είναι $+A/2$ η απομάκρυνση του M θα είναι

(α) $+A/2$

(β) $-A/2$

(γ) 0

Λύση

Τη χρονική t_1 το M έχει φάση: $\phi_{1M} = \frac{2\pi t_1}{T} - \frac{2\pi x_1}{\lambda} = \frac{3\pi}{2}$ rad

Τη χρονική t_2 το Λ έχει φάση: $\phi_{2\Lambda} = \frac{2\pi t_2}{T} - \frac{2\pi x_2}{\lambda} = 5\pi \rightarrow \frac{2\pi(t_1+3T/4)}{T} - \frac{2\pi x_2}{\lambda} = 5\pi \rightarrow$
 $\rightarrow \frac{2\pi t_1}{T} - \frac{2\pi x_2}{\lambda} + 3\pi/2 = 5\pi \rightarrow \frac{2\pi t_1}{T} - \frac{2\pi x_2}{\lambda} = \frac{7\pi}{2} \rightarrow \phi_{1\Lambda} = \frac{7\pi}{2}$ rad

$\Delta\phi = \phi_{1\Lambda} - \phi_{1M} = 2\pi \text{ rad}$ Συνεπώς τα Λ και M είναι σημεία συμφασικά και άρα θα έχουν τις ίδιες απομακρύνσεις $+A/2$

ΤΡ.Β9 Ένα αρμονικό κύμα με εξίσωση $y=A \sin(2\pi t/T - 2\pi x/\lambda)$ διαδίδεται μέσα σε ένα γραμμικό ελαστικό μέσο με μήκος κύματος λ κατά τη θετική κατεύθυνση.

I. Κάποια χρονική στιγμή t δύο σημεία Λ και M που βρίσκονται στις θέσεις $x_\Lambda = 3\lambda/8$ και $x_M = 5\lambda/8$ αντίστοιχα, έχουν διαφορά φάσης

(α) $\Delta\phi = 0$.

(β) $\Delta\phi = \pi/2 \text{ rad}$.

(γ) $\Delta\phi = \pi \text{ rad}$.

II. Αν κάποια χρονική στιγμή το σημείο Λ βρίσκεται σε απομάκρυνση $y_\Lambda = +A/2$ και ταχύτητα αρνητικής αλγεβρικής τιμής, το σημείο M θα βρίσκεται σε απομάκρυνση

(α) $y_M = +A/2$

(β) $y_M = -A/2$

(γ) $y_M = +\frac{A}{2}\sqrt{3}$

Λύση

I. Η διαφορά φάσης: $\Delta\phi = \frac{2\pi\Delta x}{\lambda} = \frac{2\pi(x_B - x_A)}{\lambda} \rightarrow \Delta\phi = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ Σωστό **(β)**

II. Αφού $x_\Lambda < x_M \rightarrow \phi_\Lambda > \phi_M \rightarrow \phi_\Lambda - \phi_M = \frac{\pi}{2} \text{ rad} \rightarrow \phi_M = \phi_\Lambda - \frac{\pi}{2}$ (1)

Το $y_\Lambda = A \sin \phi_\Lambda \rightarrow \sin \phi_\Lambda = 1/2 \rightarrow \sin \phi_\Lambda = \sin \frac{\pi}{6} \rightarrow \phi_\Lambda = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ (i) και $\phi_\Lambda = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$ (ii)

Επειδή όμως η $V_\Lambda < 0 \rightarrow$ δεκτή είναι η $\phi_\Lambda = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$

Άρα (1) $\rightarrow \phi_M = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{2} \rightarrow \phi_M = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$

Και $y_M = A \cdot \sin \phi_M = A \cdot \sin(2k\pi + \frac{\pi}{3}) = A \sin(\frac{\pi}{3}) \rightarrow y_M = +\frac{A}{2}\sqrt{3}$, με ταχύτητα $v_M = v_0 \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}v_0$
Άρα σωστό το **(γ)**

ΤΡ.Β10 Αρμονικό κύμα διαδίδεται κατά μήκος ελαστικού μέσου με θετική φορά. Το σημείο $x=0$ ταλαντώνεται με εξίσωση $y=A \sin(\omega t)$. Σημείο K του μέσου βρίσκεται στο θετικό ημιάξονα και τη χρονική στιγμή $t_1 = 15T/4$ βρίσκεται σε ακραία θέση ταλάντωσης. Από τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ έως τη χρονική στιγμή t_1 το σημείο K έχει φθάσει σε ακραία θέση άλλες δυο φορές.

I. Αν λ είναι το μήκος κύματος, η θέση του σημείου K πάνω στον άξονα είναι

α. $x = 2,5\lambda$

β. $x = 3,75\lambda$

γ. $x = 3,5\lambda$

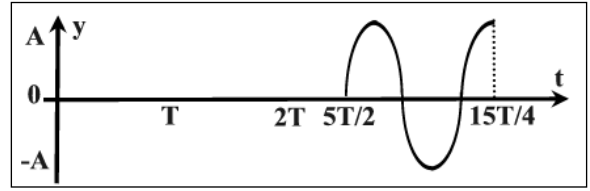
II. Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση $y=f(t)$ για το σημείο K από $t_0 = 0$ έως $t_1 = 15T/4$.

Λύση

I. Το χρονικό διάστημα για να βρεθεί το Κ, 3 φορές συνολικά σε ακραία θέση ταλάντωσης ξεκινώντας από το $y=0$ είναι $\Delta t = T + T/4 = 5T/4$. Άρα το σημείο Κ ξεκινάει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t = 15T/4 - 5T/4 = 10T/4 = 2,5T$.

Άρα η απόσταση του Κ από την αρχή του άξονα Ο είναι :

$$x = v \cdot t = v \cdot 2,5T = 2,5\lambda \quad \text{Σωστό το (α)}$$



II. Η γραφική $y=f(t)$ για το σημείο Κ από $t_0=0$ έως $t_1=15T/4$ φαίνεται στο σχήμα.