

Οι απαιτούμενες γνώσεις Φυσικής πριν τη Γ λυκείου

1. Ευθύγραμμες κινήσεις

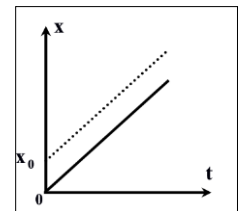
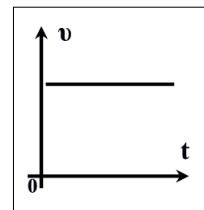
Μετατόπιση, $\Delta \vec{x} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$: Είναι η μεταβολή του διανύσματος θέσης. Μετριέται σε m

Ταχύτητα: $\vec{v} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$ Ο ρυθμός μεταβολής της θέσης. Μετριέται σε m/s

Επιτάχυνση: $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$: Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας. Μετριέται σε m/s²

Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση: Το διάνυσμα της ταχύτητας μένει σταθερό. Το κινητό διανύσει σε ίσα χρονικά διαστήματα, ίσες μετατοπίσεις. Μέση και στιγμιαία ταχύτητα ταυτίζονται.

$$\vec{v} = \text{σταθ} \text{ και } \Delta x = v \cdot \Delta t$$

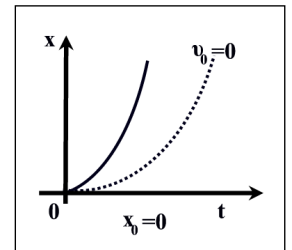
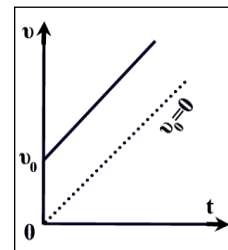
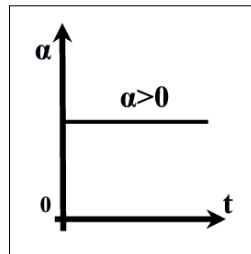


Ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση: Είναι ευθύγραμμη κίνηση κατά την οποία το διάνυσμα της επιτάχυνσης μένει σταθερό, $\vec{a} = \text{σταθ}$.

Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση: Είναι ευθύγραμμη κίνηση κατά την οποία το διάνυσμα της επιτάχυνσης μένει σταθερό, και της ίδιας κατεύθυνσης με την αρχική ταχύτητα. Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας αυξάνεται με σταθερό ρυθμό: $a > 0$

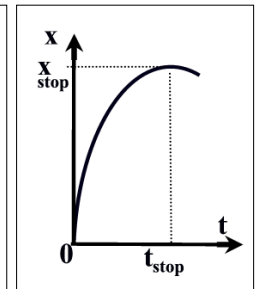
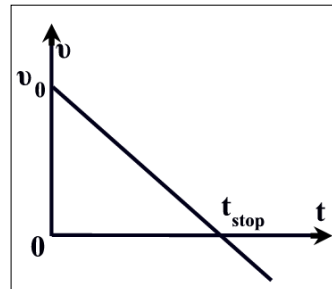
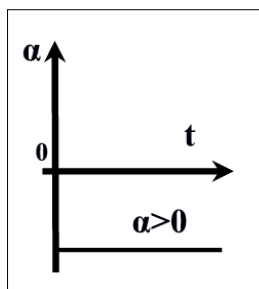
$$v = v_0 + at \quad \Delta x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

Αν για $t_0 = 0, v_0 = 0$: $v = at$ και $\Delta x = \frac{1}{2} at^2$



Ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση: Είναι ευθύγραμμη κίνηση κατά την οποία το διάνυσμα της επιτάχυνσης μένει σταθερό, και με αντίθετη κατεύθυνση από την αρχική ταχύτητα. Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας μειώνεται με σταθερό ρυθμό: $a < 0$

$$v = v_0 - |a|t \quad \Delta x = v_0 t - \frac{1}{2} |a|t^2$$



• **Μηδενισμός της ταχύτητας, ($v=0$):**

Το χρονικό διάστημα που χρειάζεται από τη στιγμή που αρχίζει να μειώνεται το μέτρο της ταχύτητας (επιβραδύνεται) μέχρι να σταματήσει, δηλ. να γίνει $v=0$ είναι

$$v=v_0 - |a| \cdot t \rightarrow 0 = v_0 - |a| \cdot t \rightarrow |a| \cdot t = v_0 \rightarrow \boxed{t_{\text{stop}} = \frac{v_0}{|a|}}$$

και η αντίστοιχη μετατόπιση:

$$|\Delta x| = v_0 \cdot \Delta t - \frac{1}{2} |a| \cdot \Delta t^2 \rightarrow \Delta x = v_0 \cdot t_{\text{stop}} - \frac{1}{2} |a| \cdot t_{\text{stop}}^2 \rightarrow \Delta x_{\text{stop}} = v_0 \cdot \frac{v_0}{a} - \frac{1}{2} \cdot |a| \cdot \left(\frac{v_0}{a}\right)^2 \rightarrow$$

$$\boxed{|\Delta x_{\text{stop}}| = \frac{v_0^2}{2|a|}}$$

• Μετά την χρονική στιγμή t_{stop} το κινητό θεωρητικά επιστρέφει δηλαδή κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση ($v < 0$) δηλαδή πίσω, προς το $x_0=0$. Η κίνηση συνεχίζει να περιγράφεται με τις ίδιες εξισώσεις.

• **Η σχέση v και Δx με απαλοιφή του χρόνου:**

Για κάθε ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση με $a > 0$ ή $a < 0$

$$\text{Από τις σχέσεις: } v = v_0 + at \rightarrow t = \frac{v - v_0}{a} \quad (1) \quad \text{και την } \Delta x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad (2)$$

Έχουμε:

$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2a \cdot \Delta x}$$

• **Παρατηρήσεις**

Στο διάγραμμα ($v-t$) η κλίση της ευθείας είναι αριθμητικά ίση με την αλγεβρική τιμή της επιτάχυνσης.

Στο διάγραμμα ($a-t$) το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης και του άξονα των χρόνων για ορισμένο χρονικό διάστημα ισούται αριθμητικά με τη μεταβολή ταχύτητας.

Στο διάγραμμα ($v-t$) το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης και του άξονα των χρόνων για ορισμένο χρονικό διάστημα ισούται αριθμητικά με τη μετατόπιση.

Στο διάγραμμα ($x-t$) η κλίση της γραφικής παράστασης είναι αριθμητικά ίση με την αλγεβρική τιμή της ταχύτητας.

2. Δύναμη και κίνηση

Η δύναμη: Μπορεί να μεταβάλλει την κινητική κατάσταση ενός σώματος ή να το παραμορφώσει. Η δύναμη συμβολίζεται με το γράμμα $\vec{F}$ είναι διανυσματικό μέγεθος και μετρείται σε Newton (N).

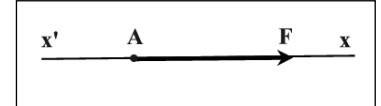
Τα χαρακτηριστικά της δύναμης: Η δύναμη $\vec{F}$ είναι διανυσματικό μέγεθος. Για την πλήρη περιγραφή της απαιτούνται:

α. Το μέτρο της, δηλαδή η αριθμητική τιμή της, πχ. $F=10\text{N}$.

β. Η κατεύθυνσή της, δηλαδή η διεύθυνση και η φορά της. Για παράδειγμα η διεύθυνση είναι ο άξονας $x'x$ και η φορά προς τα δεξιά.

γ. Το σημείο εφαρμογής της, το σημείο του σώματος στο οποίο ασκείται, πχ το σημείο Α.

Αν μιλάμε για σημειακό αντικείμενο, τότε το σημείο εφαρμογής της δύναμης είναι το σημειακό αντικείμενο.



Συνισταμένη δύναμη: Δύο ή περισσότερων δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα, ονομάζεται η δύναμη που μπορεί να προκαλέσει στο σώμα το ίδιο μηχανικό αποτέλεσμα που μπορούν να προκαλέσουν οι άλλες δυνάμεις μαζί. Η διαδικασία υπολογισμού της συνισταμένης ενός συνόλου δυνάμεων, ονομάζεται σύνθεση δυνάμεων. Γενικά η συνισταμένη προκύπτει ως διανυσματικό άθροισμα των συνιστωσών :

$$\Sigma\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\dots$$

Υπολογισμός της συνισταμένης δύναμης:

- Αν οι δυνάμεις είναι συγγραμικές και «ομόρροπες», δηλαδή έχουν την ίδια κατεύθυνση, το μέτρο είναι:

$$\Sigma F=F_1+F_2$$

και η κατεύθυνση ίδια με αυτή των συνιστωσών.

- Αν οι δυνάμεις είναι συγγραμικές και «αντίρροπες», δηλαδή έχουν αντίθετη κατεύθυνση το μέτρο είναι:

$$\Sigma F=|F_1-F_2|$$

και η κατεύθυνση ίδια με εκείνης της συνιστώσας που έχει το μεγαλύτερο μέτρο.

- Αν οι δυνάμεις είναι ορθογώνιες ($\varphi=90^\circ$) τότε το μέτρο είναι:

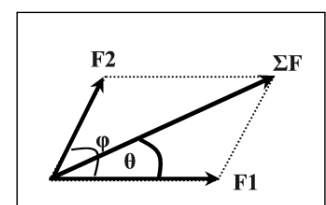
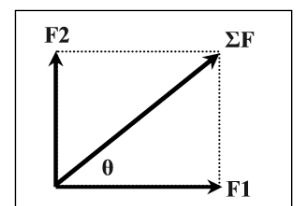
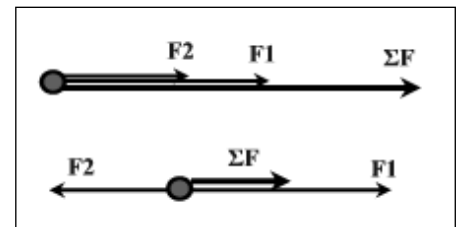
$$\Sigma F=\sqrt{F_1^2+F_2^2} \text{ και } \varepsilon\varphi\theta=\frac{F_2}{F_1}$$

και η κατεύθυνση καθορίζεται από την γωνία θ στο παραλληλόγραμμο των δυνάμεων όπως φαίνεται στο σχήμα.

- Αν οι δυνάμεις σχηματίζουν τυχαία γωνία φ , τότε το μέτρο είναι

$$\Sigma F=\sqrt{F_1^2+F_2^2+2F_1F_2\cos\varphi} \text{ και } \varepsilon\varphi\theta=\frac{F_2\eta\mu\varphi}{F_1+F_2\cos\varphi}$$

και η κατεύθυνση καθορίζεται από την γωνία θ στο παραλληλόγραμμο των δυνάμεων όπως φαίνεται στο σχήμα.

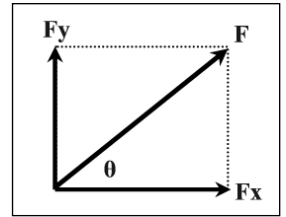


• **Ανάλυση δύναμης σε ορθογώνιους άξονες:** Κάθε δύναμη $\vec{F}$ μπορεί να αναλυθεί σε σύστημα ορθογωνίων αξόνων σε δύο συνιστώσες F_x και F_y με μέτρα:

$$F_x = F \cos \theta \text{ και } F_y = F \sin \theta$$

Απόδειξη:

$$\cos \theta = \frac{F_x}{F} \rightarrow F_x = F \cdot \cos \theta \quad \text{και} \quad \sin \theta = \frac{F_y}{F} \rightarrow F_y = F \cdot \sin \theta$$



Οι νόμοι Newton

Εδώ διατυπώνονται για ένα υλικό σημείο δηλαδή για ένα σώμα που κάνει μόνο μεταφορική κίνηση.

Ο 1ος νόμος του Newton (νόμος της αδράνειας):

Αν η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα γίνει μηδέν τότε αυτό:

α. είτε παραμένει ακίνητο, αν ήταν ήδη ακίνητο.

β. είτε κινείται ευθύγραμμα και ομαλά (με σταθερή ταχύτητα) αν ήταν ήδη σε κίνηση.

Ο 1ος νόμος του Νεύτωνα ισχύει όχι μόνο για τα επίγεια σώματα, αλλά και για κάθε σώμα στο Σύμπαν.

• Σύμφωνα με τον 1^ο νόμο, αν σε ένα κινούμενο αυτοκίνητο η συνισταμένη των δυνάμεων που του ασκούνται γίνει για κάποιο λόγο ίση με το μηδέν, αυτό δεν θα σταματήσει, όπως λένε οι περισσότεροι, αλλά θα συνεχίσει να κινείται με σταθερή ταχύτητα ίση με αυτή που είχε την στιγμή που η συνισταμένη δύναμη έγινε μηδέν.

Η αδράνεια των σωμάτων: Αδράνεια ονομάζεται η ιδιότητα που έχουν τα σώματα να διατηρούν την κινητική τους κατάσταση και να αντιστέκονται σε κάθε μεταβολή της.

Η (αδρανειακή) μάζα m ενός σώματος αποτελεί το μέτρο της αδράνειάς του. Όσο μεγαλύτερη είναι η μάζα ενός σώματος τόσο πιο δύσκολο είναι να του μεταβάλλουμε την κινητική του κατάσταση. Απαιτείται μεγαλύτερη δύναμη για να σταματήσουμε ή να επιταχύνουμε ένα βαρύτερο από ένα ελαφρότερο αντικείμενο. Η αδρανειακή μάζα είναι η γνωστή μάζα.

Ισορροπία υλικού σημείου: Αν ένα υλικό σημείο ισορροπεί τότε η συνισταμένη των δυνάμεων που

δέχεται είναι ίση με το μηδέν,

$$\sum \vec{F} = 0$$

• Αν οι δυνάμεις ανήκουν στο ίδιο επίπεδο, τότε η διανυσματική σχέση ισοδυναμεί με δύο αλγεβρικές σχέσεις στους άξονες x και y :

$$\sum F_x = 0 \text{ και } \sum F_y = 0$$

Ο 2ος νόμος του Newton: Η επιτάχυνση ενός σώματος είναι:

α. ανάλογη με τη συνισταμένη δύναμη που δέχεται, αν η μάζα του είναι σταθερή

β. αντιστρόφως ανάλογη της μάζας του αν η δύναμη είναι σταθερή

και έχει την κατεύθυνση της συνισταμένης των δυνάμεων που ασκούνται σε αυτό.

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \rightarrow \vec{a} = \frac{\sum \vec{F}}{m}$$

Αν $\sum \vec{F} = 0$ τότε $\vec{a} = 0$ δηλαδή $\vec{v} = \text{σταθερή}$ και το σώμα κάνει κίνηση ευθύγραμμη και ομαλή.

Αν η $\sum \vec{F}$ είναι σταθερή και ίδιας κατεύθυνσης με την αρχική ταχύτητα, το σώμα κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ($a > 0$).

Αν η $\vec{\Sigma F}$ είναι σταθερή και αντίθετης κατεύθυνσης με την αρχική ταχύτητα, το σώμα κάνει ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση ($\alpha < 0$).

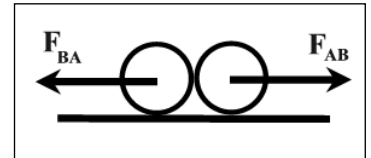
Αν η $\vec{\Sigma F}$ είναι μεταβαλλόμενη τότε και η επιτάχυνση είναι μεταβαλλόμενη.

Η μονάδα της δύναμης στο SI:

$$1\text{N} = 1\text{kg} \cdot 1\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Ο 3ος νόμος του Newton: Όταν δύο σώματα A και B αλληλεπιδρούν και το A ασκεί στο σώμα B, δύναμη $\vec{F}_{AB}$ τότε και το B ασκεί στο A αντίθετη δύναμη $\vec{F}_{BA}$ έτσι ώστε να ισχύει:

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$



☛ Με άλλα λόγια, σε κάθε δράση αντιστοιχεί και μια αντίδραση. «Παίρνεις όση δύναμη βάζεις». Όλες οι δυνάμεις στη φύση αποτελούν ζεύγη δράσης και αντίδρασης. Η δράση και η αντίδραση δρουν σε διαφορετικά σημεία εφαρμογής, έχουν ίδια διεύθυνση, αντίθετη φορά και ίδιο μέτρο. Αυτό σημαίνει ότι αν συγκρουστούν ένα φορτηγό και ένα κουνούπι, όση δύναμη ασκεί το κουνούπι στο φορτηγό, την ακριβώς ίση αλλά αντίθετης κατεύθυνσης δύναμη θα ασκήσει και το φορτηγό στο κουνούπι. Δράση και αντίδραση έχουν ίσα μέτρα ανεξάρτητα από τις μάζες ή την κίνηση των σωμάτων που συγκρούονται.

Είδη δυνάμεων: Υπάρχουν δύο ειδών δυνάμεις, οι «δυνάμεις επαφής» και οι «δυνάμεις από απόσταση».

Δυνάμεις επαφής: Πηγάζουν από την πραγματική επαφή των σωμάτων. Είναι δυνάμεις ηλεκτρομαγνητικής φύσης. Τέτοιες είναι η κάθετη (στην επιφάνεια επαφής) δύναμη ή δύναμη στήριξης, η τριβή, η άνωση, η αντίσταση του αέρα και δυνάμεις που ασκούν, νήματα, ελατήρια, ράβδοι, άνθρωποι, ζώα κλπ.

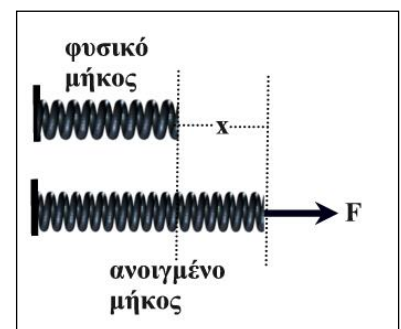
Δυνάμεις από απόσταση: Δεν απαιτούν επαφή και είναι 3, η βαρυτική δύναμη (βάρος), η δύναμη μεταξύ μαγνητών (μαγνητική) και η δύναμη μεταξύ ηλεκτρικών φορτίων (ηλεκτρική).

Ο νόμος του Hooke: Οι ελαστικές παραμορφώσεις ενός σώματος είναι ανάλογες με τις δυνάμεις που τις προκαλούν.

Αν μια δύναμη F ασκηθεί σε ένα ελατήριο και παραμορφώσει ελαστικά το μήκος του κατά x , τότε η σχέση δύναμης και παραμόρφωσης είναι:

$$F = k \cdot x$$

Το μέτρο της δύναμης μεταβάλλεται ανάλογα με την παραμόρφωση μήκους, x . Όπου k είναι η σταθερά του ελατηρίου. Αυτή η σταθερά εξαρτάται από τα γεωμετρικά του χαρακτηριστικά (μήκος ελατηρίου, πλάτος σπείρας) και από τη φύση του (υλικό). Μονάδα μέτρησης της σταθεράς, k , είναι το N/m .



Το βάρος: Είναι η δύναμη με την οποία έλκει η Γη τα σώματα. Είναι ανάλογο της μάζας του σώματος και της επιτάχυνσης της βαρύτητας στον συγκεκριμένο τόπο:

$$\vec{w} = m \cdot \vec{g}$$

Ασκείται στο κέντρο βάρους του σώματος και έχει κατεύθυνση κατακόρυφη προς τα κάτω δηλαδή προς το κέντρο της γης. Στα ομογενή κανονικά σώματα το κέντρο βάρους είναι το γεωμετρικό κέντρο. Πχ το κέντρο μιας σφαίρας από ομογενές υλικό.

Όπου $\vec{g}$ η επιτάχυνση της βαρύτητας με την οποία πέφτει το κάθε σώμα ελεύθερα προς της Γη.

Η τιμή του g εξαρτάται από τον πλανήτη ο οποίος ασκεί τη δύναμη στο σώμα, από το υψόμετρο και το γεωγραφικό πλάτος. Μειώνεται όσο αυξάνεται το ύψος από την επιφάνεια της γης και αυξάνεται καθώς κινούμαστε από τον Ισημερινό ($g=9,79\text{m/s}^2$) προς τους πόλους ($g=9,83\text{m/s}^2$).

Ελεύθερη πτώση: Είναι η κατακόρυφη πτώση ενός σώματος μόνο με την επίδραση του βάρους του και χωρίς αρχική ταχύτητα. Είναι κίνηση ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη με την επιτάχυνση της βαρύτητας, g .

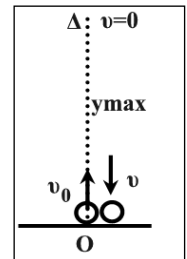
Εξισώσεις ελεύθερης πτώσης: $v=gt$ και $y = \frac{1}{2}gt^2$

Κατακόρυφη βολή προς τα κάτω: Είναι η κίνηση που κάνει ένα σώμα που ρίχνεται με αρχική ταχύτητα v_0 κατακόρυφα με φορά προς τα κάτω, κοντά στην επιφάνεια της Γης, χωρίς την αντίσταση του αέρα. Είναι κίνηση ομαλά επιταχυνόμενη με g .

Οι εξισώσεις: $v=v_0 + gt$ και $y=v_0t + \frac{1}{2}gt^2$

Κατακόρυφη βολή προς τα πάνω: Είναι η κίνηση που κάνει ένα σώμα που ρίχνεται με αρχική ταχύτητα v_0 κατακόρυφα με φορά προς τα πάνω, κοντά στην επιφάνεια της Γης, χωρίς την αντίσταση του αέρα. Είναι κίνηση ομαλά επιβραδυνόμενη με $|a|=g$.

Οι εξισώσεις: $v=v_0 - gt$ και $y=v_0t - \frac{1}{2}gt^2$



Η μελέτη: Σώμα βάλλεται κατακόρυφα προς τα πάνω στο κενό από το σημείο O. Φτάνει μέχρι το σημείο Δ, σταματάει στιγμιαία ($v=0$) και επιστρέφει στο (O) με ταχύτητα v .

Ο χρόνος ανόδου στο μέγιστο ύψος (OΔ):

$$0 = v_0 - gt \rightarrow t_{av} = \frac{v_0}{g}$$

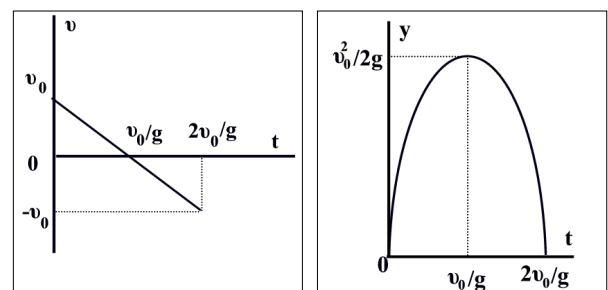
Μέγιστο ύψος (OΔ):

$$y = v_0 t_{av} - \frac{1}{2} g t_{av}^2 \rightarrow \dots \rightarrow y_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$$

Χρόνος επιστροφής στο σημείο βολής:

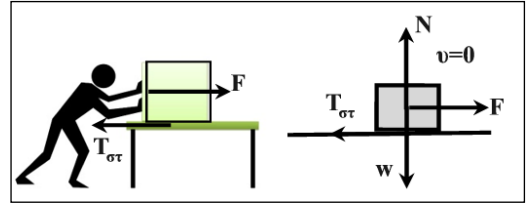
$$\text{Θέτω } y=0 \text{ στη εξίσωση: } 0 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow t_{ολ} = \frac{2v_0}{g}$$

Ταχύτητα επιστροφής στο σημείο βολής (O): $v = v_0 - g t_{ολ} \rightarrow v = -v_0$



Ο χρόνος ανόδου στο μέγιστο ύψος είναι ίσος με το χρόνο καθόδου στο σημείο βολής. Η ταχύτητα εκκίνησης από το σημείο βολής είναι κατά μέτρο ίση με την ταχύτητα επιστροφής στο ίδιο σημείο.

Η στατική τριβή: Είναι η δύναμη που εμφανίζεται ανάμεσα στις επιφάνειες δύο σωμάτων που αλληλοσυμπιέζονται, αλλά δεν κινούνται το ένα ως προς το άλλο. Δεν έχει καθορισμένο μέτρο αλλά ισούται κάθε φορά με τη δύναμη που θέλει να κινήσει το σώμα. Δηλαδή $T_{στ}=F$. Ο φορέας της είναι παράλληλος προς την επιφάνεια επαφής.



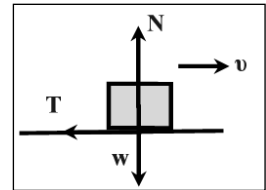
Ο άνθρωπος του σχήματος σπρώχνει το βαρύ κιβώτιο με οριζόντια δύναμη F . Το κιβώτιο όμως παραμένει ακίνητο. Η δύναμη που το εμποδίζει να κινηθεί είναι η στατική τριβή. Η στατική τριβή εκφράζει το γεγονός ότι η επιφάνεια του τραπεζιού δεν είναι λεία και εμποδίζει το σώμα να κινηθεί σε σχέση μ' αυτό. Ασκείται από την επιφάνεια του τραπεζιού στο σώμα, και έχει κατεύθυνση αντίθετη της κατεύθυνσης της ταχύτητας που θα αποκτούσε το σώμα αν ο άνθρωπος μπορούσε να το κινήσει. Η στατική τριβή ενεργοποιείται μόνο όταν ασκείται δύναμη στο σώμα που θέλει να το μετακινήσει κατά μήκος του επιπέδου.

Η μέγιστη στατική τριβή (οριακή): Η στατική τριβή γίνεται μέγιστη όταν η δύναμη F έχει πάρει τέτοια τιμή ώστε το σώμα να είναι έτοιμο να ολισθήσει. Δίνεται από τη σχέση:

$$T_{στ,max} = \mu_{\sigma} \cdot N$$

Όπου N η κάθετη δύναμη και μ_{σ} ο συντελεστής μέγιστης στατικής τριβής που εξαρτάται από τη φύση των τριβομένων επιφανειών. Ο μ_{σ} είναι καθαρός αριθμός, δεν έχει διαστάσεις.

Η τριβή ολίσθησης: Είναι η δύναμη που εμφανίζεται ανάμεσα στις επιφάνειες δύο σωμάτων που αλληλοσυμπιέζονται, αλλά ολισθαίνει (γλιστράει) το ένα ως προς το άλλο. Η τριβή ολίσθησης T που ασκείται σε ένα σώμα που κινείται σε ένα όχι λείο έδαφος, έχει κατεύθυνση αντίθετη της ταχύτητας του σώματος. Το μέτρο της είναι:



$$T = \mu \cdot N$$

Η τριβή εξαρτάται από τη φύση των επιφανειών που τρίβονται και την κάθετη δύναμη N στην επιφάνεια επαφής. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης, μ , εξαρτάται από την φύση των τριβομένων επιφανειών είναι καθαρός αριθμός, δεν έχει διαστάσεις. Η τριβή είναι ανεξάρτητη από το εμβαδόν της επιφάνειας επαφής και της ταχύτητας των σωμάτων (όχι στα λάστιχα).

Έχει αποδειχθεί πειραματικά ότι για τις ίδιες επιφάνειες η οριακή τριβή είναι λίγο μεγαλύτερη από την τριβή ολίσθησης: Δηλαδή $T_{στ,max} > T$, άρα και $\mu_{\sigma} > \mu$.

Συνθήκη μη ολίσθησης: Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να μην ολισθαίνει ένα σώμα ως προς κάποιο άλλο, είναι η τριβή να είναι μικρότερη από τη μέγιστη τιμή της (την οριακή τιμή της).

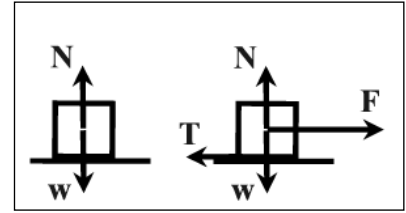
$$T \leq T_{στ,max}$$

Η κάθετη δύναμη, N.

Είναι η συνιστώσα της δύναμης επαφής που είναι κάθετη στην επιφάνεια επαφής των δύο σωμάτων. Όσο τα σώματα βρίσκονται σε επαφή η $N > 0$, ενώ αν χαθεί η επαφή τότε η $N = 0$.

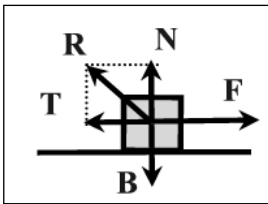
Αν ένα σώμα κινείται ή ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο τότε:

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N - w = 0 \rightarrow N = w \rightarrow N = mg$$

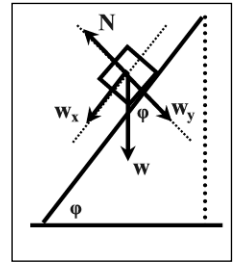


Αν το σώμα κινείται ή ηρεμεί σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης φ , τότε:

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N - w_y = 0 \rightarrow N = w_y \rightarrow N = mg \sin \varphi$$



Όταν ένα σώμα ολισθαίνει σε ένα επίπεδο δέχεται από αυτό δύο δυνάμεις. Μια παράλληλη με το επίπεδο που είναι η τριβή, T και μια κάθετη που είναι η N . Η συνισταμένη των T και N είναι η δύναμη επαφής R , που ασκείται από το επίπεδο στο σώμα με μέτρο

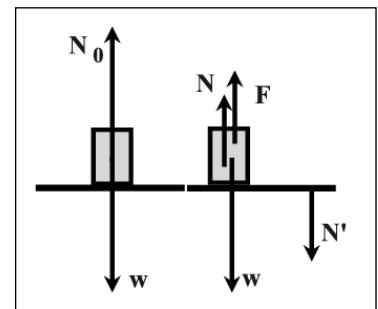


$$R = \sqrt{N^2 + T^2}$$

Πως αλλάζει η δύναμη N: Ασκούμε κατακόρυφη δύναμη $F = w/3$ στο κιβώτιο βάρους, w , αλλά αυτό δεν σηκώνεται από το πάτωμα. Πόση είναι η δύναμη N' που δέχεται το οριζόντιο έδαφος από το κιβώτιο;

Το κιβώτιο έχει βάρος w και για να το σηκώσουμε ασκούμε δύναμη $F = w/3$. Αφού $F < w$ το κιβώτιο δεν ανασηκώνεται. Αυτό φαίνεται και από το γεγονός ότι η κάθετη δύναμη στήριξης από το έδαφος είναι $N > 0$. Διότι, από τη συνθήκη ισορροπίας του κιβωτίου :

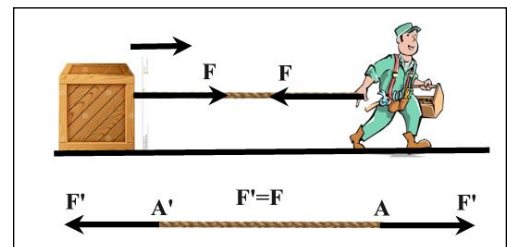
$$F + N - w = 0 \rightarrow \frac{w}{3} + N - w = 0 \rightarrow N = \frac{2w}{3}$$



Η δύναμη N' που ασκεί το κιβώτιο στο έδαφος είναι αντίθετη της δύναμης N που δέχεται το κιβώτιο από το έδαφος, ως δράση και αντίδραση.

Η «τάση» του νήματος: Είναι η δύναμη που τεντώνει το νήμα. Συμβολίζεται συνήθως με F_v . Ασκείται κατά μήκος του αβαρούς νήματος ή σχοινιού και έχει την ίδια τιμή σε όλο του το μήκος.

Στο σχήμα ο μάστορας ασκεί δύναμη F' στο άκρο του σχοινιού, A , προς τα δεξιά και το σχοινί την αντίδραση F στο χέρι του μαστορά προς τα αριστερά. Η τάση του νήματος F' μεταφέρεται αναλλοίωτη κατά μήκος του νήματος στο κιβώτιο, στο σημείο A' ασκείται σε αυτό ως F και το μετακινεί. Επειδή το σχοινί είναι αβαρές και λόγω του τρίτου νόμου $F = F'$. Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε μια βαριά μπάλα που κρέμεται από σταθερό σημείο P του ταβανιού με τη βοήθεια ενός νήματος.



Η μπάλα δέχεται από το νήμα την δύναμη F_v και ασκεί σε αυτό την αντίδραση F_v' . Το νήμα τεντώνεται από την F_v' και ασκεί στο σημείο P τη δύναμη T. Το σταθερό σημείο P ασκεί στο νήμα την αντίδραση T' .

Λόγω ισορροπίας της μπάλας: $F_v = w$.

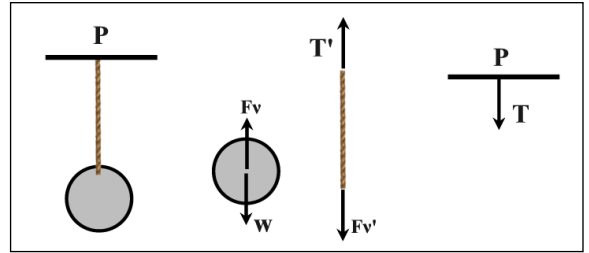
Λόγω δράσης – αντίδρασης, $F_v = F_v'$

Λόγω ισορροπίας του αβαρούς νήματος $T' = F_v'$

Λόγω δράσης – αντίδρασης, $T' = T$.

Άρα η τάση του νήματος είναι: $F_v = w$.

και το σημείο P του ταβανιού δέχεται $T = w$



Η τάση του νήματος στην κίνηση: Το πάτωμα είναι λείο και το σύστημα των δύο κιβωτίων A και B κινείται με σταθερή επιτάχυνση, a , υπό την επίδραση της δύναμης F που ασκείται στο σώμα B. Το νήμα που συνδέει τα δύο κιβώτια είναι συνεχώς τεντωμένο. Τα κιβώτια έχουν μάζες το μεν A ίση με m , το δε B ίση με $3m$. Αναζητούμε την σχέση της F και της τάσης του νήματος.

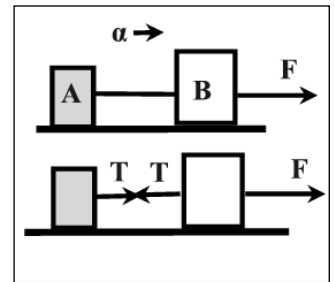
Το σώμα B δέχεται τη δύναμη F και τη δύναμη T του νήματος και επιταχύνεται με επιτάχυνση $\vec{a}$. Το σώμα A δέχεται μόνο τη δύναμη T του νήματος και επιταχύνεται με $\vec{a}$. Από το 2^ο νόμο για κάθε σώμα έχουμε

$$\text{Σώμα B:} \quad F - T = 3m \cdot a \quad (1)$$

$$\text{Σώμα A:} \quad T = ma \quad (2)$$

$$\text{Από (1)+(2)} \rightarrow F = 4m \cdot a \quad (3)$$

$$\text{Άρα } F = 4T$$



Όλες οι δυνάμεις μαζί:

Όταν δουλεύουμε σε ένα σώμα που κινείται ή ισορροπεί σε κεκλιμένο επίπεδο επιλέγουμε ως ορθογώνιο σύστημα αξόνων τον άξονα x που είναι παράλληλος προς το κεκλιμένο και ως y τον κάθετο σε αυτόν. Αναλύουμε το w σε συνιστώσες

$$w_x = w \sin \varphi = mg \sin \varphi \quad \text{και} \quad w_y = w \cos \varphi = mg \cos \varphi$$

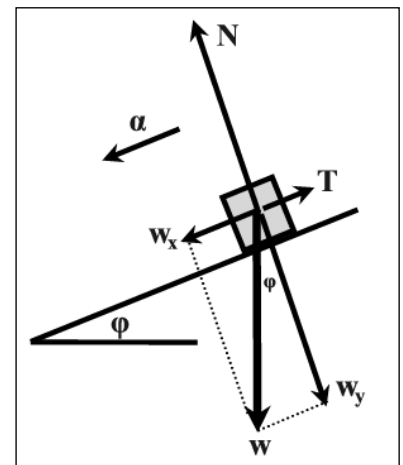
Το σώμα ολισθαίνει επιταχυνόμενο προς τα κάτω και δέχεται εκτός από το βάρος w , τη δύναμη στήριξης N και την τριβή ολίσθησης T. Από τη συνθήκη ισορροπίας στον άξονα y:

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N - w_y = 0 \rightarrow N = mg \cos \varphi \quad (1)$$

$$\text{Η τριβή ολίσθησης είναι: } T = \mu \cdot N = \mu \cdot mg \cos \varphi \quad (2)$$

Από το 2^ο νόμο στον άξονα x:

$$\Sigma F_x = ma \rightarrow w_x - T = ma \rightarrow mg \sin \varphi - T = ma \rightarrow mg \sin \varphi - \mu mg \cos \varphi = ma \rightarrow a = g \sin \varphi - \mu g \cos \varphi$$



3. Έργο, ενέργεια και ισχύς

Έργο δύναμης: Μια δύναμη παράγει έργο όταν μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της κατά τη διεύθυνσή της. Το έργο εκφράζει την ενέργεια που μεταφέρεται από ένα σώμα σε ένα άλλο ή που μετατρέπεται από μια μορφή σε μια άλλη. Κάθε φορά που κάποια δύναμη κάνει έργο συμβαίνει μετατροπή ή μεταφορά ενέργειας ίσης ποσοτικά με το έργο που έγινε.

Έργο σταθερής δύναμης: Είναι μονόμετρο μέγεθος που ισούται με το γινόμενο της επιτόχιας συνιστώσας της δύναμης επί τη μετατόπισή της.

Επιτόχια είναι η συνιστώσα της δύναμης που είναι κατά τη διεύθυνση της κίνησης του σώματος.

$$W = F_x \cdot \Delta x \quad \text{ή} \quad W = F \cdot \Delta x \cdot \cos\theta$$

Μονάδα μέτρησης του έργου είναι το **1Joule** ($1J=1N \cdot m$)

Αν η δύναμη είναι παράλληλη με τη μετατόπιση ($\theta=0^\circ$) και προς την κατεύθυνση της κίνησης τότε:

$$W = F \cdot \Delta x$$

Αν η δύναμη είναι παράλληλη με τη μετατόπιση αλλά αντίθετη προς τη κατεύθυνση της κίνησης ($\theta=180^\circ$) τότε: $W = -F \cdot \Delta x$

Αν $0 \leq \theta < 90^\circ$, $\cos\theta > 0 \rightarrow W > 0$, έργο θετικό ή παραγόμενο. Τότε η δύναμη βοηθάει στην κίνηση του σώματος.

Αν $\theta = 90^\circ$, $\cos\theta = 0 \rightarrow W = 0$, Η δύναμη είναι κάθετη στη μετατόπιση και δεν κάνει έργο. Τέτοιες δυνάμεις είναι η κάθετη αντίδραση N του εδάφους και η κεντρομόλος δύναμη.

Αν $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$, $\cos\theta < 0 \rightarrow W < 0$, έργο αρνητικό ή καταναλισκόμενο. Η δύναμη εμποδίζει την κίνηση του σώματος, π.χ η τριβή ολίσθησης.

Στο διάγραμμα, δύναμης – μετατόπισης, το έργο ισούται με το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης και του άξονα των x .

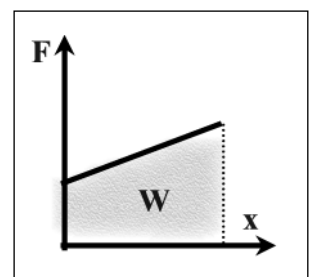
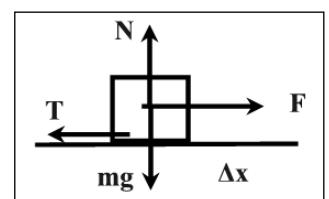
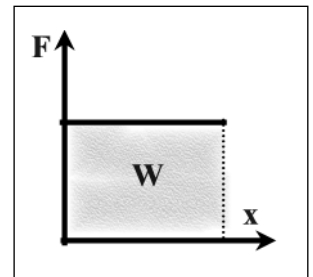
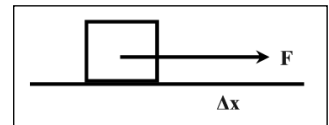
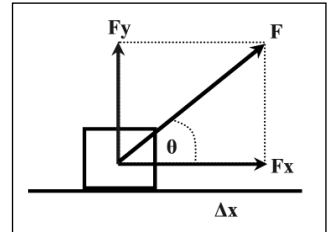
Παράδειγμα

Στο διπλανό σχήμα όλες οι δυνάμεις είναι σταθερές.

$$W_F = F \cdot \Delta x, \quad W_T = -T \cdot \Delta x, \quad W_N = 0 \quad \text{και} \quad W_{mg} = 0$$

Έργο δύναμης της οποίας η αλγεβρική τιμή μεταβάλλεται ως προς τη μετατόπιση:

Στην περίπτωση αυτή το έργο ισούται αλγεβρικά με το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης και του άξονα των x , στο διάγραμμα δύναμης F – μετατόπισης, x (το γραμμοσκιασμένο).

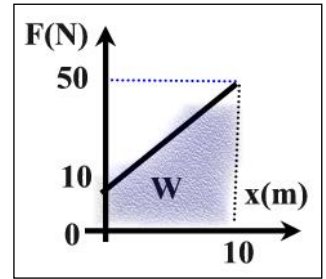


Παράδειγμα: Η δύναμη μεταβάλλεται σε σχέση με τη μετατόπιση σύμφωνα με τη σχέση $F=10+4x$, (SI). Να υπολογίσετε το έργο της από $x=0$ έως $x=10\text{m}$.

Για $x=0$ $F=10+4\cdot 0=10\text{N}$

Για $x=10\text{m}$ $F=10+4\cdot 10=50\text{N}$

$$W = (\text{εμβαδόν τραπεζίου}) = (10 + 50) \cdot \frac{10}{2} = 300\text{J}$$



Το συνολικό έργο: Αν στο σώμα ασκούνται πολλές δυνάμεις, τότε το συνολικό έργο που γίνεται πάνω στο σώμα κατά τη διάρκεια μιας μετατόπισης ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των έργων όλων των δυνάμεων

$$\Sigma W = W_1 + W_2 + \dots + W_n$$

Κινητική ενέργεια: Η ενέργεια που έχει ένα σώμα λόγω της κίνησής του. Ισούται με:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

Μονάδα μέτρησης το 1J. Δεν παίρνει αρνητικές τιμές.

Θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας (ΘΜΚΕ): Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ενός σώματος ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των έργων όλων των δυνάμεων που ασκούνται σε αυτό.

$$\Sigma W = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}}$$

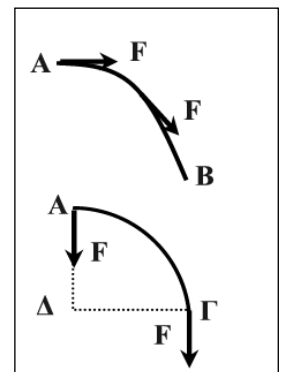
Αν $\Sigma W > 0$ η κινητική ενέργεια αυξάνεται, (επιτάχυνση), ενώ αν $\Sigma W < 0$ η κινητική ενέργεια μειώνεται (επιβράδυνση). Με το ΘΜΚΕ υπολογίζουμε ταχύτητα, μετατόπιση ή το έργο μιας άγνωστης δύναμης αρκεί να μην μας δίνεται χρονική διάρκεια, Δt .

Έργο δύναμης σταθερού μέτρου που εφάπτεται σε καμπύλη τροχιά: Αν AB είναι το μήκος της τροχιάς τότε:

$$W_{AB} = F \cdot (AB)$$

Έργο σταθερής δύναμης που μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της σε καμπύλη τροχιά : Το έργο ισούται με το γινόμενο του μέτρου της δύναμης επί την προβολή $A\Delta$ της καμπύλης $A\Gamma$ στη διεύθυνση της δύναμης.

$$W_{AB} = F \cdot (\text{προβολή της } A\Gamma) = F \cdot (A\Delta)$$



Συντηρητικές (ή διατηρητικές) δυνάμεις: Είναι οι δυνάμεις των οποίων το έργο σε μια κλειστή διαδρομή είναι ίσο με το μηδέν. Ισοδύναμα, είναι οι δυνάμεις των οποίων το έργο εξαρτάται από την αρχική και τελική θέση του σώματος, αλλά **δεν** εξαρτάται από τη διαδρομή από την αρχική στην τελική θέση. Τέτοιες δυνάμεις είναι το βάρος, η άνωση, η δύναμη του ελατηρίου και η δύναμη μεταξύ ηλεκτρικών φορτίων.

Μη συντηρητικές δυνάμεις: Είναι οι δυνάμεις των οποίων το έργο σε μια κλειστή διαδρομή είναι διάφορο του μηδενός. Ισοδύναμα, είναι οι δυνάμεις των οποίων το έργο εξαρτάται από την αρχική και τελική θέση του σώματος, αλλά εξαρτάται και από τη διαδρομή από την αρχική στην τελική θέση. Τέτοιες δυνάμεις είναι η τριβή, η μαγνητική δύναμη, οι ανθρώπινες δυνάμεις και γενικώς όλες οι άλλες εκτός από τις 4 συντηρητικές.

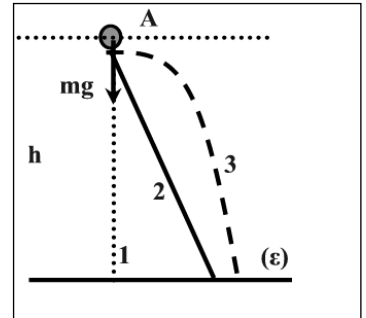
Δυναμική ενέργεια, U: Είναι η μορφή ενέργειας που έχει ένα σώμα ή σύστημα σωμάτων λόγω δράσης σε αυτό συντηρητικών δυνάμεων. Η δυναμική ενέργεια αναφέρεται ουσιαστικά σε σύστημα σωμάτων τα οποία αλληλεπιδρούν με συντηρητικές δυνάμεις.

Η U ενός σώματος ή συστήματος ισούται με το έργο της αντίστοιχης συντηρητικής δύναμης κατά τη μετάβαση από την αρχική κατάσταση ή θέση σε μια άλλη κατάσταση ή θέση που αυθαίρετα έχουμε ορίσει ως κατάσταση ή θέση μηδενικής δυναμικής ενέργειας ($U=0$).

Έργο βάρους: Το έργο του βάρους είναι ανεξάρτητο της διαδρομής του σώματος. Εξαρτάται από το μέτρο του βάρους mg και την υψομετρική διαφορά h μεταξύ της αρχικής και τελικής θέσης του σημείου εφαρμογής του.

•Αν το σώμα κινείται προς τα κάτω, τότε για κατακόρυφη πτώση του σημείου εφαρμογής κατά h το έργο του βάρους είναι:

$$W_w = +mgh$$



•Αν το σώμα κινείται προς τα πάνω τότε για κατακόρυφη άνοδο του σημείου εφαρμογής κατά h το έργο είναι:

$$W_w = -mgh$$

•Αν το σώμα κινείται οριζόντια τότε το έργο του βάρους είναι μηδέν, $W_w = 0$.

•Αν το σώμα χάνει ύψος το έργο του βάρους είναι θετικό ενώ αν κερδίζει ύψος είναι αρνητικό. Αν κινείται οριζόντια το έργο του βάρους είναι μηδενικό αφού το βάρος θα είναι κάθετο στην διαδρομή.

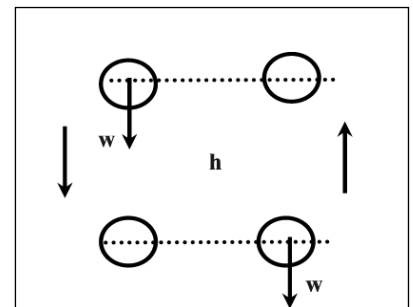
Περιπτώσεις έργου βάρους

Όταν ένα σώμα πέφτει κατά μετατόπιση h το βάρος του κάνει έργο θετικό

$$W_{\text{βαρ}} = w \cdot h = +mg \cdot h$$

Όταν ανεβαίνει το σώμα κατά μετατόπιση h τότε το βάρος του κάνει αρνητικό έργο

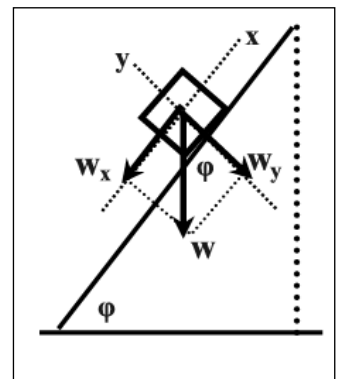
$$W_{\text{βαρ}} = -w \cdot h = -mg \cdot h$$



Όταν το σώμα κινείται σε ένα κεκλιμένο επίπεδο: Από τις δυο συνιστώσες του βάρους έργο κάνει μόνο η w_x που είναι παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο. Άρα αναλύω το w στους άξονες x, y .

Αν το σώμα κατεβαίνει: $W_{\text{βαρ}} = w_x \cdot \Delta x = +mg \cdot \eta \mu \phi \cdot \Delta x$

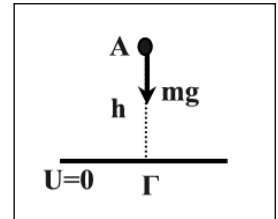
Αν το σώμα ανεβαίνει: $W_{\text{βαρ}} = -w_x \cdot \Delta x = -mg \cdot \eta \mu \phi \cdot \Delta x$



Δυναμική ενέργεια βαρύτητας: Έχει ένα σώμα επειδή έχει βάρος, δηλαδή έλκεται από τη Γη. Συνεπώς η δυναμική ενέργεια αναφέρεται στο σύστημα σώμα – Γη. Όμως επειδή η Γη είναι ακίνητη ως προς το σώμα λόγω της τεράστιας μάζας της, μπορούμε να χρεώνουμε όλη τη δυναμική ενέργεια του συστήματος μόνο στο σώμα.

Η δυναμική ενέργεια του σώματος μάζας m σε ένα σημείο Α που βρίσκεται κοντά στην επιφάνεια της Γης ισούται με το έργο του βάρους mg κατά τη μεταφορά του σώματος από τη θέση Α σε ένα σημείο Γ ενός οριζοντίου επιπέδου που εμείς έχουμε αυθαίρετα ορίσει ως στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας βαρύτητας.

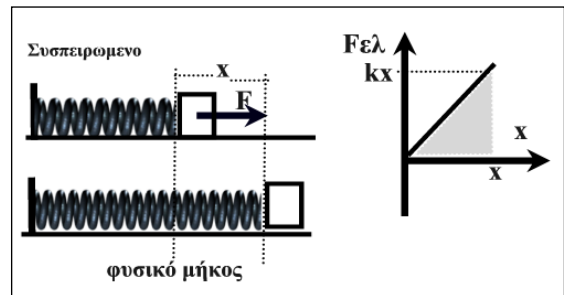
$$U_A = mgh$$



Αν το σημείο Α είναι κάτω από το επίπεδο, $U=0$, τότε το σώμα έχει αρνητική δυναμική ενέργεια.

Δυναμική ενέργεια ελατηρίου: Κάθε ελατήριο σταθεράς k που το μήκος του είναι παραμορφωμένο κατά x (συσπείρωση ή επιμήκυνση) έχει δυναμική ενέργεια ελατηρίου ίση με:

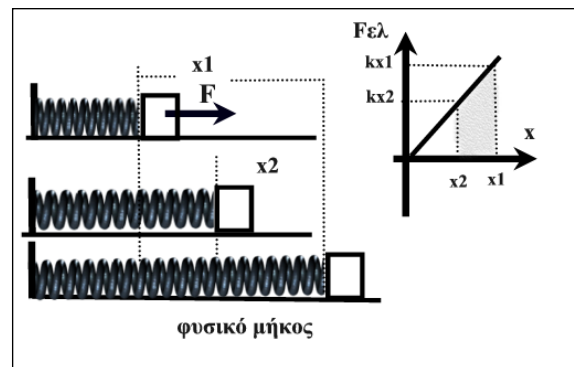
$$U_{ελ} = \frac{1}{2} kx^2$$



Η $U_{ελ}$ παίρνει μόνο θετικές τιμές. Αν $x=0$ δηλαδή το ελατήριο είναι στο φυσικό του μήκος τότε η $U_{ελ} = 0$. Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου ισούται με το έργο που κάνει η $F_{ελ} = k \cdot x$ για να επαναφέρει το ελατήριο στο φυσικό μήκος του δηλαδή σε κατάσταση μηδενικής δυναμικής ενέργειας ελαστικότητας. Και το έργο της $F_{ελ}$ ισούται με το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τριγώνου στη γραφική παράσταση ($F_{ελ}-x$).

Το έργο της $F_{ελ}$ από μια παραμόρφωση x_1 σε μια άλλη x_2 .

Αν το μήκος του ελατηρίου μεταβάλλεται από συσπείρωση x_1 σε συσπείρωση x_2 το έργο που κάνει πάνω η δύναμη του ελατηρίου πάνω στο σώμα μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό ανάλογα με το αν σπρώχνει το σώμα ή το εμποδίζει να κινηθεί. Και πάλι το έργο υπολογίζεται από το εμβαδόν της γραφικής παράστασης. Όπως βλέπουμε στη γραφική παράσταση ισούται με το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τραpezιού ή αλλιώς τη διαφορά των εμβαδών των δύο ορθογωνίων τριγώνων που σχηματίζονται δηλαδή $\frac{1}{2} kx_1^2 - \frac{1}{2} kx_2^2$. Δηλαδή με τη διαφορά των δυναμικών ενεργειών.



Γι αυτό δεν χρειάζεται να κάνουμε γραφική παράσταση. Το έργο της δύναμης τους ελατηρίου θα ισούται με τη διαφορά των δυναμικών ενεργειών κατά την μετάβαση από παραμόρφωση x_1 σε παραμόρφωση x_2 , όποια και αν είναι αυτή, δηλαδή

$$W_{ελ} = U_{ελ, αρχ} - U_{ελ, τελ} = \frac{1}{2} kx_1^2 - \frac{1}{2} kx_2^2$$

Το έργο των συντηρητικών δυνάμεων: Το έργο κάθε συντηρητικής δύναμης σε μια μεταβολή ισούται με τη διαφορά των δυναμικών ενεργειών του σώματος δηλαδή:

$$W_{\text{συν}} = U_{\text{αρχ}} - U_{\text{τελ}} = -\Delta U$$

Μηχανική ενέργεια, E: Είναι το άθροισμα κινητικής και δυναμικής ενέργειας ενός σώματος ή συστήματος σωμάτων.

$$E = K + U$$

Η αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, (ΑΔΜΕ): Η μηχανική ενέργεια διατηρείται σταθερή εφόσον εκτελείται έργο μόνο από τις συντηρητικές δυνάμεις. Δηλαδή οι μη συντηρητικές ή δεν ασκούνται ή ασκούνται αλλά δεν κάνουν έργο.

$$E_{\text{αρχ}} = E_{\text{τελ}} \rightarrow K_{\text{αρχ}} + U_{\text{αρχ}} = K_{\text{τελ}} + U_{\text{τελ}}$$

Θεώρημα μεταβολής της μηχανικής ενέργειας (ΘΜΜΕ): Αν δρουν συντηρητικές αλλά και μη συντηρητικές δυνάμεις που κάνουν έργο, τότε η μηχανική ενέργεια μεταβάλλεται. Το συνολικό έργο των μη συντηρητικών δυνάμεων ισούται με τη μεταβολή της μηχανικής ενέργειας.

$$\Sigma W_{\text{μη συν}} = E_{\text{τελ}} - E_{\text{αρχ}}$$

Ισχύς δύναμης, P: Είναι ο ρυθμός παραγωγής έργου από τη δύναμη:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \rightarrow P = \frac{\pm F_x \cdot \Delta x}{\Delta t} \rightarrow P = \pm F_x \cdot v$$

Όπου v η ταχύτητα και F_x η επιτροχία συνιστώσα της δύναμης, δηλαδή αυτή που είναι εφαπτομένη στην τροχιά του και κάνει έργο.

Μονάδα μέτρησης στο SI είναι το **1Watt** ($1W=1J/s$). Πολλαπλάσια το $1kW=10^3W$, $1MW=10^6W$.

Αν η δύναμη και η ταχύτητα είναι σταθερές τότε η ισχύς είναι σταθερή.

Αν η ταχύτητα ή η δύναμη μεταβάλλονται τότε η σχέση, $P = \pm F_x \cdot v$ δίνει τη στιγμιαία ισχύ σε μια δεδομένη χρονική στιγμή.

Χαρακτηριστικοί ρυθμοί ενέργειας:

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας: $\frac{\Delta K}{\Delta t} = \Sigma F_x \cdot v$

Ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας βαρύτητας: $\frac{\Delta U}{\Delta t} = \pm mg_x \cdot v$

Όταν το σώμα κατεβαίνει η δυναμική ενέργεια μειώνεται και ο ρυθμός είναι αρνητικός.

Όταν ανεβαίνει η δυναμική ενέργεια αυξάνεται και ο ρυθμός είναι θετικός.

Ο ρυθμός παραγωγής θερμότητας λόγω τριβών: $\frac{\Delta |W_T|}{\Delta t} = T \cdot v$

Η απόλυτη τιμή τους έργου της τριβής $|W_T|$ ισούται με τη θερμότητα που εκλύεται λόγω τριβών.

Ο ρυθμός μεταβολής της μηχανικής ενέργειας ισούται με την ισχύ των μη συντηρητικών δυνάμεων

δηλαδή: $\frac{\Delta E}{\Delta t} = \Sigma F_{x, \text{μη συντ.}} \cdot v$

Ισχύς μηχανής: Είναι ο ρυθμός μεταφοράς ενέργειας από ή προς ένα σύστημα (μηχανή). Γενικά η μηχανή είναι μια διάταξη που μετατρέπει μια ποσότητα ενέργειας από μια μορφή σε κάποια ή κάποιες άλλες. Η μέση ισχύς μηχανής είναι το πηλίκο του έργου που παράγει η μηχανή σε κάποιο χρόνο t προς το χρόνο αυτό: $P = \frac{W}{t}$.

Η στιγμιαία ισχύς μηχανής είναι ο ρυθμός μεταφοράς ή μετατροπής ενέργειας: $P = \frac{dW}{dt}$

Συντελεστής απόδοση μηχανής: Είναι το πηλίκο της ωφέλιμης ισχύος (ή ενέργειας) που αποδίδει η μηχανή προς την ισχύ (ή ενέργεια) που δαπανά:

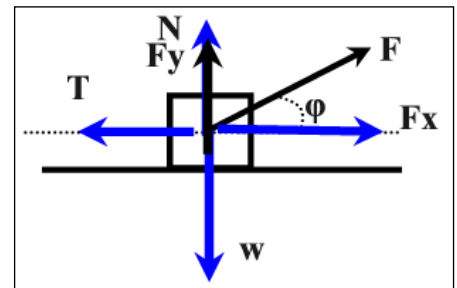
$$e = \frac{P_{\omega\phi}}{P_{\delta\alpha\pi}} < 1 \quad \text{ή} \quad e = \frac{E_{\omega\phi}}{E_{\delta\alpha\pi}} < 1$$

Παραδείγματα

Άσκηση 3.1 Στο κουτί μάζας $m=10\text{kg}$ ασκείται δύναμη $F=100\text{N}$ που σχηματίζει με το οριζόντιο επίπεδο γωνία ϕ . Δίνονται $\eta\mu\phi=0,8$ και $\sigma\eta\mu\phi=0,6$ και $g=10\text{m/s}^2$. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ σώματος και επιπέδου είναι $\mu=0,5$.

A. Να υπολογιστεί η επιτάχυνση a του σώματος

B. Θεωρούμε ότι το σώμα ξεκινάει από την ηρεμία ($v_0=0$) και μετατοπίζεται κατά $\Delta x=10\text{m}$. Να υπολογίσετε τα έργα των δυνάμεων και να βρείτε την τελική ταχύτητα με τη χρήση του ΘΜΚΕ



Λύση

A. Αναλύω τη δύναμη F σε 2 συνιστώσες: $F_x = F \cdot \sigma\eta\mu\phi = 60\text{N}$ και $F_y = F \cdot \eta\mu\phi = 80\text{N}$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N + F_y - w = 0 \rightarrow N = 100\text{N} - 80\text{N} = 20\text{N}$$

$$T = \mu \cdot N = 0,5 \cdot 20 = 10\text{N}$$

$$\Sigma F_x = ma \rightarrow F_x - T = m \cdot a \rightarrow 60 - 10 = 10 \cdot a \rightarrow a = 5\text{m/s}^2$$

B. Τα έργα

$$W_F = W_{F_x} = F_x \cdot \Delta x = 60 \cdot 10 = 600\text{J}$$

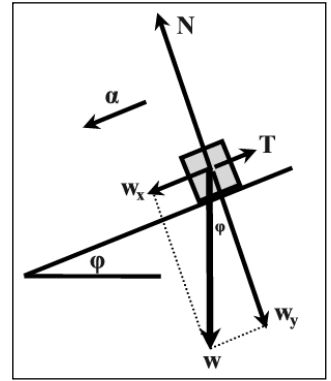
$$W_T = -T \cdot \Delta x = -10 \cdot 10 = -100\text{J}$$

$$\Sigma W = W_F + W_T = 600\text{J} + (-100\text{J}) = 500\text{J}$$

Το ΘΜΚΕ:

$$\Sigma W = \frac{1}{2} m v^2 \rightarrow 500 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot v^2 \rightarrow v^2 = 10 \rightarrow v = 10\text{m/s}$$

Άσκηση 3.2 Το σώμα μάζας m αφήνεται κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης φ με $\eta\mu\varphi=0,8$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi=0,6$ και συντελεστή τριβής $\mu=0,5$. Α.
Α. Να υπολογίσετε την επιτάχυνση α
Β. Να βρείτε με τη χρήση του ΘΜΚΕ την ταχύτητα μετά από μετατόπιση $\Delta x=10\text{m}$.



Λύση

Α. Αναλύω το βάρος w σε δύο συνιστώσες x και y

$$w_x = w \cdot \eta\mu\varphi = mg\eta\mu\varphi$$

$$w_y = w \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = mg\sigma\upsilon\nu\varphi$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N - w_y = 0 \rightarrow N = w_y = mg\sigma\upsilon\nu\varphi$$

$$\text{Η τριβή } T = \mu \cdot N = \mu \cdot mg\sigma\upsilon\nu\varphi$$

$$\Sigma F_x = ma \rightarrow w_x - T = ma \rightarrow mg\eta\mu\varphi - \mu mg\sigma\upsilon\nu\varphi = ma \rightarrow \alpha = g\eta\mu\varphi - \mu g\sigma\upsilon\nu\varphi \rightarrow$$

$$\alpha = 10 \cdot 0,8 - 0,5 \cdot 10 \cdot 0,6 \rightarrow \alpha = 8 - 3 \rightarrow \alpha = 5 \text{m/s}^2$$

Β. Βρίσκω τα έργα των δυνάμεων

$$W_{wx} = mg\eta\mu\varphi \cdot \Delta x$$

$$W_T = -T \cdot \Delta x = -\mu \cdot mg\sigma\upsilon\nu\varphi \cdot \Delta x$$

$$\text{Συνολικό έργο: } \Sigma W = W_{wx} + W_T = mg\eta\mu\varphi \cdot \Delta x - \mu \cdot mg\sigma\upsilon\nu\varphi \cdot \Delta x$$

$$\Sigma W = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} \rightarrow W_{wx} + W_T = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow mg\eta\mu\varphi \cdot \Delta x + (-\mu mg\sigma\upsilon\nu\varphi \cdot \Delta x) = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow$$

$$g\eta\mu\varphi \cdot \Delta x - \mu \cdot g\sigma\upsilon\nu\varphi \cdot \Delta x = \frac{1}{2}v^2 \rightarrow$$

$$v^2 = 2g\Delta x(\eta\mu\varphi - \mu\sigma\upsilon\nu\varphi) \rightarrow v = \sqrt{2g\Delta x(\eta\mu\varphi - \mu\sigma\upsilon\nu\varphi)} \rightarrow v = \sqrt{2g\Delta x(\eta\mu\varphi - \mu\sigma\upsilon\nu\varphi)} \rightarrow$$

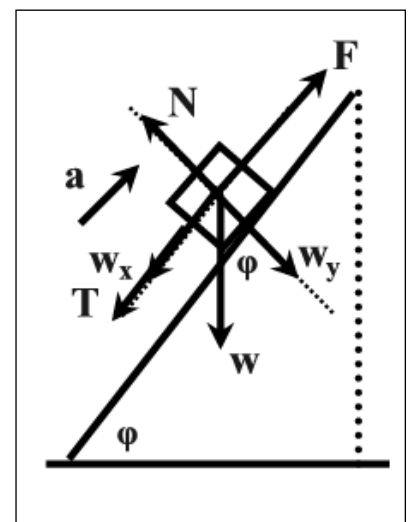
$$v = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 10(0,8 - 0,5 \cdot 0,6)} \rightarrow v = \sqrt{100} \rightarrow v = 10 \text{m/s}$$

Άσκηση 3.3 Το σώμα μάζας $m=10\text{kg}$ ανεβαίνει κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης φ με $\eta\mu\varphi=0,6$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi=0,8$ υπό την επίδραση της δύναμης F που φαίνεται στο σχήμα. Δίνεται το $g=10\text{m/s}^2$.

Α. Αν το επίπεδο είναι λείο και η επιτάχυνση του σώματος είναι $\alpha=2\text{m/s}^2$ πόση πρέπει να είναι η τιμή της δύναμης F ;

Β. Αν το επίπεδο είχε τριβές με συντελεστή τριβής $\mu=0,2$, πόσο θα ήταν τότε η δύναμη F για να ανεβαίνει το σώμα με την ίδια επιτάχυνση, $\alpha=2\text{m/s}^2$

Γ. Το σώμα έχει τριβές με επίπεδο με συντελεστή τριβής $\mu=0,2$. Να εφαρμόσεις το ΘΜΚΕ και να βρεις την ταχύτητα για μετατόπιση $\Delta x=10\text{m}$. Δίνεται ότι η αρχική ταχύτητα είναι $v_0=2\text{m/s}$.



Λύση

Α. Το βάρος είναι $w=mg=10 \cdot 10=100\text{N}$

Αναλύω το βάρος w σε δύο συνιστώσες και τις υπολογίζω

$$w_x = w \sin \varphi = mg \sin \varphi = 100 \cdot 0,6 = 60 \text{ N}$$

$$\text{και } w_y = w \cos \varphi = mg \cos \varphi = 100 \cdot 0,8 = 80 \text{ N}$$

Β. Τη δύναμη N τη βρίσκω από την ισορροπία στον άξονα y

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N - w_y = 0 \rightarrow N = 80 \text{ N}$$

Βρίσκω την τριβή και γράφω 2^ο νόμο:

$$T = \mu \cdot N = 0,2 \cdot 80 = 16 \text{ N}$$

$$\Sigma F_x = ma \rightarrow F - w_x - T = ma \rightarrow F = w_x + ma + T = 60 + 10 \cdot 2 + 16 = 96 \text{ N} \rightarrow F = 96 \text{ N}$$

Γ. Βρίσκω τα έργα των δυνάμεων και το ολικό έργο

$$W_F = F \cdot \Delta x = 96 \cdot 10 = 960 \text{ J}$$

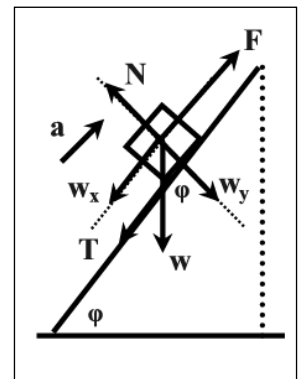
$$W_{w_x} = -w_x \cdot \Delta x = -mg \sin \varphi \cdot \Delta x = -60 \cdot 10 = -600 \text{ J}$$

$$W_T = -T \cdot \Delta x = -16 \cdot 10 = -160 \text{ J}$$

$$\Sigma W = 960 - 600 - 160 = 200 \text{ J}$$

$$\Sigma W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \rightarrow 200 = \frac{1}{2}10 \cdot v^2 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 \rightarrow 200 = 5v^2 - 20 \rightarrow$$

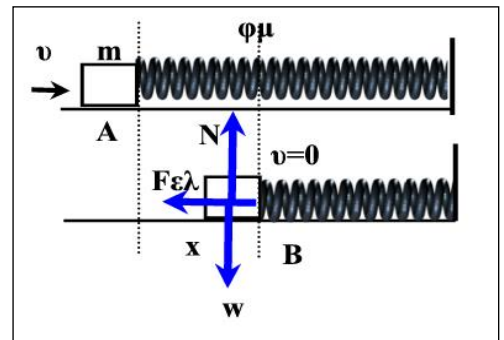
$$v^2 = 220/5 = 44 \rightarrow v = \sqrt{44} \text{ m/s}$$



Άσκηση 3.4 Σώμα μάζας $m=1 \text{ kg}$ πέφτει με ταχύτητα $v=2 \text{ m/s}$ στο ελεύθερο άκρο ελατηρίου σταθεράς $k=100 \text{ N/m}$ που είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο με τον τρόπο που φαίνεται στο σχήμα. Οι τριβές θεωρούνται αμελητέες και το ελατήριο βρίσκεται αρχικά στο φυσικό του μήκος. Να υπολογιστεί η μέγιστη συσπίρωση x του ελατηρίου.

Λύση

Γράφουμε το ΘΜΚΕ για το σώμα από το σημείο Α που ήρθε σε επαφή με το άκρο του ελατηρίου μέχρι το σημείο Β που σταματάει στιγμιαία. Το σώμα στη διαδρομή ΑΒ δέχεται ως μόνη εργώδη (που κάνει έργο) δύναμη αυτήν του ελατηρίου



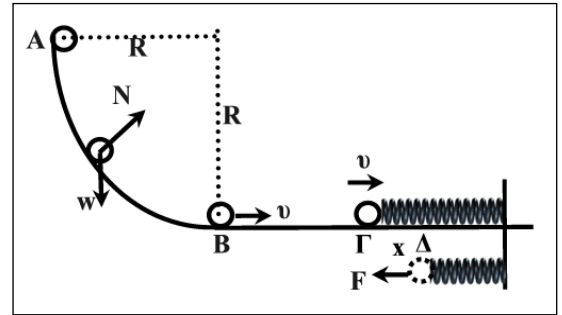
$$\Sigma W = K_B - K_A \rightarrow W_{\text{ελ}} = K_B - K_A \quad (1)$$

$$W_{\text{ελ}} = U_{\text{ελA}} - U_{\text{ελB}} = 0 - \frac{1}{2}kx^2 = -\frac{1}{2}kx^2 \quad (2)$$

$$K_A = \frac{1}{2}mv^2 \quad K_B = 0 \quad (3)$$

$$W_{\text{ελ}} = K_B - K_A \rightarrow -\frac{1}{2}kx^2 = 0 - \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow x^2 = \frac{mv^2}{k} \rightarrow x = v \cdot \sqrt{m/k} \rightarrow x = 0,2 \text{ m}$$

Άσκηση 3.5 Θεωρούμε κατακόρυφο τεταρτοκύκλιο AB, ακτίνας $R=0,8\text{m}$ που εφάπτεται στο κάτω άκρο του B, με οριζόντιο δάπεδο. Σφαιρικό σώμα μάζας $m=1\text{kg}$, αφήνεται χωρίς αρχική ταχύτητα να ολισθήσει κατά μήκος του τεταρτοκυκλίου από το άνω άκρο A.



A. Αν το τεταρτοκύκλιο είναι λείο να υπολογιστεί η ταχύτητα του σώματος όταν περνάει από το σημείο B.

B. Στη συνέχεια το σώμα κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο και συναντά το άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k . Το ελατήριο είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο και βρίσκεται στο φυσικό του μήκος. Συγκρούεται με αυτό χωρίς απώλειες ενέργειας και του προκαλεί μέγιστη συσπίρωση $x=0,2\text{m}$. Να υπολογιστεί η σταθερά k του ελατηρίου.

Αν το τεταρτοκύκλιο AB έχει τριβές, το σώμα φτάνει στο B με ταχύτητα $v_B=3\text{m/s}$.

Γ. Να υπολογιστεί η θερμότητα που παράχθηκε λόγω τριβής κατά την ολίσθηση της σφαίρας στο τεταρτοκύκλιο AB.

Δ. Να υπολογιστεί το ποσοστό της αρχικής ενέργειας του σώματος στο A, που έγινε θερμότητα λόγω των τριβών στο AB.

Ως στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας να θεωρηθεί το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το σημείο B. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Λύση

A. Στη διαδρομή AB έργο κάνει μόνο το βάρος w , αφού η δύναμη στήριξης N είναι συνεχώς κάθετη στο τεταρτοκύκλιο.

$$\text{ΘΜΚΕ } A \rightarrow B: W_w = K_B - K_A \rightarrow mgR = \frac{mv^2}{2} \rightarrow v^2 = 2gR \rightarrow v = \sqrt{2gR} = \sqrt{16}\text{m/s} \rightarrow v = 4\text{m/s}$$

B. Κατά τη διάρκεια της συσπίρωσης, από το Γ στο Δ, η μόνη δύναμη που κάνει έργο πάνω στη σφαίρα είναι η μεταβλητή αλλά και συντηρητική δύναμη του ελατηρίου $F=-kx$. Το έργο της προκύπτει ως διαφορά των δυναμικών ενεργειών του ελατηρίου.

$$W_F = U_\Gamma - U_\Delta = 0 - \frac{1}{2}kx^2 = -\frac{1}{2}kx^2$$

$$\text{ΘΜΚΕ } \Gamma \rightarrow \Delta: W_F = K_\Delta - K_\Gamma \rightarrow \frac{-kx^2}{2} = 0 - \frac{mv^2}{2} \rightarrow k = \frac{mv^2}{x^2} \rightarrow k = 400\text{N/m}$$

Γ. Αν υπάρχουν τριβές στη διαδρομή AB, το ΘΜΚΕ διαμορφώνεται ως εξής:

$$W_w + W_T = K_B - K_A \rightarrow mgR + W_T = \frac{mv_B^2}{2} \rightarrow W_T = \frac{mv_B^2}{2} - mgR \rightarrow W_T = 4,5\text{J} - 8\text{J} \rightarrow W_T = -3,5\text{J}$$

$$\text{Άρα } Q_T = |W_T| = 3,5\text{J}$$

$$\text{Δ. Το ποσοστό της θερμότητας: } \pi\% = \frac{Q_T}{U_A} 100\% = \frac{Q_T}{mgR} \cdot 100\% = \frac{3,5\text{J}}{8\text{J}} \cdot 100\% \rightarrow \pi\% = 43,75\%$$

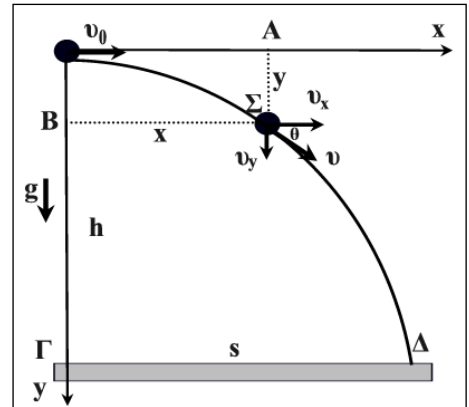
Σημ. Όταν αναφερόμαστε στη δυναμική ενέργεια βαρύτητας πρέπει πάντοτε να γνωρίζουμε τη στάθμη στην οποία θεωρούμε ότι η τιμή είναι μηδενική.

4. Η οριζόντια βολή

Είναι η κίνηση που κάνει ένα σώμα το οποίο βάλλεται με οριζόντια ταχύτητα v_0 από σημείο κοντά στην επιφάνεια της Γης, αν αγνοήσουμε την αντίσταση του αέρα.

Η οριζόντια βολή είναι σύνθετη κίνηση. Το σώμα μετέχει ταυτόχρονα δύο κινήσεων. Η μια είναι ευθύγραμμη και ομαλή με την αρχική ταχύτητα v_0 σε οριζόντια διεύθυνση. Η άλλη είναι ομαλά επιταχυνόμενη με επιτάχυνση g χωρίς αρχική ταχύτητα σε κατακόρυφη διεύθυνση (ελεύθερη πτώση).

Το σώμα θα βρεθεί σε μια θέση Σ μετά από χρόνο t από τη στιγμή που βλήθηκε. Στην ίδια θέση θα βρεθεί αν κάνει πρώτα μια ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με v_0 και βρεθεί στη θέση A μετά από χρόνο t και μετά μια ελεύθερη πτώση επί χρόνο t και βρεθεί τελικά στο Σ . (αρχή ανεξαρτησίας των κινήσεων).



Η μελέτη της οριζόντια βολής:

Για τη μελέτη θεωρούμε ένα ορθογώνιο σύστημα αναφοράς με ένα άξονα Ox οριζόντιο και ένα Oy κατακόρυφο. Ως αρχή O του συστήματος (Ox, Oy) θεωρούμε το σημείο βολής.

Στον άξονα Ox : (ευθύγραμμη ομαλή, $a_x=0$)

$$v_x=v_0, \quad (1) \quad x=v_0 \cdot t \quad (2)$$

Στον άξονα Oy : (ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη με $a_y=g$)

$$v_y=g \cdot t, \quad (3) \quad y=\frac{1}{2}gt^2 \quad (4)$$

Με τη χρήση των 4 εξισώσεων μπορούμε να βρούμε οποιοδήποτε κινηματικό μέγεθος θέλουμε σε οποιοδήποτε σημείο της τροχιάς, αρκεί να γνωρίζουμε, εκτός των v_0 και g , ένα ακόμα μέγεθος, πχ, t , v_y , $\vec{v}$, x , y .

Η ταχύτητα κάθε χρονική στιγμή είναι: $\vec{v}=\vec{v}_x+\vec{v}_y$

$$\text{με μέτρο} \quad v=\sqrt{v_x^2+v_y^2} \quad (5)$$

$$\text{και κατεύθυνση } \theta \quad \varphi\theta=\frac{v_y}{v_x} \quad (6)$$

Η μορφή της καμπύλης που διαγράφει το σώμα στην οριζόντια βολή

Για να το ανακαλύψουμε πρέπει να κατασκευάσουμε την εξίσωση της τροχιάς και να δούμε τη μορφή της. Για αν γίνει αυτό απαλείφουμε το χρόνο t μεταξύ των εξισώσεων $x=v_0t$ και $y=\frac{1}{2}gt^2$.

$$\text{Άρα } t=\frac{x}{v_0} \quad \text{και} \quad y=\frac{1}{2}gt^2=\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 \rightarrow y=\frac{g}{2v_0^2}x^2$$

Η σχέση αυτή είναι δευτέρου βαθμού ως προς x και συνεπώς παριστά **παραβολή** ($y=\lambda x^2$).

Βασικά προβλήματα οριζόντιας βολής

Το σώμα βάλλεται οριζόντια με αρχική ταχύτητα v_0 από ύψος h πάνω από το οριζόντιο έδαφος. Προσγειώνεται στο σημείο Δ μετά από χρόνο t και σε οριζόντια απόσταση s (βεληνεκές) με ταχύτητα v . Να υπολογιστούν τα t , s , $\vec{v}$. Δίνεται το g .

Στο σημείο προσεδάφισης Δ έχει $y=h$. Άρα από: $y = \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow h = \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Το βεληνεκές s είναι η οριζόντια απόσταση του ίχνους Γ της καθέτου από το σημείο O προς το έδαφος και του σημείου προσεδάφισης, Δ . Δηλαδή $s=x_\Delta = (\Gamma\Delta)$

Από $x=v_0t \rightarrow s=v_0t \rightarrow s=v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$

Στο Δ το σώμα έχει δύο ταχύτητες με μέτρα: $v_x=v_0$ και $v_y=gt$

Η ολική ταχύτητα στο Δ έχει μέτρο: $v_\Delta = \sqrt{v_{x,\Delta}^2 + v_{y,\Delta}^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2} \rightarrow v_\Delta = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$

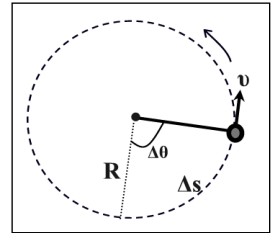
Η ταχύτητα $\vec{v}$ σχηματίζει γωνία θ με το έδαφος: $\epsilon\phi\theta = \frac{v_{y,\Delta}}{v_{x,\Delta}} \rightarrow \epsilon\phi\theta = \frac{gt}{v_0}$

Προσοχή:

1. Ο χρόνος, $t=\sqrt{2h/g}$, που χρειάζεται για να φτάσει το σώμα στο έδαφος δεν εξαρτάται από την αρχική ταχύτητα v_0 . Εξαρτάται από το g και το ύψος βολής h .
2. Το βεληνεκές είναι ανάλογο του χρόνου βολής t και της αρχικής ταχύτητας, v_0 . Άρα επηρεάζεται και από το ύψος, h .
3. Το μέτρο της ταχύτητας προσεδάφισης μπορεί να υπολογιστεί και από την ΑΔΜΕ: $E_{αρχ}=E_{τελ} \rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = \frac{1}{2}mv^2$.
4. Σε κάθε οριζόντια βολή γράφε όλες τις εξισώσεις (6) και ψάχνε να βρεις πρώτα το χρόνο t πτώσης. Τα δεδομένα σου δείχνουν σε ποια εξίσωση να πας πρώτα. Μετά όλα είναι εύκολα.

5. Ομαλή κυκλική κίνηση

Τι ονομάζεται ομαλή κυκλική κίνηση: Η κίνηση σε κυκλική τροχιά της οποίας το μέτρο της ταχύτητας διατηρείται σταθερό.



Η περίοδος, T στην ομαλή κυκλική κίνηση: Είναι το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να κάνει το κινητό μια πλήρη περιφορά.

Μονάδα μέτρησης της περιόδου στο SI είναι το 1s.

Παράδειγμα. Η περίοδος του ωροδείκτη του ρολογιού είναι 12h. Του λεπτοδείκτη είναι 1h=60min και του δευτερολεπτοδείκτη 1min=60s.

Η συχνότητα, f στην ομαλή κυκλική κίνηση: Είναι το πηλίκο του αριθμού, N, των περιφορών που κάνει το κινητό σε χρονικό διάστημα Δt προς το χρονικό διάστημα Δt.

$$f = \frac{N}{\Delta t}$$

Μονάδα μέτρησης συχνότητας στο SI είναι το 1Hz=1κύκλος/s (Hz=Χερτζ). Από τη σχέση αυτήν υπολογίζουμε και τον αριθμό των περιστροφών N που κάνει ένα κινητό σε χρόνο Δt.

Παράδειγμα: Πόση είναι η συχνότητα και η περίοδος ενός κινητού που διαγράφει 100 περιστροφές σε 20s;

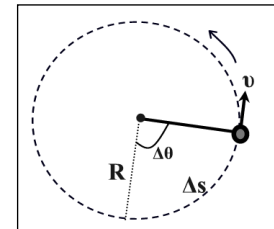
$$f = \frac{N}{\Delta t} = \frac{100}{20} = 5\text{Hz}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{5} = 0,2\text{s}$$

Η σχέση συχνότητας και περιόδου: Αν υποθέσουμε ότι το κινητό κάνει μια περιφορά, δηλαδή N=1 τότε το χρονικό διάστημα είναι για περίοδο δηλ. Δt=T οπότε

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{ή} \quad T = \frac{1}{f}$$

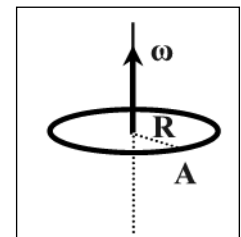
Η γραμμική ταχύτητα, v: Είναι η ταχύτητα που είναι εφαπτομένη στην τροχιά και ορίζεται σαν το πηλίκο του μήκους του τόξου Δs που διαγράφει σε χρόνο Δt προς το χρόνο αυτό. Ο κύκλος έχει μήκος 2πR και το κινητό τον κάνει σε χρόνο Δt=T. Άρα;



$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \rightarrow v = \frac{2\pi R}{T} \quad \text{ή} \quad v = 2\pi f \cdot R$$

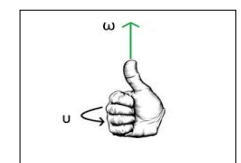
Μονάδα γραμμικής ταχύτητας στο (SI) είναι το 1m/s.

Η γωνιακή ταχύτητα, ω: Είναι διανυσματικό μέγεθος με σημείο εφαρμογής το κέντρο της τροχιάς, κατεύθυνση που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού και μέτρο που ισούται με το πηλίκο της γωνίας του τόξου, Δθ, που διαγράφει σε χρόνο Δt προς το χρόνο αυτό. Ο κύκλος έχει γωνία Δθ=2π rad και το κινητό τον κάνει σε χρόνο Δt=T. Άρα:



$$\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{ή} \quad \omega = 2\pi f$$

Το $\vec{\omega}$ είναι πάντοτε κάθετο στο επίπεδο της τροχιάς και η φορά του καθορίζεται από τον κανόνα δεξιού χεριού. Μονάδα γωνιακής ταχύτητας στο (SI) το 1rad/s.



Η σχέση γωνιακής και γραμμικής ταχύτητας: Η γεωμετρική σχέση επίκεντρης γωνίας $\Delta\theta$ και μήκους τόξου, Δs σε ένα κύκλο είναι $\Delta s = R \cdot \Delta\theta$, όπου R η ακτίνα του κύκλου. Αν $\Delta s = R$ τότε $\Delta\theta = 1 \text{ rad}$.

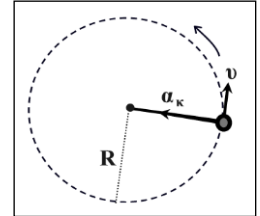
$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{R \Delta\theta}{\Delta t} = \omega \cdot R \rightarrow \boxed{v = \omega R}$$

Η κεντρομόλος επιτάχυνση a_k : Οφείλεται στην αδιάκοπη μεταβολή της διεύθυνσης της γραμμικής ταχύτητας και όχι στη μεταβολή του μέτρου, που είναι μηδέν στην ομαλή κυκλική κίνηση. Έχει κατεύθυνση προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς και μέτρο, a_k :

$$a_k = \frac{v^2}{R} \quad \text{ή} \quad a_k = \omega^2 R$$

Απόδειξη:

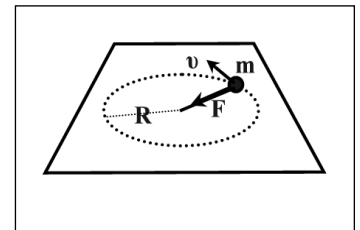
$$a_k = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R$$



Η κεντρομόλος δύναμη:

Είναι η δύναμη που αναγκάζει το σώμα να κάνει κυκλική κίνηση. Ισούται με τη συνισταμένη όλων των δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα και έχουν ακτινική κατεύθυνση. Έχει σημείο εφαρμογής το σώμα, κατεύθυνση προς το κέντρο του κύκλου και μέτρο:

$$F_k = m \cdot a_k = m \cdot \frac{v^2}{R} \quad \text{ή} \quad F_k = m \omega^2 R$$



Παράδειγμα 1: Στην περίπτωση που ένα μπαλάκι μάζας m διαγράφει έναν οριζόντιο κύκλο δεμένο από την άκρη του νήματος η κεντρομόλος δύναμη ταυτίζεται με την τάση του νήματος F_v . Φυσικά έχει κατεύθυνση προς το κέντρο του κύκλου όπως φαίνεται στο σχήμα. $F_k = F_v = mv^2/R$

Παράδειγμα 2: Το σώμα μάζας m κάνει ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας R με σταθερή κατά μέτρο ταχύτητα, v σε κατακόρυφο επίπεδο, δεμένο στο άκρο νήματος μήκους R . Σε κάθε σημείο της κυκλικής τροχιάς το σώμα δέχεται την τάση του νήματος T και το βάρος του $w = mg$. Η κεντρομόλος δύναμη ισούται με τη συνισταμένη στην κατεύθυνση της ακτίνας της τροχιάς και είναι $F_k = \Sigma F = mv^2/R$

► Στο σημείο Α η κεντρομόλος δύναμη ισούται με:

$$\Sigma F_A = m \frac{v^2}{R} \rightarrow T_A - w \rightarrow m \frac{v^2}{R} \rightarrow T_A = mg + m \frac{v^2}{R} \quad (1)$$

► Στο σημείο Β η κεντρομόλος δύναμη ισούται με:

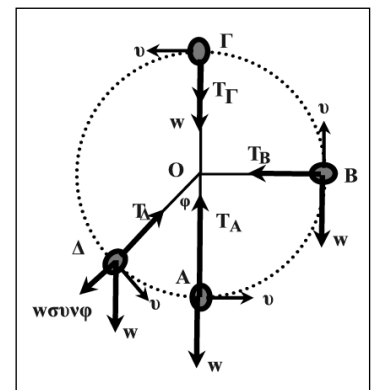
$$\Sigma F_B = m \frac{v^2}{R} \rightarrow T_B = m \frac{v^2}{R} \quad (2)$$

► Στο σημείο Γ η κεντρομόλος δύναμη ισούται με:

$$\Sigma F_\Gamma = m \frac{v^2}{R} \rightarrow T_\Gamma + w = m \frac{v^2}{R} \rightarrow T_\Gamma = m \frac{v^2}{R} - mg \quad (3)$$

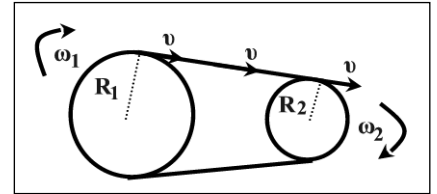
► Στο σημείο Δ η κεντρομόλος δύναμη ισούται με:

$$\Sigma F_\Delta = m \frac{v^2}{R} \rightarrow T_\Delta - w_x = m \frac{v^2}{R} \rightarrow T_\Delta = m \frac{v^2}{R} + mg \sin \varphi \quad (4)$$



Σύστημα τροχών με ιμάντα:

Το σύστημα των δύο τροχών με ακτίνες R_1 και R_2 που συνδέονται με ιμάντα και περιστρέφονται μαζί βρίσκει εφαρμογή σε πολλές μηχανικές διατάξεις όπως στο πεντάλ του ποδηλάτου. Επειδή όλα τα σημεία του ιμάντα πρέπει να έχουν την ίδια γραμμική ταχύτητα, άρα και τα περιφερειακά σημεία των δύο τροχών που εφάπτονται σε αυτόν έχουν την ίδια ταχύτητα, $v_1=v_2=v$. Αν οι τροχοί περιφέρονται με γωνιακές ταχύτητες ω_1 και ω_2 ισχύουν:

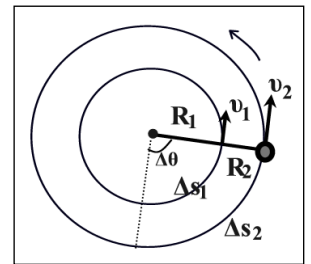


$$v_1=v_2 \rightarrow \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2 \rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

Συμπέρασμα: Ο τροχός με τη μικρότερη ακτίνα περιστρέφεται πιο γρήγορα.

Ομοκεντρικό σύστημα:

Ένας τροχός περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος σ' αυτόν. Όλα τα σημεία του τροχού έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα $\omega = \Delta\theta / \Delta t$, αφού στο ίδιο χρονικό διάστημα Δt όλα τα σημεία του τροχού διαγράφουν τόξο ίδιας γωνίας $\Delta\theta$. Συνεπώς έχουν και την ίδια συχνότητα, f , ($\omega = 2\pi f$) και την ίδια περίοδο T , ($T = 1/f$). Συνεπώς τα γωνιακά μεγέθη όλων των σημείων είναι κοινά. Τα σημεία όμως με διαφορετική ακτίνα περιστροφής R έχουν διαφορετικές γραμμικές ταχύτητες αφού $v = \omega R$, και διαφορετικές κεντρομόλους επιταχύνσεις αφού, $a = \omega^2 \cdot R$.



$$\omega_1 = \omega_2 \rightarrow \frac{v_1}{R_1} = \frac{v_2}{R_2} \rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\omega^2 R_1}{\omega^2 R_2} \rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

Φυσικά, τα σημεία με μεγαλύτερη ακτίνα διαγράφουν και μεγαλύτερο μήκος τόξου αφού έχουν μεγαλύτερη ταχύτητα: $\Delta s = v \cdot \Delta t$.

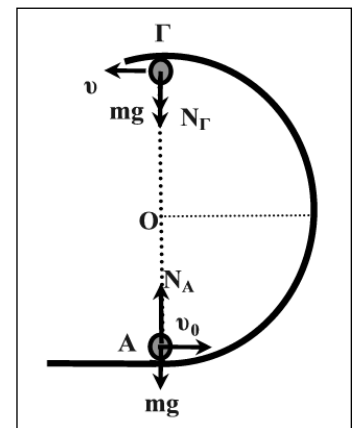
Άσκηση 5.1 Σώμα μάζας $m=0,2\text{kg}$ βάλλεται από το σημείο Α στο εσωτερικό ενός μεταλλικού οδηγού (λούκι) στον οποίο μπορεί να κινείται χωρίς τριβές. Ο οδηγός έχει ακτίνα $R=OA=2\text{m}$.

Α. Πόση είναι η ελάχιστη ταχύτητα που πρέπει να έχει στο σημείο Γ ώστε να κάνει **ανακύκλωση**, δηλαδή να μην χάνει την επαφή της με τον οδηγό.

Β. Πόση είναι η ελάχιστη ταχύτητα v_0 με την οποία πρέπει να βάλουμε το σώμα μάζας m από το σημείο Α ώστε να κάνει ανακύκλωση.

Γ. Αν η ταχύτητα στο Α είναι η ελάχιστη v_0 του ερωτήματος (Α), πόση είναι η δύναμη που δέχεται το σώμα από τον οδηγό στο σημείο Α;

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$



Λύση

Α. Γράφω τον τύπο της κεντρομόλου δύναμης στο Γ:

$$\Sigma F_R = F_{\kappa\epsilon\nu} \rightarrow N_\Gamma + mg = \frac{mv^2}{R} \rightarrow N_\Gamma = \frac{mv^2}{R} - mg \quad (1)$$

Για να μη χάνεται η επαφή πρέπει στο Γ η κάθετη δύναμη N_Γ που ασκεί ο οδηγός στο σώμα να είναι $N_\Gamma \geq 0$ (2)

$$\text{Από (1)(2)} \rightarrow \frac{mv^2}{R} - mg \geq 0 \rightarrow v^2 \geq Rg \rightarrow v \geq \sqrt{Rg} \rightarrow v \geq \sqrt{20} \text{ m/s} \rightarrow v_{\min} = \sqrt{20} \text{ m/s}$$

Β. Γράφω ΘΜΚΕ από το Α στο Γ για να βρω την ελάχιστη ταχύτητα βολής v_0 .

$$W_\beta = K_\Gamma - K_A \quad (3) \quad K_A = \frac{1}{2}mv_0^2, \quad K_\Gamma = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{και} \quad W_\beta = -mg \cdot 2R \quad (4)$$

$$(3)(4) \rightarrow -mg2R = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \rightarrow -2 \cdot 2gR = v^2 - v_0^2 \rightarrow v_0^2 = v^2 + 4gR \rightarrow v_0 = \sqrt{v^2 + 4gR} \rightarrow v_{0,\min} = 10 \text{ m/s}$$

Γ. Γράφω τον τύπο της κεντρομόλου δύναμης στο σημείο Α

$$\Sigma F_R = F_{\kappa\epsilon\nu} \rightarrow N_A - mg = \frac{mv_0^2}{R} \rightarrow N_A = mg + \frac{mv_0^2}{R} \rightarrow N_A = 12 \text{ N}$$

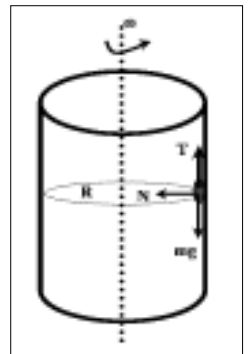
Άσκηση 5.2 Κατακόρυφος κύλινδρος ακτίνας $R=1\text{m}$ περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του yy' ώστε μια σταγόνα λαδιού που εφάπτεται πάνω στο κυλινδρικό τοίχωμα αυτού να κρατιέται πάνω σ' αυτό, χωρίς να γλιστράει προς τα κάτω. Μεταξύ σταγόνας και επιφανείας του κυλίνδρου ο συντελεστής μέγιστης στατικής τριβής είναι $\mu_s=0,4$. Δίνεται το $g=10\text{m/s}^2$.

Η ελάχιστη συχνότητα περιστροφής, ώστε η σταγόνα να μη γλιστράει από το τοίχωμα είναι;

α. $f_{\min}=0,25\pi \text{ Hz}$

β. $f_{\min}=\pi \text{ Hz}$

γ. $f_{\min}=0,4\pi \text{ Hz}$



Λύση :

Η σταγόνα δέχεται τρεις δυνάμεις το βάρος της mg , τη στατική τριβή $T_{\sigma\tau}$ από το τοίχωμα και την κάθετη αντίδραση N του τοιχώματος. Επειδή το επίπεδο περιστροφής της είναι οριζόντιο δηλαδή κάθετο στον κατακόρυφο άξονα περιστροφής yy' και η N είναι η μοναδική δύναμη πάνω στην ακτινική διεύθυνση θα παίζει το ρόλο της κεντρομόλου.

$$\Sigma F_R = ma_k \rightarrow N = m\omega^2 R \rightarrow N = m4\pi^2 f^2 R \quad (1)$$

Αφού η σταγόνα δεν ολισθαίνει η τριβή δεν υπερβαίνει τη μέγιστη τιμή της στατικής δηλαδή είναι $T \leq T_{\sigma\tau} \rightarrow T \leq \mu_s N$ (2)

Η σταγόνα ισορροπεί οπότε στον άξονα y ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow T - mg = 0 \rightarrow T = mg \xrightarrow{(2)} mg \leq \mu_s N \xrightarrow{(1)} mg \leq \mu_s \cdot m4\pi^2 f^2 R \rightarrow f^2 \geq \frac{g}{4\pi^2 \mu_s R} \rightarrow f \geq \sqrt{\frac{g}{4\pi^2 \mu_s R}}$$

$$\rightarrow f \geq 0,25\pi \text{ Hz} \rightarrow f_{\min} = 0,25\pi \text{ Hz}$$

Αρα σωστό είναι το (α)

6. Ορμή και κρούσεις

Η ορμή υλικού σημείου: Είναι ένα διανυσματικό μέγεθος που ισούται με

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

όπου m η μάζα του υλικού σημείου και $\vec{v}$ η ταχύτητα. Μονάδα μέτρησης στο SI είναι το **1kg·m/s**. Η ορμή έχει την ίδια κατεύθυνση με την ταχύτητα και μετριέται ως προς το ίδιο σύστημα αναφοράς που μετριέται και η ταχύτητα.

Ο 2^{ος} νόμος του Newton για υλικό σημείο :

Να δούμε πως και γιατί εισάγεται η έννοια της ορμής στη Φυσική. Ο 2^{ος} νόμος του Newton που συνδέει δύναμη και επιτάχυνση μπορεί να γραφεί διαφορετικά με το μέγεθος της ορμής

Ας γράψουμε τον δεύτερο νόμο του Newton για ένα σώμα που κάνει μεταφορική κίνηση (υλικό σημείο) τότε

$$\Sigma \vec{F} = m \vec{a} = m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = m \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}{\Delta t} \rightarrow \boxed{\Sigma \vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}}$$

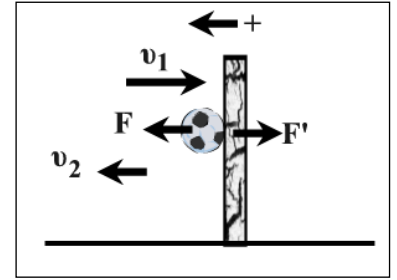
Η συνισταμένη δύναμη $\Sigma \vec{F}$ που ασκείται σε ένα υλικό σημείο ισούται με το ρυθμό μεταβολής της ορμής του $\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$. Αν είναι $\Sigma \vec{F} = 0$, τότε $\Delta \vec{p} = 0 \rightarrow \vec{p} = \text{σταθερό}$, Δηλαδή αν η συνισταμένη δύναμη είναι μηδέν προφανώς η ορμή και η ταχύτητα μένουν σταθερές, δηλαδή το σώμα κάνει ΕΟΚ.

Η νέα διατύπωση του 2^{ου} νόμου είναι γενικότερη αφού ισχύει και για σώματα ή συστήματα σωμάτων των οποίων η μάζα μεταβάλλεται ενώ στην διατύπωση $\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$ πρέπει η μάζα να είναι σταθερή. Εμείς θα την χρησιμοποιήσουμε μόνο σε σώματα σταθερής μάζας για να λύσουμε κάποια ειδικά προβλήματα, όπως των συγκρούσεων. Η σχέση $\Sigma \vec{F} = \Delta \vec{p} / \Delta t$ εξηγεί ότι όταν η ορμή ενός σώματος μεταβάλλεται με γρήγορο ρυθμό τότε η δύναμη που ασκεί αλλά και δέχεται (δράση –αντίδραση) είναι μεγάλη.

Παραδείγματα:

- α) Όσο πιο απότομο είναι ένα χτύπημα καράτε τόσο μεγαλύτερη και η δύναμη που ασκεί.
- β) Όταν πέσουμε από ψηλά και συγκρουστούμε με το ακλόνητο έδαφος δεχόμαστε μεγάλη δύναμη από αυτό και τραυματιζόμαστε επειδή η κρούση με το έδαφος διαρκεί πολύ λίγο. Αν όμως πέσουμε από το ίδιο ύψος σε ένα μαλακό στρώμα τότε μεγαλώνει ο χρόνος κρούσης, δηλαδή το χρονικό διάστημα από τη στιγμή που θα ακουμπήσουμε στο στρώμα μέχρι να σταματήσουμε, και η δύναμη που νιώθουμε είναι μικρότερη.
- γ) Αν μας χτυπήσει ένα μαλακό μπαλάκι του τένις με ορμή p ο χρόνος επαφής είναι μεγάλος και η δύναμη άρα και ο πόνος που νιώθουμε είναι μικρός. Αν όμως μας χτυπήσει ένα σκληρό μπαλάκι ίδιας ορμής $p = mv$, επειδή ο χρόνος επαφής είναι πολύ μικρότερος η δύναμη και ο πόνος είναι μεγαλύτερα. Το μαλακό μπαλάκι συμπιέζεται και παραμορφώνεται άρα η επαφή διαρκεί περισσότερο. Το σκληρό δεν παραμορφώνεται αισθητά και η επαφή διαρκεί λιγότερο.
- δ) Τον ίδιο ρόλο παίζει και ο αερόσακος στο αυτοκίνητο. Σε περίπτωση σύγκρουσης είναι καλύτερο για μας να χτυπήσουμε στον μαλακό αερόσακο που συμπιέζεται και όχι στο ακλόνητο και σκληρό παρμπρίζ.

Παράδειγμα 1: Η μπάλα μάζας $m=0,6\text{kg}$ συγκρούεται κάθετα με τον κατακόρυφο τοίχο με ταχύτητα $v_1=20\text{m/s}$ και ανακλάται κάθετα με ταχύτητα μέτρου $v_2=10\text{m/s}$. Ο χρόνος επαφής μπάλας τοίχου είναι $\Delta t=0,1\text{s}$. Να υπολογιστεί η μέση δύναμη που δέχεται η μπάλα από τον τοίχο.



Λύση

Με θετική φορά προς τα αριστερά η μεταβολή της ορμής της μπάλας είναι

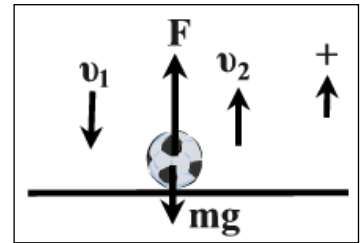
$$\Delta p = p_2 - p_1 = mv_2 - (-mv_1) = mv_2 + mv_1 = m(v_2 + v_1) = 0,6 \cdot 30 = 18 \text{ kgm/s}$$

Η δύναμη που δέχεται η μπάλα από τον τοίχο κατά τη διάρκεια της κρούσης είναι

$$F = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{18 \text{ kgm/s}}{0,1 \text{ s}} = 180 \text{ kgm/s}^2 = 180 \text{ N}$$

Η δύναμη που δέχεται ο τοίχος από τη μπάλα είναι η αντίδραση της F , δηλαδή η $F' = -F = -180 \text{ N}$

Παράδειγμα 2 Η μπάλα μάζας m που πέφτει κατακόρυφα συναντάει το ακλόνητο οριζόντιο έδαφος με ταχύτητα μέτρου $v_1=v$ και ανακλάται κατακόρυφα με ταχύτητα ίσου μέτρου, $v_2=v$. Το μέτρο της μέσης δύναμης που δέχτηκε η μπάλα από το έδαφος κατά τη διάρκεια, Δt , της κρούσης είναι



α. $F = mg - \frac{2mv}{\Delta t}$

β. $F = \frac{2mv}{\Delta t}$

γ. $F = mg + \frac{2mv}{\Delta t}$

Λύση

Γενικώς, η μπάλα πέφτει στο πάτωμα με ταχύτητα v_1 και ανακλάται με v_2 . Με θετική τη φορά της επιστροφής, η ορμή πριν την κρούση έχει αλγεβρική τιμή $p_1 = -mv_1$ και μετά από αυτήν $p_2 = mv_2$

$$\Delta p = p_2 - p_1 \rightarrow \Delta p = mv_2 - (-mv_1) = m(v_2 + v_1) = 2mv$$

Κατά τη διάρκεια της κρούσης η μπάλα δέχεται το βάρος της mg και τη δύναμη F από το πάτωμα. Το μέτρο της μέσης δύναμης που δέχτηκε η μπάλα κατά τη διάρκεια της κρούσης Δt , είναι

$$\Sigma F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \rightarrow F - mg = \frac{2mv}{\Delta t} \rightarrow F = mg + \frac{2mv}{\Delta t} \quad \text{Σωστό είναι το (γ).}$$

Το δάπεδο δέχεται την αντίδραση αυτής της δύναμης $F' = -F$.

► Αν η μπάλα πέσει και κολλήσει και δεν ανακλαστεί οπότε $v_2=0$ τότε η μεταβολή της ορμής θα είναι $\Delta p = mv_2 - 0 = mv$ και αν υποθέσουμε ότι ο χρόνος κρούσης, Δt είναι ο ίδιος, η δύναμη που θα δεχτεί θα είναι η $F_1 = mg + (mv/\Delta t) \rightarrow F_1 < F$.

► **Παράδειγμα 3** Υλικό σημείο κάνει κυκλική κίνηση. Σε χρόνο Δt μετατοπίζεται από τη θέση Α στη θέση Β διαγράφοντας τόξο 90° και το μέτρο της ορμής του μεταβάλλεται από $|p_1|=p$, σε $|p_2|=2p$ λόγω δράσης κάποιας δύναμης.

3.1 Πόση είναι η μεταβολή του μέτρου της ορμής

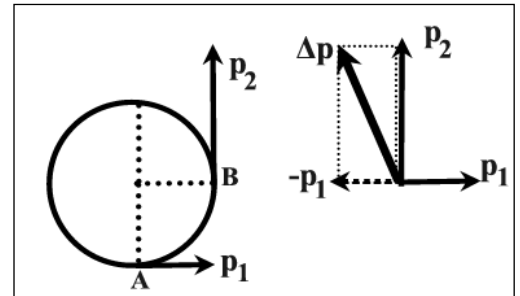
$$\Delta|p| = |p_2| - |p_1| = 2p - p \rightarrow \Delta|p| = p$$

3.2 Πόσο είναι το μέτρο μεταβολής της ορμής

Η μεταβολή της ορμής: $\Delta \vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \vec{p}_2 + (-\vec{p}_1)$

Δηλαδή συνθέτουμε τα διανύσματα $\vec{p}_2$ και $-\vec{p}_1$. Αυτό φαίνεται και στο σχήμα. Η συνισταμένη δίνει το διάνυσμα $\Delta \vec{p}$, δηλαδή τη μεταβολή της ορμής, που έχει μέτρο:

$$|\Delta p| = \sqrt{(-p_1)^2 + |p_2|^2} = \sqrt{p^2 + 4p^2} = p\sqrt{5}$$



Η ορμή συστήματος υλικών σημείων (σωμάτων): Στη Φυσική όταν έχουμε πολλά σώματα που αλληλεπιδρούν με κάποιο τρόπο μεταξύ τους (πχ σφαίρες που συγκρούονται) ορίζουμε την ορμή του συστήματος των σωμάτων. Αν έχουμε ένα σύστημα υλικών σημείων με ορμές $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots$ τότε η συνολική ορμή του συστήματος είναι το διανυσματικό άθροισμα αυτών, δηλ.

$$\vec{p}_{ολ} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots$$

Αν δύο υλικά σημεία κινούνται στην ίδια θετική κατεύθυνση όπως στο Σχ.1 τότε η αλγεβρική τιμή της ορμής του συστήματος είναι:

$$p_{ολ} = p_1 + p_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2.$$

Η κατεύθυνση του $p_{ολ}$ είναι θετική.

Αν δύο υλικά σημεία κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις όπως στο Σχ.2, τότε η αλγεβρική τιμή της ορμής του συστήματος είναι:

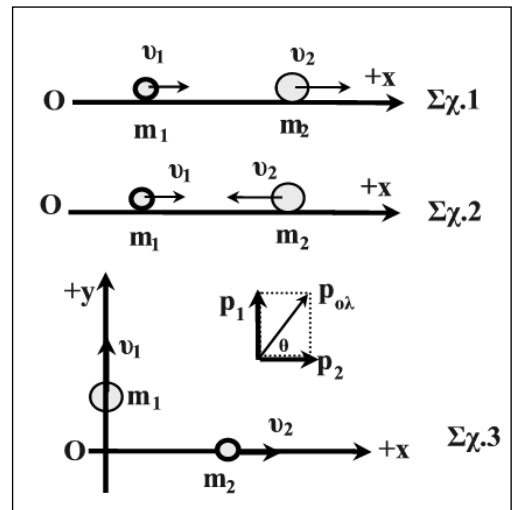
$$p_{ολ} = p_1 + p_2 = m_1 v_1 - m_2 v_2$$

Η κατεύθυνση του $p_{ολ}$ είναι θετική, αν $|p_1| > |p_2|$ και αρνητική αν $|p_1| < |p_2|$. Αν $|p_1| = |p_2|$ τότε $p_{ολ} = 0$

Αν δύο υλικά σημεία κινούνται σε ορθογώνιες κατευθύνσεις όπως στο Σχ.3 τότε μεταφέρουμε τις ορμές σε ένα σημείο και συνθέτουμε διανυσματικά. Το μέτρο της ορμής του συστήματος είναι

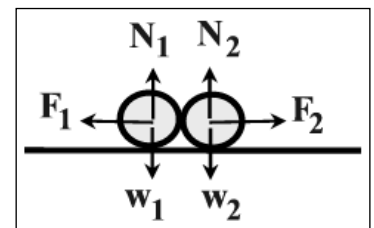
$$p_{ολ} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$$

και η κατεύθυνση καθορίζεται από τη γωνία θ , με $\epsilon\phi\theta = p_2/p_1$



Εσωτερικές και εξωτερικές δυνάμεις ενός συστήματος σωμάτων:

Εσωτερικές λέγονται οι δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ των μελών του συστήματος, δηλαδή οι F_1 και F_2 . Οι εσωτερικές δυνάμεις δρουν ως ζεύγη δράσης – αντίδρασης και συνεπώς έχουν για το σύστημα μηδενική συνισταμένη. Δεν μπορούν να μεταβάλλουν την ορμή του συστήματος. Μπορούν όμως να μεταβάλλουν τη μηχανική ενέργεια του συστήματος.



Εξωτερικές λέγονται οι δυνάμεις που ασκούνται από το περιβάλλον στα μέλη του συστήματος. Μπορούν να μεταβάλουν την ορμή και τη μηχανική ενέργεια του συστήματος. Όταν συγκρούονται δύο σφαίρες και θεωρήσουμε αυτές ως σύστημα τότε οι εσωτερικές δυνάμεις είναι οι δυνάμεις επαφής των δύο σφαιρών, $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$. Ως εξωτερικές θεωρούνται τα βάρη w_1, w_2 και οι κάθετες δυνάμεις στήριξης, N_1, N_2 .

Το απομονωμένο σύστημα σωμάτων: Απομονωμένο λέγεται το σύστημα των σωμάτων στο οποίο η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδέν ή δεν ασκούνται καθόλου εξωτερικές δυνάμεις, $\Sigma \vec{F}_{εξ} = 0$. Οι δύο σφαίρες που συγκρούονται αποτελούν απομονωμένο σύστημα αφού, $N_1 - w_1 = 0$ και $N_2 - w_2 = 0$

Ο 2^{ος} νόμος του Newton για σύστημα σωμάτων: Όταν θέλουμε να γράψουμε τον 2^ο νόμο για σύστημα σωμάτων τότε, λαμβάνοντας υπόψη ότι πάντοτε ισχύει $\Sigma \vec{F}_{εσ} = 0$, έχουμε

$$\Sigma \vec{F}_{ολ} = \frac{\Delta \vec{p}_{ολ}}{\Delta t} \rightarrow \Sigma \vec{F}_{εσ} + \Sigma \vec{F}_{εξ} = \frac{\Delta \vec{p}_{ολ}}{\Delta t} \rightarrow \Sigma \vec{F}_{εξ} = \frac{\Delta \vec{p}_{ολ}}{\Delta t}$$

Η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται σ' ένα σύστημα υλικών σημείων ισούται με το ρυθμό μεταβολής της ορμής του συστήματος.

$$\Sigma \vec{F}_{εξ} = \frac{\Delta \vec{p}_{ολ}}{\Delta t}$$

Η σχέση αυτή μας πληροφορεί ότι μόνο οι εξωτερικές δυνάμεις μπορούν να μεταβάλλουν την ορμή τους συστήματος.

Η αρχή διατήρησης της ορμής (ΑΔΟ): Αν κατά τη διάρκεια ενός φαινομένου, το σύστημα των υλικών σημείων είναι απομονωμένο, δηλαδή οι εξωτερικές δυνάμεις έχουν συνισταμένη μηδέν, τότε η ορμή του συστήματος κατά τη διάρκεια του φαινομένου διατηρείται σταθερή.

$$\text{Αν } \Sigma \vec{F}_{εξ} = 0 \rightarrow \frac{\Delta \vec{p}_{ολ}}{\Delta t} = 0 \rightarrow \Delta \vec{p}_{ολ} = 0 \rightarrow \vec{p}_{τελ} - \vec{p}_{αρχ} = 0 \rightarrow \boxed{\vec{p}_{αρχ} = \vec{p}_{τελ} = \text{σταθερή}}$$

Η κάθε μια από τις ορμές των υλικών σημείων του απομονωμένου συστήματος μεταβάλλεται, αλλά η συνολική ορμή του μένει σταθερή κατά μέτρο και κατεύθυνση. Η αρχή διατήρησης ορμής ισχύει ακόμα και σε μη απομονωμένα συστήματα, αρκεί οι εξωτερικές δυνάμεις να είναι πολύ μικρότερες από τις εσωτερικές.

Η κρούση δύο σωμάτων:

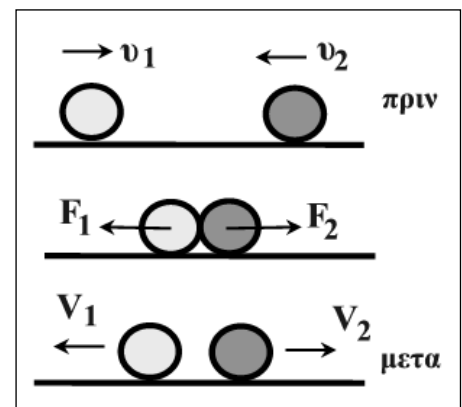
Είναι φαινόμενο αλληλεπίδρασης δύο σωμάτων που διαρκεί μικρό σχετικά χρονικό διάστημα και αναπτύσσονται σχετικά μεγάλες δυνάμεις. Σε κάθε κρούση ενός απομονωμένου συστήματος σωμάτων η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή, πριν και μετά την κρούση:

$$\vec{p}_{ολ, πριν} = \vec{p}_{ολ, μετα}$$

Δηλαδή με άλλα λόγια

$$\Delta \vec{p}_{ολ} = 0 \rightarrow \Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 = 0 \rightarrow \Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2$$

Σε κάθε κρούση η ορμή της κάθε σφαίρας μεταβάλλεται, αλλά του συστήματος μένει σταθερή.



Η ελαστική κρούση δύο ελεύθερων σωμάτων: Είναι αυτή στην οποία τα συγκρουόμενα σώματα παραμορφώνονται παροδικά, αλλά όχι μόνιμα. Διατηρούνται η ορμή και η κινητική ενέργεια του συστήματος.

$$\vec{p}_{ολ,πριν} = \vec{p}_{ολ,μετα} \quad \text{και} \quad K_{προ} = K_{μετα}$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος πριν την κρούση ισούται με την κινητική του ενέργεια μετά την κρούση. Κατά τη διάρκεια της κρούσης η κινητική ενέργεια δεν διατηρείται αφού λόγω παροδικής παραμόρφωσης ένας μέρος της μετατρέπεται παροδικά σε δυναμική ενέργεια ελαστικότητας. Όταν όμως τελειώσει η παραμόρφωση η τελική κινητική ενέργεια του συστήματος είναι ίση με την αρχική.

Η ανελαστική κρούση δύο ελεύθερων σωμάτων: Είναι αυτή στην οποία τα συγκρουόμενα σώματα παραμορφώνονται μόνιμα. Διατηρείται η ορμή του συστήματος και μειώνεται η κινητική του ενέργεια. Το ποσό μείωσης της κινητικής ενέργειας του συστήματος μετατρέπεται σε θερμότητα.

$$\vec{p}_{ολ,πριν} = \vec{p}_{ολ,μετα} \quad \text{και} \quad K_{προ} < K_{μετα}$$

Το ποσοστό μεταβολής της κινητικής ενέργειας σε μια ανελαστική κρούση:

$$\pi\% = \frac{\Delta K}{K_{προ}} 100\% = \frac{K_{μετα} - K_{προ}}{K_{προ}} 100\% < 0$$

Η θερμότητα που εκλύεται λόγω κρούσης ισούται πάντοτε με την απόλυτη τιμή της μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος :

$$Q = |K_{μετα} - K_{προ}|$$

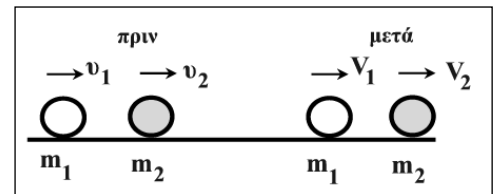
Το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος που έγινε θερμότητα λόγω της κρούσης είναι

$$\pi\% = \frac{Q}{K_{προ}} 100\%$$

Η πλαστική κρούση δύο ελεύθερων σωμάτων: Είναι μια μορφή ανελαστικής κρούσης κατά την οποία η παραμόρφωση είναι μεγάλη και δημιουργείται συσσωμάτωμα. Διατηρείται η ορμή και μειώνεται η κινητική ενέργεια του συστήματος. Το ποσό μείωσης της κινητικής ενέργειας μετατρέπεται και πάλι σε θερμότητα.

Η μετωπική (κεντρική) κρούση: Είναι αυτή στην οποία τα κέντρα μάζας των σωμάτων κινούνται στην ίδια ευθεία πριν και μετά την κρούση. Ισχύει για τις αλγεβρικές τιμές των ορμών πριν και μετά την κρούση:

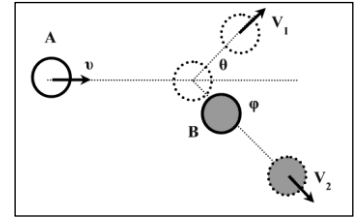
$$\text{ΑΔΟ: } p_{ολ,πριν} = p_{ολ,μετα} \rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2$$



Αν είναι και ελαστική κρούση τότε ισχύει και: η διατήρηση της κινητικής ενέργειας:

$$\text{ΑΔΚΕ: } K_{προ} = K_{μετα} \rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2$$

Πλάγια κρούση: Είναι αυτή στην οποία τα διανύσματα των ταχυτήτων των κέντρων μάζας των σωμάτων πριν και μετά την κρούση έχουν τυχαίες κατευθύνσεις.

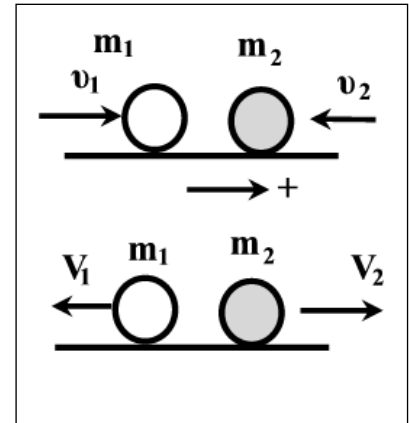


Η σχέση κινητικής ενέργειας και ορμής : $p=mv \rightarrow v=\frac{p}{m}$

$$K=\frac{1}{2}mv^2 \rightarrow K=\frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 \rightarrow K=\frac{p^2}{2m}$$

Αν δύο σώματα έχουν ίδια ορμή τότε το βαρύτερο θα έχει μικρότερη κινητική ενέργεια

Άσκηση 6.1 Σφαίρα μάζας $m_1=4\text{kg}$ κινείται με σταθερή ταχύτητα $v_1=10\text{m/s}$ κατά τη θετική φορά του άξονα $x'Ox$ και συγκρούεται μετωπικά με άλλη σφαίρα μάζας $m_2=1\text{kg}$, που κινείται στην ίδια ευθεία με αντίθετη φορά και ταχύτητα μέτρου $v_2=30\text{m/s}$. Μετά την κρούση η σφαίρα (1) αντιστρέφει τη φορά της κίνησής της με ταχύτητα μέτρου 6m/s . Να υπολογιστούν:



- A. Η ταχύτητα της σφαίρας (2) μετά την κρούση.
- B. Οι μεταβολές της ορμής των σφαιρών μετά την κρούση.
- Γ. Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος και το είδος της κρούσης.
- Δ. Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας της μιας που μεταβιβάστηκε στην άλλη.
- Ε. Η απόσταση που θα απέχουν 1s μετά την κρούση.

Λύση

A. Οι αλγβρικές τιμές των ταχυτήτων είναι $v_1=10\text{m/s}$, $v_2=-30\text{m/s}$, $V_1=-6\text{m/s}$. Από την ΑΔΟ θα υπολογιστεί η V_2 .

$$m_1v_1+m_2v_2=m_1V_1+m_2V_2 \rightarrow V_2=\frac{40-30+24}{1}\text{m/s} \rightarrow V_2=34\text{m/s}$$

$$\begin{aligned} \text{B. } \Delta p_1 &= m_1V_1 - m_1v_1 = 4\text{kg}(-6\text{m/s} - 10\text{m/s}) \rightarrow \Delta p_1 = -64\text{kgm/s} \\ \Delta p_2 &= m_2V_2 - m_2v_2 = 1\text{kg}(34\text{m/s} - (-30\text{m/s})) \rightarrow \Delta p_2 = 64\text{kgm/s} \end{aligned}$$

Γ. Οι κινητικές ενέργειες πριν και μετά την κρούση:

$$K_\pi = K_{1\pi} + K_{2\pi} = 200\text{J} + 450\text{J} \rightarrow K_\pi = 650\text{J}$$

$$K_\mu = K_{1\mu} + K_{2\mu} = 72\text{J} + 578\text{J} \rightarrow K_\mu = 650\text{J}$$

Άρα $\Delta K = K_\mu - K_\pi = 0$ συνεπώς η εν λόγω κρούση είναι **ελαστική**.

Δ. Η σφαίρα (1) είχε $K_{1\pi}=200\text{J}$ και μετά την κρούση $K_{1\mu}=72\text{J}$. Άρα έχασε $\Delta K_1=128\text{J}$ που προφανώς μεταβιβάστηκαν στη σφαίρα (2). Το ποσοστό της K_1 που μεταβιβάστηκε στη (2) είναι

$$\pi\% = \frac{\Delta K_1}{K_{1,\pi}} 100\% = \frac{128\text{J}}{200\text{J}} 100\% \rightarrow \pi\% = 64\%$$

Ε. Με αυτές τις ταχύτητες $|V_1|=6\text{m/s}$ και $|V_2|=34\text{m/s}$ οι σφαίρες διανύουν στο λείο επίπεδο με σταθερές ταχύτητες, αποστάσεις $x_1 = |V_1| \cdot t = 6\text{m}$ και $x_2 = |V_2| \cdot t = 34\text{m}$. Άρα η μεταξύ τους απόσταση μετά την κρούση είναι: **$x = x_1 + x_2 = 40\text{m}$**

Άσκηση 6.2 Κύβος μάζας $M=4,8\text{kg}$ στηρίζεται σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\varphi=30^\circ$. Βλήμα μάζας $m=0,2\text{kg}$, κινούμενο οριζόντια με ταχύτητα $v=200\sqrt{3}\text{m/s}$, σφηνώνεται στον κύβο ακαριαία.

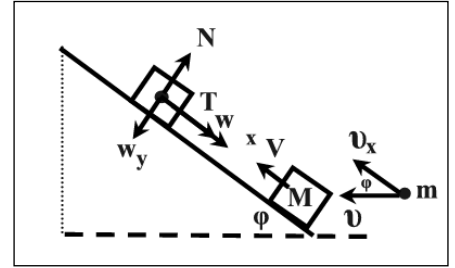
A. Πόση είναι η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση;

B. Πόσο θα μετατοπιστεί το συσσωμάτωμα που σχηματίζεται, αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ κύβου και κεκλιμένου επιπέδου είναι $\mu=\sqrt{3}/3$.

Γ. Πόσο χρόνο χρειάζεται για να σταματήσει για πρώτη φορά;

Δ. Θα ολισθήσει και πάλι το συσσωμάτωμα προς τα κάτω μετά τον πρώτο μηδενισμό της ταχύτητας;

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.



Λύση

A. Μετά την κρούση το σσσωμάτωμα κινείται στον άξονα, x , του κεκλιμένου επιπέδου. Άρα γράφουμε την ΑΔΟ στον άξονα αυτόν. Για να το κάνουμε πρέπει να πάρουμε τη συνιστώσα της ταχύτητας του βλήματος στον άξονα αυτόν, που είναι η $v_x=v_0\sin\varphi=200\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3}/2)=300\text{m/s}$.

$$mv_x=(M+m)V \rightarrow V=12\text{m/s}$$

B. Από το ΘΜΚΕ για ολίσθηση κατά s στο κεκλιμένο:

$$W_{mg}+W_T=K_{\text{τελ}}-K_{\text{αρχ}} \rightarrow -[(M+m)g\cdot\eta\mu\varphi]\cdot s - [\mu(M+m)g\sin\varphi]\cdot s = 0 - \frac{1}{2}(M+m)V^2 \rightarrow$$

$$s=7,2\text{m}$$

Γ. Η συνισταμένη δύναμη στον άξονα του κεκλιμένου έχει αλγεβρική τιμή~

$$\Sigma F_x = -mg\eta\mu\varphi - T = -(M+m)g\eta\mu\varphi - \mu(M+m)g\sin\varphi \rightarrow \Sigma F_x = -50\text{N}$$

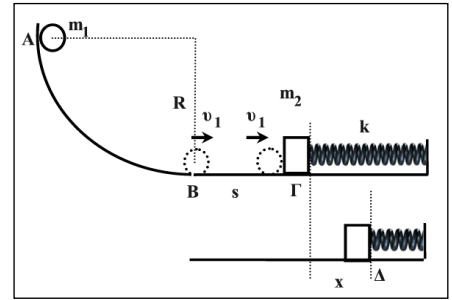
$$\Sigma F_x = \frac{\Delta p}{\Delta t} \rightarrow \Sigma F_x = \frac{0 - (M+m)V}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = 1,2\text{s}$$

Δ. Για να κινηθεί προς τα κάτω, πρέπει η συνισταμένη δύναμη να είναι, $\Sigma F_x > 0$.

$$\Sigma F_x = (M+m)g\eta\mu\varphi - \mu(M+m)g\sin\varphi = 25\text{N} - 25\text{N} = 0 \rightarrow \Sigma F_x = 0$$

Με μηδενική συνισταμένη δεν θα ξεκινήσει, θα ισορροπεί.

Άσκηση 6.3 Θεωρούμε κατακόρυφο τεταρτοκύκλιο AB, ακτίνας $R=2m$ που εφάπτεται στο κάτω άκρο του B, με οριζόντιο δάπεδο. Σώμα μάζας $m_1=1kg$, αφήνεται να ολισθήσει κατά μήκος του τεταρτοκυκλίου από το άνω άκρο A. Το σώμα περνάει από το σημείο B με ταχύτητα $v_1=4m/s$ και συνεχίζει να κινείται χωρίς τριβές κατά μήκος της οριζόντιας επαφτομένης του τεταρτοκυκλίου στο σημείο B. Αφού διανύσει διάστημα BΓ στο λείο οριζόντιο επίπεδο συγκρούεται μετωπικά με σώμα μάζας $m_2=5kg$, που είναι δεμένο στο άκρο ελατηρίου σταθεράς $k=100N/m$. Το m_2 μετά την κρούση κινείται στο οριζόντιο επίπεδο με τριβές και σταματάει αφού διανύσει διάστημα $\Gamma\Delta=x=0,2m$. Ο συντελεστής τριβής στο τμήμα $\Gamma\Delta$ είναι $\mu=0,05$. Να υπολογιστούν:



A. Η θερμότητα που παράχθηκε λόγω τριβής κατά την καθοδική κίνηση του σώματος στο τεταρτοκύκλιο.

B. Οι ταχύτητες των δύο σωμάτων μετά την κρούση και το είδος της κρούσης.

Γ. Το ποσοστό (%) της αρχικής μηχανικής ενέργειας του σώματος m_1 που έγινε θερμότητα λόγω τριβών κατά την ολίσθηση των σωμάτων στα τμήματα AB και ΓΔ.

Δ. Το ποσοστό (%) της αρχικής μηχανικής ενέργειας του σώματος m_1 που έγινε θερμότητα λόγω κρούσης.

Ως στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας να θεωρηθεί το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το B. Δίνεται $g=10m/s^2$.

Λύση

A. ΘΜΚΕ για το σώμα m_1 από το A στο B: $W_B + W_{T1} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 \rightarrow W_{T1} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 - m_1gR \rightarrow W_{T1} = -12J$. Άρα η θερμότητα που εκλύθηκε είναι **12J**.

B. ΘΜΚΕ για το m_2 από Γ σε Δ: $W_{T2} + W_{ελ} = 0 - \frac{1}{2}m_2V_2^2$ (1)

Τα έργα των δυνάμεων στη διαδρομή ΓΔ είναι:

$$W_{T2} = -T_2x = -\mu N_2x = -\mu m_2gx = -0,5J \text{ και } W_{ελ} = U_{ελ,α} - U_{ελ,τ} = 0 - \frac{1}{2}kx^2 = -2J$$

Από (1) $\rightarrow V_2 = 1m/s$

Από την ΑΔΟ στην κρούση: $m_1v_1 = m_1V_1 + m_2V_2 \rightarrow V_1 = \frac{m_1v_1 - m_2V_2}{m_1} \rightarrow V_1 = -1m/s$.

Η κινητική ενέργεια του συστήματος πριν την κρούση είναι $K_{\pi\pi} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 = 8J$

Μετά την κρούση είναι: $K_{\mu\epsilon\tau} = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 \rightarrow K_{\mu\epsilon\tau} = 3J$

Άρα $\Delta K = -3J$, δηλαδή, $K_{\mu\epsilon\tau} < K_{\pi\pi}$, οπότε η κρούση είναι **ανελαστική**.

Γ. Τριβές υπάρχουν στα τμήματα AB και ΓΔ. Συνολικά το έργο της τριβής είναι:

$$W_{T1} + W_{T2} = -12J - 0,5J = -12,5J. \text{ Άρα η θερμότητα λόγω τριβών είναι } Q = 12,5J$$

$$\pi_1\% = \frac{Q}{E_A} 100\% = \frac{Q}{m_1gh} 100\% = \frac{12,5}{20} 100\% \rightarrow \pi_1\% = 62,5\%$$

Δ. Η θερμότητα που εκλύθηκε λόγω της ανελαστικής κρούσης ισούται με την απόλυτη τιμή της μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συστήματος κατά την κρούση.

$$\pi_1\% = \frac{|\Delta K|}{E_A} 100\% = \frac{|\Delta K|}{m_1gh} 100\% = \frac{3}{20} 100\% \rightarrow \pi_2\% = 15\%$$

Άσκηση 6.4 Νήμα μήκους $L=2\text{m}$ κρέμεται από ακλόνητο σημείο και φέρει στο κάτω άκρο του ορθογώνιο πρίσμα που ισορροπεί. Λόγω εσωτερικού εκρηκτικού μηχανισμού το πρίσμα σπάει σε δύο τμήματα. Το ένα με μάζα $m_1=6\text{kg}$ που εκτοξεύεται οριζόντια προς τα αριστερά και πέφτει στο έδαφος σε απόσταση $s=6\text{m}$. Το άλλο μάζας $m_2=3\text{kg}$ μένει συνδεδεμένο στο νήμα. Το πρίσμα απέχει από το έδαφος απόσταση $H=1,8\text{m}$. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$

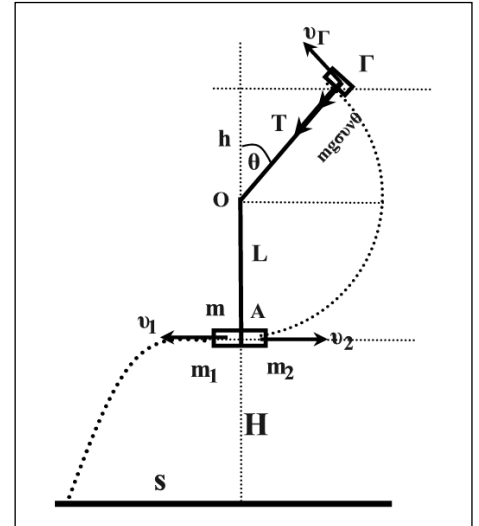
A. Να βρεθεί η ταχύτητα του m_1 αμέσως μετά τη διάσπαση.

B. Να βρεθεί η ταχύτητα και η κεντρομόλος επιτάχυνση του m_2 αμέσως μετά τη διάσπαση.

Γ. Να βρεθεί το συνθ της γωνία θ που θα σχηματίζει το νήμα με την κατακόρυφο σε κείνη τη θέση, Γ, που η ταχύτητα του m_2 θα έχει μέτρο $v=18\text{m/s}$.

Δ. Να βρεθεί η τάση του νήματος, T, στη θέση Γ.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.



Λύση

A. Από τα στοιχεία της οριζόντιας βολής του m_1 : $H= \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow t=\sqrt{0,36}\text{s} \rightarrow t=0,6\text{s}$

Από το δεδομένο βεληνεκές: $s=v_1t \rightarrow v_1=\frac{s}{t} \rightarrow \mathbf{v_1=10\text{m/s}}$.

B. Από την ΑΔΟ για τη διάσπαση του πρίσματος: $p_{αρχ}=p_{τελ} \rightarrow 0= m_1v_1-m_2v_2 \rightarrow v_2=\frac{m_1v_1}{m_2} \rightarrow$

$\mathbf{v_2=20\text{m/s}}$ Κεντρομόλος επιτάχυνση: $\alpha_2=\frac{v_2^2}{L} \rightarrow \mathbf{\alpha_2=200\text{m/s}^2}$

Γ. Από την ΑΔΜΕ για το m_2 από το Α έως το Γ υπολογίζω το ύψος, h, που ανεβαίνει το m_2 πάνω από το κέντρο Ο.

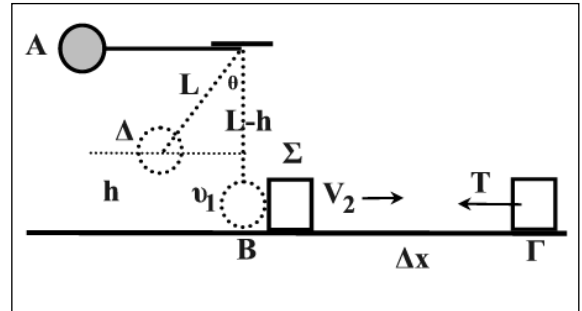
$$E_A=E_\Gamma \rightarrow \frac{1}{2}m_2v_2^2=m_2g(h+L) + \frac{1}{2}m_2v_\Gamma^2 \rightarrow h+L=\frac{v_2^2-v_\Gamma^2}{2g}=3,8\text{m} \rightarrow h=1,8\text{m}$$

Άρα $\text{συν}\theta=h/L=1,8/2 \rightarrow \mathbf{\text{συν}\theta=0,9}$

Δ. Σχεδιάζω τη συνιστώσα του βάρους $m_2g\text{συν}\theta$ στη διεύθυνση του νήματος στη θέση Γ και την τάση T_α του νήματος και από την κεντρομόλο δύναμη υπολογίζω την T.:

$$\Sigma F_R=m_2\frac{v_B^2}{L} \rightarrow T+m_2g\text{συν}\theta = m_2\frac{v_B^2}{L} \rightarrow \mathbf{T=459\text{N}}$$

Άσκηση 6.5: Χαλύβδινη σφαίρα, σ , μάζας $m=1\text{kg}$ κρέμεται από ακλόνητο σημείο με τη βοήθεια αβαρούς ράβδου μήκους $L=0,8\text{m}$. Το σύστημα φέρεται σε οριζόντια θέση και αφήνεται ελεύθερο, χωρίς ταχύτητα να διαγράψει κυκλική τροχιά. Στο κατώτερο σημείο της τροχιάς της συγκρούεται κεντρικά με ακίνητο κύβο, Σ , μάζας $M=2,5\text{kg}$. Μετά την κρούση ο κύβος ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο και μετατοπίζεται κατά $\Delta x=2\text{m}$ μέχρι να σταματήσει. Μεταξύ κύβου και επιπέδου ο συντελεστής τριβής είναι $\mu=0,1$.



A. Πόσο είναι ο ρυθμός μεταβολής της ορμής της σφαίρας στη θέση A;

B. Πόση είναι η ταχύτητα του σώματος Σ αμέσως μετά την κρούση και σε πόσο χρόνο σταματάει;

Γ. Πόση είναι η ταχύτητα της σφαίρας αμέσως μετά την κρούση;

Δ. Ποιο είναι το είδος της κρούσης που έγινε;

E. Πόση μέγιστη γωνία, ϕ , διαγράφει η αβαρής ράβδος μετά την κρούση;

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Λύση

A. Στη θέση A η σφαίρα είναι ακίνητη και η κεντρομόλος άρα και η τάση του νήματος είναι μηδενική. Άρα η μόνη δύναμη που δέχεται είναι το βάρος της:

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = mg = 10\text{N}$$

B. Γράφω ΘΜΚΕ για το σώμα Σ . $W_T = \Delta K \rightarrow -\mu Mg\Delta x = -\frac{1}{2}MV_2^2 \rightarrow V_2 = 2\text{m/s}$

Το σώμα ολισθαίνει υπό την επίδραση της τριβής $T = \mu N = \mu Mg = 2,5\text{N}$.

$$\Sigma F_x = \frac{\Delta p}{\Delta t} \rightarrow -T = \frac{0 - MV_2}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{MV_2}{T} \rightarrow \Delta t = 2\text{s}$$

Γ. Η σφαίρα κατεβαίνει και φτάνει στην κατώτερη θέση με ταχύτητα v_1 , λίγο πριν την κρούση. Από την ΑΔΜΕ από το A στο B

$$E_A = E_B \rightarrow mgL = \frac{1}{2}mv_1^2 \rightarrow v_1 = \sqrt{2gL} \rightarrow v_1 = 4\text{m/s}$$

Μετά την κρούση η ταχύτητα της σφαίρας είναι V_1 .

Από την ΑΔΟ για την κρούση έχουμε: $mv_1 = MV_2 + mV_1 \rightarrow V_1 = -1\text{m/s}$.

Δ. Το είδος της κρούσης θα προσδιοριστεί από το αν διατηρείται η όχι η κινητική ενέργεια του συστήματος κατά την κρούση.

$$K_\pi = \frac{1}{2}mv_1^2 = 8\text{J}$$

$$K_\mu = \frac{1}{2}mV_1^2 + \frac{1}{2}MV_2^2 = 5,5\text{J}$$

$\Delta K = K_\mu - K_\pi = -2,5\text{J}$. Άρα η κρούση είναι **ανελαστική**.

E. Μετά την κρούση η σφαίρα ανεβαίνει κατά h πάνω από τη θέση B και το νήμα σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφο.

$$\text{Από την ΑΔΜΕ για τη σφαίρα μετά την κρούση: } \frac{1}{2}mV_1^2 = mgh \rightarrow h = \frac{V_1^2}{2g} \rightarrow h = 0,05\text{m}$$

$$\cos\theta = \frac{L-h}{L} = \frac{0,8-0,05}{0,8} \rightarrow \cos\theta = 0,9375$$

7. Συνεχές ηλεκτρικό ρεύμα

Ηλεκτρικό ρεύμα :Λέγεται η **προσανατολισμένη κίνηση ηλεκτρικών φορτίων** που συμβαίνει σε κάποιον αγωγό. Αν ο αγωγός είναι μεταλλικός (σύρμα) τότε είναι προσανατολισμένη κίνηση ελεύθερων ηλεκτρονίων.

Ένταση ηλεκτρικού ρεύματος: Είναι το μονόμετρο μέγεθος που προκύπτει ως πηλίκο του φορτίου Δq που περνά από μια διατομή του αγωγού σε χρόνο Δt , προς το χρόνο αυτό. Δηλαδή:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

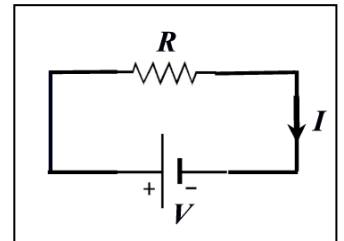
Μονάδα μέτρησης της έντασης στο S.I. είναι το 1 Ampere (1A) με $1A = 1C/s$.

Υποδιαιρέσεις του 1 A: Είναι το $1mA = 10^{-3}A$ και $1\mu A = 10^{-6}A$. Στους μεταλλικούς αγωγούς το φορτίο q το μεταφέρουν τα ηλεκτρόνια και είναι $q = N|e|$ όπου N ο αριθμός των ηλεκτρονίων και $|e| = 1,6 \cdot 10^{-19}C$.

Ηλεκτρική αντίσταση: ορίζεται το πηλίκο της τάσης (V) που εφαρμόζεται στα άκρα ενός δίπολου προς την ένταση του ρεύματος (I) που το διαρρέει.

$$R = \frac{V}{I} = \text{σταθερό πηλίκο}$$

Μονάδα μέτρησης της αντίστασης στο SI είναι το 1 Ohm (Ω) για το οποίο ισχύει ότι $1\Omega = 1V/A$.



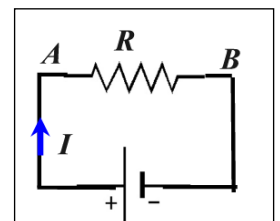
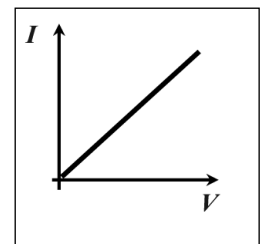
● Προσοχή: Ο ορισμός ισχύει για την αντίσταση κάθε δίπολου. Όταν το δίπολο είναι αντιστάτης η αντίσταση R δεν επηρεάζεται ούτε από την τάση V ούτε από την ένταση I του ρεύματος. Για κάθε συγκεκριμένο αντιστάτη το πηλίκο V/I είναι σταθερό.

Ο νόμος του Ohm: Η ένταση του ρεύματος (I) που διαρρέει ένα δίπολο είναι ανάλογη της τάσης (V) που εφαρμόζεται στα άκρα του, όταν η αντίσταση είναι σταθερή. Η διατύπωση αυτή αποτελεί το νόμο του Ohm και η μαθηματική της έκφραση είναι η ακόλουθη:

$$I = \frac{V}{R}$$

Η ένταση του ρεύματος είναι και αντιστρόφως ανάλογη της αντίστασης R όταν η τάση V είναι σταθερή. Δηλαδή με την ίδια V αν αυξάνουμε την αντίσταση R , η ένταση του ρεύματος θα μειώνεται. Ο νόμος του Ohm ισχύει όταν η θερμοκρασία του αγωγού είναι σταθερή. Η διαφορά δυναμικού στα άκρα αντιστάτη λέγεται πτώση τάσης και είναι

$$V_{AB} = I \cdot R$$



Άρα ισχύουν:

$$R = \frac{V}{I} \rightarrow V = I \cdot R \rightarrow I = \frac{V}{R}$$

Προσοχή! Ο νόμος του Ohm, δεν ισχύει στην περίπτωση των λυχνιών πυράκτωσης, στους ηλεκτροκινητήρες ή στα ηλεκτρονικά στοιχεία (τρανζίστορ, δίοδοι, κ.ά.). Ισχύει μόνο σε αντιστάτες σταθερής θερμοκρασίας.

Παράδειγμα: Αντιστάτης που έχει αντίσταση $R=6\Omega$ τροφοδοτείται από ηλεκτρική πηγή τάσης $V=12V$. Να υπολογιστούν

A. Πόση είναι η ένταση I του ρεύματος που διαρρέει τον αντιστάτη;

$$I = \frac{V}{R} = \frac{12V}{6\Omega} = 2A$$

B. Πόσο φορτίο διέρχεται από μια διατομή των αγωγών του κυκλώματος σε χρόνο $t=20s$

$$I = \frac{q}{t} \rightarrow q = I \cdot t = 2A \cdot 20s = 40C$$

Γ. Πόση αντίσταση R πρέπει να τροφοδοτήσουμε με την ίδια τάση $V=12V$ για να διαρρέεται από ρεύμα έντασης $I=6A$;

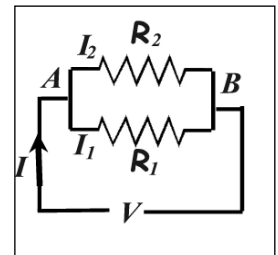
$$R = \frac{V}{I} = \frac{12V}{6A} = 2\Omega$$

Οι κανόνες του Κίρχοφ:

1^{ος} κανόνας Kirchhoff: Το αλγεβρικό άθροισμα των εντάσεων των ρευμάτων που συμβάλουν σε ένα κόμβο είναι ίσο με το μηδέν. Με άλλα λόγια όσο ρεύμα έρχεται στον κόμβο τόσο ρεύμα φεύγει. Ο κανόνας αυτός είναι συνέπεια της αρχής αφθαρσίας του φορτίου.

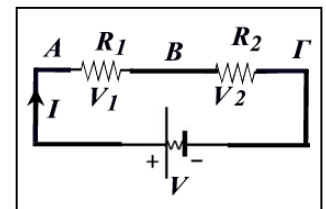
Αν στον κόμβο A φτάνει το ρεύμα I και μετά διακλαδίζεται σε ρεύματα I_1 και I_2 . Το φορτίο Q που φτάνει στο A μοιράζεται σε Q_1 και Q_2 που διοχετεύεται στους δύο κλάδους όπως φαίνεται στο σχήμα. Από την αρχή διατήρησης του φορτίου ισχύει:

$$Q = Q_1 + Q_2 \rightarrow It = I_1t + I_2t \rightarrow I = I_1 + I_2 \rightarrow I - I_1 - I_2 = 0 \rightarrow \Sigma I = 0$$



2^{ος} κανόνας Kirchhoff: Το αλγεβρικό άθροισμα των διαφορών δυναμικών σε ένα κλειστό βρόχο κυκλώματος ισούται με το μηδέν. Ο κανόνας αυτός είναι συνέπεια της αρχής διατήρησης ενέργειας.

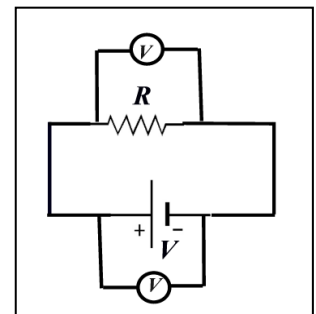
$$\Sigma(\Delta V) = 0$$



Η ηλεκτρική πηγή τάσης V προσφέρει ενέργεια W σε φορτίο q . Το φορτίο αυτό μεταφέρει την ενέργεια στους αποδέκτες. Η ενέργεια αυτή καταναλώνεται στους αποδέκτες R_1 και R_2 που δαπανούν ενέργειες W_1 και W_2 . Σύμφωνα με την Αρχή Διατήρησης Ενέργειας ισχύει

$$W = W_1 + W_2 \rightarrow V \cdot q = V_1 \cdot q + V_2 \cdot q \rightarrow V = V_1 + V_2 \rightarrow V - V_1 - V_2 = 0 \rightarrow \Sigma(\Delta V) = 0$$

Προκειμένου να μετρήσουμε την τάση ενός δίπολου χρησιμοποιούμε ειδικά όργανα που λέγονται **βολτόμετρα (V)**. Ένα βολτόμετρο μετράει την τάση (διαφορά δυναμικού) στους ακροδέκτες του δίπολου και συνδέεται κύκλωμα **παράλληλα** στο δίπολο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Παράγοντες που μεταβάλλουν την αντίσταση ενός αγωγού: Η αντίσταση ενός μεταλλικού αγωγού εξαρτάται από:

i. Το μήκος του αγωγού, ℓ . Η αντίσταση ενός αγωγού είναι ανάλογη του μήκους του αγωγού. Αν για παράδειγμα ένας μεταλλικός αγωγός μήκους 1m παρουσιάζει αντίσταση 2Ω , τότε ίδιος αγωγός, ίδιας θερμοκρασίας, μήκους 2m θα παρουσιάζει αντίσταση 4Ω .

ii. Το εμβαδόν της διατομής του αγωγού, S . Η αντίσταση που εμφανίζει ένας αγωγός είναι αντιστρόφως ανάλογη του εμβαδού της διατομής του. Αν για παράδειγμα ένας αγωγός με εμβαδόν διατομής 1mm^2 εμφανίζει αντίσταση 2Ω , τότε ίδιος αγωγός, ίδιας θερμοκρασίας, με εμβαδόν διατομής 2mm^2 θα εμφανίζει αντίσταση 1Ω .

iii. Το υλικό κατασκευής του αγωγού. Έχει παρατηρηθεί ότι το υλικό κατασκευής των μεταλλικών αγωγών παίζει σπουδαίο ρόλο για την αντίσταση που εμφανίζει ο αγωγός. Για παράδειγμα, ανάμεσα σε ένα χαλύβδινο και σε ένα χάλκινο σύρμα, ίδιου μήκους και εμβαδού διατομής, το χάλκινο σύρμα θα εμφανίζει μικρότερη αντίσταση εξ αιτίας του υλικού κατασκευής.

iv. Τη θερμοκρασία του αγωγού. Η θερμοκρασία παίζει σημαντικό ρόλο στην αντίσταση ενός αγωγού και μάλιστα με την αύξηση της θερμοκρασίας παρατηρείται, στα καθαρά μέταλλα, αύξηση της αντίστασής τους. Παρόλα αυτά, ορισμένα κράματα μετάλλων εμφανίζουν σταθερή αντίσταση ανεξάρτητα από τη θερμοκρασία.

Όλα τα παραπάνω εκφράζονται μαθηματικά από τη σχέση:

$$R = \rho_{\theta} \cdot \frac{\ell}{S}$$

όπου ρ_{θ} η **ειδική αντίσταση** του αγωγού που εξαρτάται από το υλικό κατασκευής και τη θερμοκρασία, ℓ το μήκος του αγωγού και S το εμβαδόν της διατομής του.

Αν θελήσει κανείς να διερευνήσει την εξάρτηση της ειδικής αντίστασης από τη θερμοκρασία, τότε η σχέση που συνδέει τα δύο μεγέθη είναι η ακόλουθη:

$$\rho_{\theta} = \rho_0(1 + \alpha \cdot \theta)$$

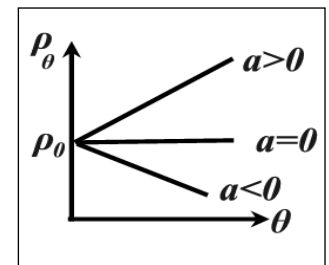
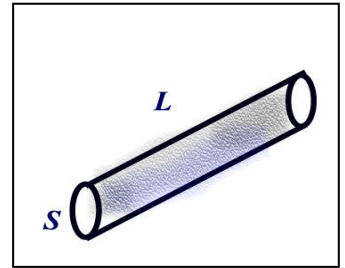
όπου ρ_{θ} η ειδική αντίσταση, ρ_0 η ειδική αντίσταση του αγωγού στους 0°C , θ η θερμοκρασία του αγωγού μετρημένη σε $^{\circ}\text{C}$ και α μία σταθερά που λέγεται **θερμικός συντελεστής** ειδικής αντίστασης. Η σταθερά α εξαρτάται από το υλικό του αγωγού και μετριέται σε $1/^{\circ}\text{C}$.

► Για τα καθαρά μέταλλα είναι $\alpha > 0$, δηλαδή η ειδική αντίσταση αυξάνει με τη θερμοκρασία.

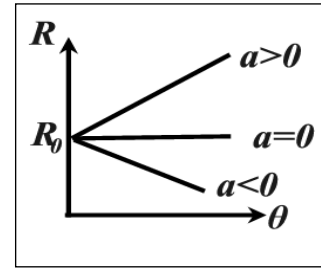
► Για το γραφίτη (C), το πυρίτιο (Si) και το γερμάνιο (Ge), που είναι ημιαγωγοί, είναι $\alpha < 0$, δηλαδή η ειδική αντίσταση μειώνεται με τη θερμοκρασία.

► Για ορισμένα κράματα μετάλλων είναι $\alpha \approx 0$, δηλαδή η ειδική τους αντίσταση είναι σταθερή.

Αν θεωρήσουμε αμελητέα τη μεταβολή των εξωτερικών διαστάσεων ενός αγωγού τότε ισχύει:



$$\left. \begin{array}{l} 0^\circ \text{C} : R_0 = \rho_0 \frac{l}{s} \\ \theta^\circ \text{C} : R_\theta = \rho_\theta \frac{l}{s} \\ \rho_\theta = \rho_0(1 + \alpha\theta) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{R_\theta = R_0(1 + \alpha\theta)}$$



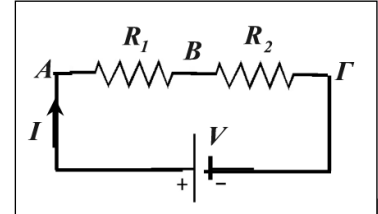
Συνδεσμολογία αντιστατών:

I. Σύνδεση αντιστατών σε σειρά:

Η ένταση του ρεύματος είναι κοινή, **I=κοινό**.

Για τις τάσεις ισχύει: **V= V_{AB}+V_{BF}+....**

Για την ισοδύναμη αντίσταση: **R_{0λ}=R₁+R₂+R₃+....**



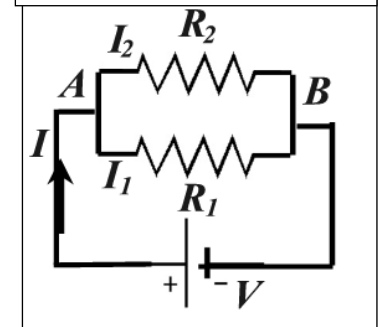
II. Σύνδεση αντιστατών παράλληλα:

Η τάση στα άκρα των αντιστατών είναι κοινή, (**V= V_{AB}= κοινό**)

Για τις εντάσεις ισχύει: **I=I₁+I₂+....**

Για την ισοδύναμη αντίσταση: **$\frac{1}{R_{0λ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots$**

Αν οι αντιστάτες είναι δύο (2) τότε **$\rightarrow R_{0λ} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$**



Ενέργεια ηλεκτρικού ρεύματος: Η ενέργεια που καταναλώνει ένα

δίπολο είναι ανάλογη της τάσης (V) στα άκρα του δίπολου, ανάλογη

της έντασης (I) του ρεύματος που το διαρρέει και ανάλογη του χρόνου (t) λειτουργίας του δίπολου.

Μονάδα μέτρησης της ενέργειας στο S.I. είναι το 1 Joule (J).

Η ενέργεια που καταναλώνει ένα δίπολο είναι: **W=V·q= V·I·t**

$$\boxed{W=V \cdot I \cdot t}$$

Όταν το δίπολο που καταναλώνει την ενέργεια είναι αντιστάτης R τότε η ενέργεια γίνεται:

$$\boxed{W=I^2 \cdot R \cdot t \rightarrow W= \frac{V^2}{R} t} \quad (\text{νόμος του Joule})$$

Όταν το I είναι κοινό (εν σειρά) τότε η θερμότητα W είναι ανάλογη με την αντίσταση R: **W=I²·R·t**.

Όταν το V είναι το κοινό (παράλληλη) τότε η θερμότητα είναι αντιστρόφως ανάλογης της R. δηλαδή

$$W= \frac{V^2}{R} t$$

Η ισχύς, P ενός δίπολου: Ισχύς λέγεται το φυσικό μονόμετρο μέγεθος που ισούται με το πηλίκο της ενέργειας που καταναλώνει ένα δίπολο σε κάποιο χρόνο, t προς τον χρόνο αυτό.

$$P= \frac{W}{t} \rightarrow W=P \cdot t$$

Η ισχύς μετριέται σε watt(**w**) 1w=1J/s 1kw=10³w

Η ισχύς που καταναλώνει ένα δίπολο είναι: **$P= \frac{W}{t} = \frac{V \cdot I \cdot t}{t} \rightarrow \boxed{P=V \cdot I}$**

Η ισχύς που καταναλώνει ο αντιστάτης, R: **$\boxed{P=I^2 \cdot R \rightarrow P= \frac{V^2}{R}}$**

Η 1Wh (βατώρα): Μια άλλη μονάδα μέτρησης της ενέργειας. Αν η ισχύς είναι μετρημένη σε Watt και ο χρόνος σε ώρες (h), τότε έχουμε μια νέα μονάδα μέτρησης της ενέργειας, τη **βατώρα**: $1\text{Wh}=1\text{W}\cdot 1\text{h}=1\text{W}\cdot 3600\text{sec}=3600\text{J}$.

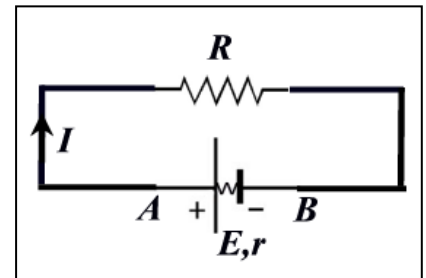
Ενέργεια 1wh καταναλώνει μια ηλεκτρική συσκευή ισχύος 1 Watt όταν λειτουργεί για 1 ώρα. Η ΔΕΗ μετράει την ηλεκτρική ενέργεια που καταναλώνουμε σε κιλοβατώρες (kWh) και μας χρεώνει «κατάλληλα». $1\text{kWh}=10^3\text{wh}$

$$1\text{ kwh}=1\text{kw}\cdot 1\text{h}=10^3\cdot 3600\text{s}=3,6\cdot 10^6\text{ J}$$

Ηλεκτρική πηγή - κλειστό κύκλωμα: Το κλειστό κύκλωμα περιλαμβάνει πηγή με ΗΕΔ, E , εσωτερικής αντίστασης, r , και εξωτερικό κύκλωμα που αποτελείται από αντιστάτες συνολικής αντίστασης $R_{\text{εξ}}$.

Ηλεκτρεγερτική δύναμη πηγής (ΗΕΔ): Είναι το πηλίκο της ενέργειας που δίνει η πηγή σε φορτίο q προς το φορτίο αυτό.

$$E = \frac{W_E}{q} = \frac{P_E}{I} \quad \text{Μονάδα: } 1\text{V}=1\text{J/s} = 1\text{W/A}$$



Ενέργεια που δίνει η πηγή στο κύκλωμα είναι :

$$W_E = E \cdot q \rightarrow W_E = E \cdot I \cdot t$$

Ισχύς που δίνει η πηγή στο κύκλωμα:

$$P_E = E \cdot I$$

Ο νόμος του Ohm για κλειστό κύκλωμα:

$$I = \frac{E}{R_{\text{ολ}}}$$

όπου: $R_{\text{ολ}} = r + R_{\text{εξ}}$

Πολική τάση πηγής: Είναι η διαφορά δυναμικού στους πόλους της πηγής:

$$V_{\pi} = V_{AB} = E - Ir = I \cdot R_{\text{εξ}}$$

Το ρεύμα βραχυκύκλωσης: $I_{\beta} = \frac{E}{r}$ Το μέγιστο ρεύμα, όταν $R_{\text{εξ}}=0$ και $V_{\pi}=0$

Η διατήρηση ενέργειας: Ισχύς που καταναλώνεται στην εσωτερική αντίσταση, r : $P_r = I^2 r$

Ισχύς που καταναλώνεται στο εξωτερικό κύκλωμα:

$$P_{\text{εξ}} = V_{\pi} I = I^2 R_{\text{εξ}}$$

Αρχή διατήρησης ισχύος σε κλειστό κύκλωμα:

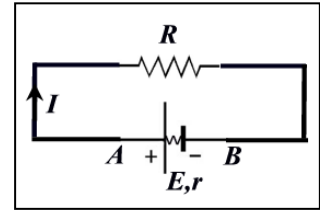
$$P_E = P_{\text{εξ}} + P_r \rightarrow EI = I^2 R + I^2 r$$

Απόδειξη νόμου Ohm: Με την αρχή διατήρησης ενέργειας σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα:

$$W_E = W_r + W_R \rightarrow E \cdot I \cdot t = I^2 r \cdot t + I^2 R t \rightarrow E = IR + Ir \rightarrow I = E / (R + r)$$

Άσκηση 7.1 Κλειστό κύκλωμα αποτελείται από ηλεκτρική πηγή με ΗΕΔ, $E=12V$, εσωτερική αντίσταση, $r=1\Omega$ και αντιστάτη με $R=2\Omega$. Να υπολογιστούν:

- Η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος.
- Η πολική τάση της πηγής.
- Η ισχύς που παρέχει η πηγή στο κύκλωμα.
- Η θερμική ισχύς που εκλύεται στην εσωτερική αντίσταση της πηγής.
- Η ισχύς που «δαπανάται» στο εξωτερικό κύκλωμα.



Λύση

α. Πρώτα υπολογίζω την ολική αντίσταση του κυκλώματος: $R_{ολ}=R+r=2+1=3\Omega$

Γράφω νόμο ohm για κλειστό κύκλωμα:

$$I = E/R_{ολ} = 4A$$

β. Από τον τύπο της πολικής τάσης:

$$V_{\pi} = E - Ir = 8V$$

γ. Η ισχύς που δίνει η πηγή στο κύκλωμα:

$$P_E = E \cdot I = 12 \cdot 4 = 48W$$

δ. Η ισχύς που δαπανάται στην αντίσταση της πηγής:

$$P_r = I^2 \cdot r = 16W$$

ε. Η ισχύς που δαπανάται στην εξωτερική αντίσταση

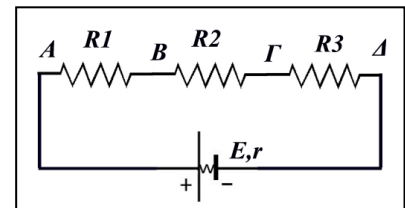
$$P_R = I^2 R = 32W$$

Βλέπουμε ότι η ισχύς διατηρείται:

$$P_E = P_r + P_R \rightarrow 48W = 16W + 32W$$

Άσκηση 7.2 Τρεις αντιστάτες $R_1=2\Omega$, $R_2=4\Omega$ και $R_3=6\Omega$ συνδέονται σε σειρά και τροφοδοτούνται από πηγή με ΗΕΔ, $E=36V$. Ο αντιστάτης, R_2 «καταναλώνει» ισχύ $P_2=16W$. Να υπολογιστούν:

- Η ένταση του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα.
- Η τάση στα άκρα του αντιστάτη R_1 .
- Η εσωτερική αντίσταση της πηγής, r
- Η πτώση τάσης μέσα στην πηγή.
- Η ισχύς που καταναλώνει το εξωτερικό κύκλωμα.



Λύση

$$\alpha. \quad P_2 = I^2 R_2 \rightarrow 16 = I^2 \cdot 4 \rightarrow I^2 = 4 \rightarrow I = 2A$$

$$\beta. \quad V_1 = I \cdot R_1 = 2 \cdot 2 = 4V$$

$$\gamma. \quad I = \frac{E}{R_{ολ}} \rightarrow 2 = \frac{36}{R_{ολ}} \rightarrow 2R_{ολ} = 36 \rightarrow R_{ολ} = 18\Omega$$

$$R_{ολ} = R_1 + R_2 + R_3 + r \rightarrow 18 = 2 + 4 + 6 + r \rightarrow 18 = 12 + r \rightarrow r = 18 - 12 \rightarrow r = 6\Omega$$

$$\delta. \quad V_r = I \cdot r = 2 \cdot 6 = 12V$$

$$\epsilon. \quad \text{Η ισχύς στο εξωτερικό κύκλωμα } P_{\epsilon} = I^2 (R_1 + R_2 + R_3) = 2^2 (2 + 4 + 6) = 4 \cdot 12 = 48W$$

$$\text{Η ισχύς που δίνει η πηγή στο κύκλωμα : } P_E = E \cdot I = 36 \cdot 2 = 72W$$

$$\text{Η ισχύς που καταναλώνει η εσωτερική } r. \quad P_r = I^2 r = 2^2 \cdot 6 = 24W$$

$$72W = 48W + 24W \text{ άρα ισχύει η αρχή διατήρησης της ενέργειας (ισχύος)}$$

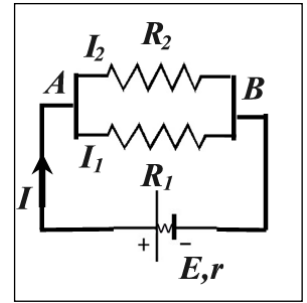
Άσκηση 7.3 Δύο αντιστάτες $R_1=4\Omega$ και $R_2=6\Omega$ συνδέονται παράλληλα και το σύστημα τροφοδοτείται από ηλεκτρική πηγή με στοιχείο $E=10V$, $r=0,1\Omega$. Να βρεθούν:

α. Η πολική τάση της πηγής.

β. Τα ρεύματα που διαρρέουν τους αντιστάτες.

γ. Η ενέργεια που «καταναλώνει» το εξωτερικό κύκλωμα σε $t=10\text{min}=600\text{s}$

δ. Η ισχύς που καταναλώνεται μέσα στην πηγή.



Λύση

$$\alpha. \quad R_{1,2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 2,4\Omega \quad R_{\text{ολ}} = R_{1,2} + r = 2,5\Omega \quad I = \frac{E}{R_{\text{ολ}}} = 4A$$

$$V_{AB} = E - Ir = 10 - 4 \cdot 0,1 = 9,6V \quad \text{ή} \quad V_{AB} = I \cdot R_{1,2} = 4 \cdot 2,4 = 9,6V$$

$$\beta. \quad I_1 = \frac{V_{AB}}{R_1} = 9,6/4 = 2,4A \quad I_2 = \frac{V_{AB}}{R_2} = 9,6/6 = 1,6A$$

$$\gamma. \quad W_{\text{εξ}} = I^2 R_{1,2} \cdot t = 23.040J$$

$$\delta. \quad P_I = I^2 \cdot r = 16 \cdot 0,1 = 1,6W$$