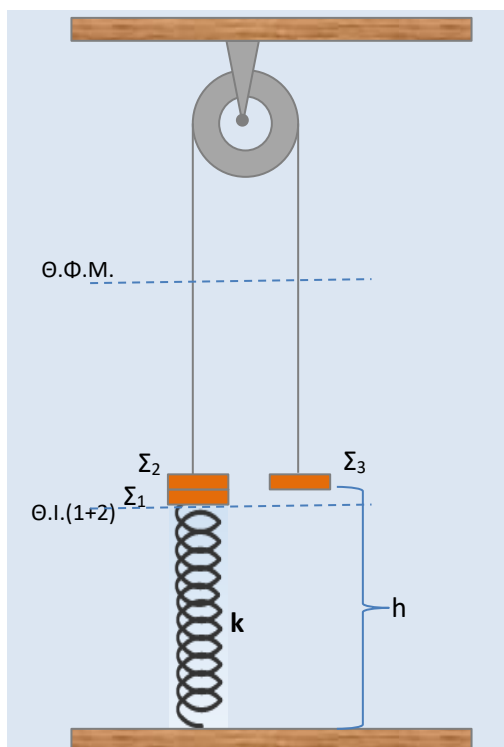


Ταλάντωση και χάσιμο επαφής



Στο σχήμα απεικονίζονται:

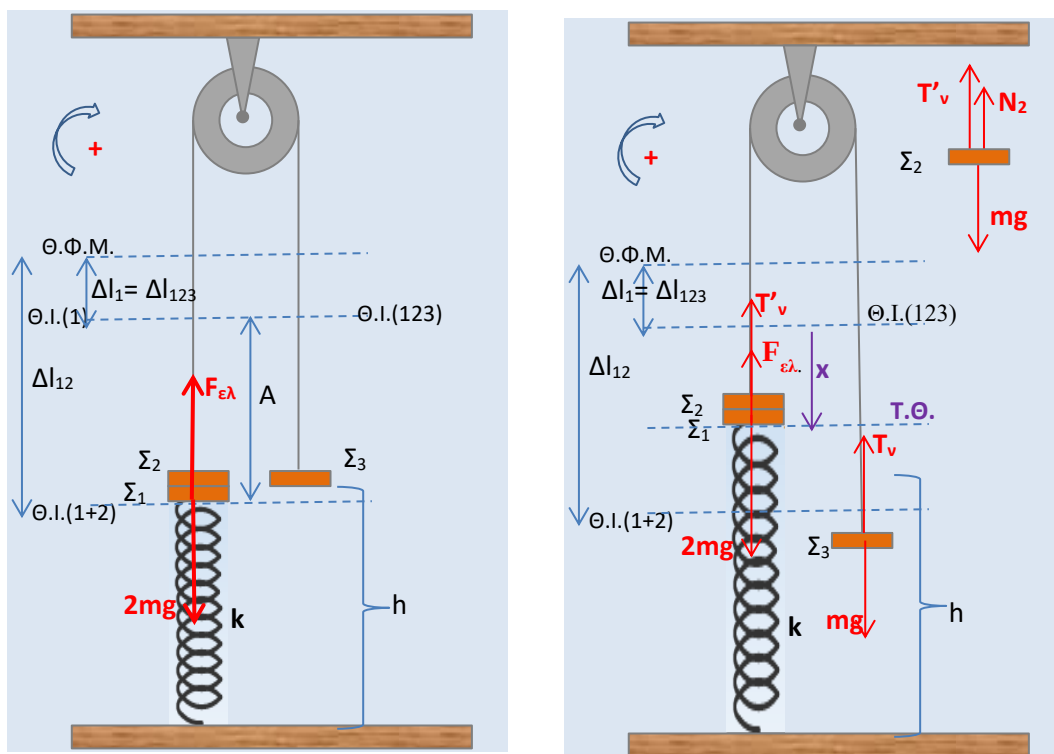
ελατήριο σταθεράς $k=100\text{N/m}$, τρία σώματα $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ ίσων μαζών $m_1=m_2=m_3=m=1\text{kg}$, αβαρής τροχαλία που μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές. Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 ισορροπούν πάνω στο ελατήριο, και το νήμα είναι χαλαρό. Αρχικά κρατάμε το σώμα Σ_3 . Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ αφήνουμε ελεύθερο το Σ_3 , οπότε το σύστημα κινείται, και σε κάποια θέση το Σ_2 χάνει την επαφή του με το Σ_1 , και κινείται μαζί με το Σ_3 .

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας : $g=10\text{m/s}^2$ και $h=0,4\text{m}$.

Υπολογίστε

1. τη θέση, την τάση του νήματος και τη χρονική στιγμή που χάθηκε η επαφή των Σ_1 και Σ_2 .
2. το πλάτος ταλάντωσης του Σ_1 μετά το χάσιμο επαφής του με το Σ_2
3. την απόσταση των d των Σ_1 και Σ_2 και τη χρονική στιγμή t_2 που το Σ_1 σταματά για 1^{η} φορά στιγμιαία
4. τη χρονική στιγμή που χτυπάει στο έδαφος το Σ_3 .

Απαντήσεις



1. $\Theta.I.(1+2): \Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = 2mg \Rightarrow k \cdot \Delta l_{12} = 2mg \Rightarrow \Delta l_{12} = 0.2m$
 $\Theta.I.(1+2+3): \Sigma F' = 0 \Rightarrow F'_{\varepsilon\lambda} + mg = 2mg \Rightarrow k \cdot \Delta l_{123} = mg \Rightarrow$
 $\Delta l_{123} = 0.1m$

Για να βρούμε τη θέση ισορροπίας του συστήματος ($\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$) θεωρήσαμε τα Σ_1, Σ_2 σαν να ήταν συγκολλημένα, γιατί όσο αυτά είναι σε επαφή, το όλο σύστημα κάνει αρμονική ταλάντωση, που θα αποδείξουμε στη συνέχεια.

$\Theta.I.(1, \text{μετά το χάσιμο επαφής του με το } \Sigma_2): \Sigma F = 0 \Rightarrow F_{\varepsilon\lambda} = 2mg \Rightarrow$
 $k \cdot \Delta l_1 = mg \Rightarrow \Delta l_1 = 0.1m = \Delta l_{123}$

Τυχαιά θέση απομάκρυνσης x από τη $\Theta.I.(1,2,3)$, με θετική φορά προς τη φορά κίνησης των σωμάτων:

$$\Sigma F_{12} = 2ma \Rightarrow -2mg + F'_{\varepsilon\lambda} + T'_v = 2ma \quad (1)$$

$$\Sigma F_3 = ma \Rightarrow mg - T_v = ma \quad (2)$$

$$\text{προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (2):} \Rightarrow -mg + k(\Delta l_{123} - x) = 3ma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -10 + 100(0.1 - x) = 3a \Rightarrow a = -\frac{100}{3}x \quad (3) \Rightarrow$$

Έτσι, παίρνοντας ως θετική φορά τη φορά κίνησης των σωμάτων, εφαρμόζουμε τον 2° νόμο του Νεύτωνα για τις εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα, κι έχουμε

$$\Sigma F_{123} = 3ma = -100x = -D_{123} \cdot x \text{ άρα το σύστημα κάνει αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς } D_{123} = k = 100\text{N/m με}$$

$$\text{γωνιακή συχνότητα } \omega = \sqrt{\frac{D_{123}}{3m}} = \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3} \text{ rad/s και περίοδο}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{10}{\sqrt{3}}} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{10} \text{ s}$$

ομοίως και το Σ_3 κάνει αρμονική ταλάντωση, στο χρονικό διάστημα

που δεν χάνεται η επαφή των $\Sigma 1$ και $\Sigma 2$, άρα

$$\Sigma F_3 = ma = -\frac{100}{3}x \Rightarrow mg - T_v = -\frac{100}{3}x \Rightarrow T_v = 10 + \frac{100}{3}x \quad (4)$$

Στο Σ_2 ασκούνται οι δυνάμεις: το βάρος του mg , η τάση του νήματος T'_v και η δύναμη επαφής N_2 από το Σ_1 . Αφού κάνει κι αυτό αρμονική ταλάντωση, με ίδια συχνότητα, άρα

$$\begin{aligned} \Sigma F_2 = ma &\Rightarrow T'_v + N_2 - mg = ma \stackrel{(3,4)}{\Rightarrow} 10 + \frac{100}{3}x + N_2 - 10 = -\frac{100}{3}x \\ &\Rightarrow N_2 = -\frac{200}{3}x \end{aligned}$$

Η επαφή χάνεται όταν $N_2 = 0 \Rightarrow x = 0$ δηλαδή στη θέση ισορροπίας του συστήματος, που συμπίπτει και με τη θέση ισορροπίας του Σ_1 , και σε συσπείρωση του ελατηρίου $\Delta l_1 = 0.1m$

Το πλάτος ταλάντωσης του συστήματος είναι:

$$A = \Delta l_{12} - \Delta l_{123} = 0,2 - 0,1 = 0,1m \text{ και η περίοδος}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{10}{\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{10} s.$$

$$\text{έτσι η χρονική στιγμή που χάνεται η επαφή είναι } t_1 = \frac{T}{4} = \frac{\sqrt{3}\pi}{20} s$$

και η τάση του νήματος τότε, δίνεται από την (4) για $x=0$, και είναι $T_v = 10N$.

2. Τη στιγμή της αποκόλλησης των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 , το Σ_1 βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του, άρα η ταχύτητα που θα έχει εκείνη τη στιγμή, είναι η μέγιστη της α.α.τ. που θα ακολουθήσει γι'αυτό:

$$v_{1,max.} = v_{123,max.} = \omega A = \frac{10\sqrt{3}}{3} \cdot 0.1 = \frac{\sqrt{3}}{3} m/s$$

$$v_{1,max.} = \omega_1 \cdot A_1 \text{ όμως } \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10 \frac{rad}{s} \Rightarrow A_1 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{30} m$$

3. Το σύστημα των Σ_2, Σ_3 θα κάνει ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, αφού

$$\Sigma F_{23} = mg - T_v + T_v - mg = 0 \text{ με ταχύτητα } v_{23} = \frac{\sqrt{3}}{3} m/s$$

Το σώμα $\Sigma 1$ θα σταματήσει για πρώτη φορά μετά την αποκόλληση, τη χρονική στιγμή

$$t_2 = t_1 + \frac{T_1}{4} = \frac{\sqrt{3}\pi}{20} s + \frac{\frac{2\pi}{\omega_1}}{4} = \frac{\sqrt{3}\pi}{20} s + \frac{\pi}{20} s = \frac{\pi(\sqrt{3}+1)}{20} s = 0.429s$$

Το Σ_2 κάνει Ε.Ο.Κ., άρα στο χρονικό διάστημα $\Delta t = \frac{T_1}{4} = \frac{\pi}{20} s$, κινούμενο με

ταχύτητα $\frac{\sqrt{3}}{3} m/s$ θα διανύσει απόσταση προς τα πάνω

$$d_2 = v_{23} \cdot \Delta t = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\pi}{20} = \frac{\pi\sqrt{3}}{60} m = 0.09m$$

Ενώ το Σ_1 θα βρίσκεται στο μέγιστο πλάτος του $x_1 = +A_1 = \frac{\sqrt{3}}{30} m = 0.057m$

Άρα θα απέχουν $d = 0.09m - 0.057m = 0.033m = 3,3cm$

4. $t_3 = t_1 + \frac{h-A}{v_{23}} = \frac{\sqrt{3}\pi}{20} s + \frac{0.4-0.057}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 0.272s + 0.594s = 0.866s$