

Μηχανικά Κύματα

Τρέχον αρμονικό κύμα

Ταχύτητα διάδοσης: $v_{\delta} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

απόσταση που διένυσε το κύμα

χρονικό διάστημα για την απόσταση αυτή

ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ: η ταχύτητα διάδοσης εξαρτάται **ΜΟΝΟ** από τις ιδιότητες του ελαστικού μέσου διάδοσης στο οποίο διαδίδεται το κύμα.

Θεμελιώδης εξίσωση κυματικής θεωρίας: $v_{\delta} = \lambda \cdot f$

συχνότητα σε Hz

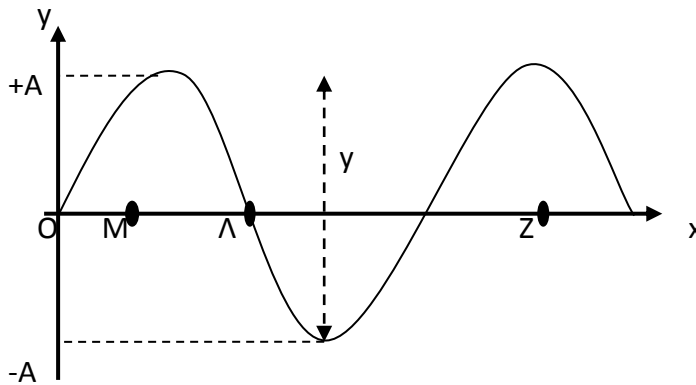
μήκος κύματος σε m

Εξίσωση αρμονικού κύματος: $y = A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda} \right)$

- ✓ Το (-) όταν το κύμα διαδίδεται προς τη θετική φορά του άξονα $x'x$ και το (+) όταν το κύμα διαδίδεται προς την αρνητική φορά του άξονα $x'x$.

Επεξήγηση ορισμένων μεγεθών

- $y \rightarrow$ απομάκρυνση από τη $\Theta.I.$ ενός υλικού σημείου.



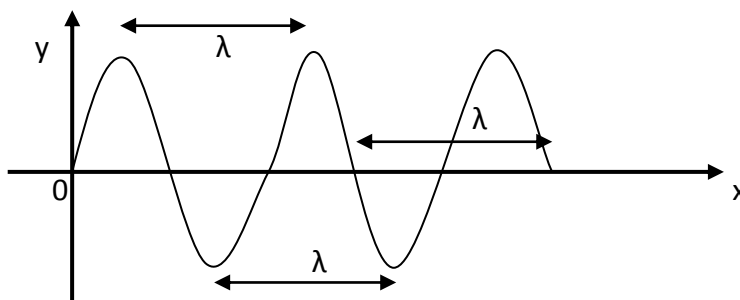
- $x \rightarrow$ θέση ενός σημείου πάνω στον άξονα $x'x$.

Κάθε σημείο βρίσκεται σε μια «δικιά του» καθορισμένη **θέση**, π.χ. $x_M=2m$, $x_\Lambda=5m$, $x_Z=13m$, γι' αυτό και η διαταραχή εξαιτίας του κύματος φτάνει στο **κάθε σημείο** σε **διαφορετική χρονική στιγμή**, προφανώς πρώτα στο M, μετά στο Λ και τέλος στο Z.

Άρα σημεία που είναι **πιο κοντά στο σημείο O**, ξεκινούν **πρώτα** την ταλάντωσή τους, συνεπώς έχουν και **μεγαλύτερη φάση** ταλάντωσης.

- $\lambda \rightarrow$ μήκος κύματος

Το **μήκος κύματος λ** είναι η **οριζόντια απόσταση** από όρος σε διαδοχικό όρος ή από κοιλάδα σε διαδοχική κοιλάδα, ή γενικότερα η οριζόντια **απόσταση** που διανύει το κύμα **σε χρόνο μίας περιόδου T** .



Εξίσωση απομάκρυνσης ενός υλικού σημείου M : $y_M = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} \pm \frac{x_M}{\lambda}\right)$

x_M η θέση για του σημείου M στον άξονα x'

ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ: η παραπάνω εξίσωση ισχύει μόνο για τις χρονικές στιγμές για τις οποίες $\rightarrow$

$$t \geq \frac{x_M}{v_\delta}$$

Διότι προφανώς το κύμα χρειάζεται κάποιο ορισμένο χρόνο για να φτάσει στο σημείο M και σε κάθε άλλο σημείο του άξονα x' .

Σύγκριση εξισώσεων (παράδειγμα)

$$\left. \begin{array}{l} y = 0,5\eta\mu(100\pi t - 4\pi x) \\ y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{1ος τρόπος} \\ \text{Κοινός παράγοντας } 2\pi \text{ για να} \\ \text{διαμορφωθεί η εξίσωση κύματος.} \end{array} \right]$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 0,5\eta\mu 2\pi(50t - 2x) \\ y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A=0,5m \\ \frac{t}{T} = 50t \text{ ή } \frac{1}{T} = 50 \text{ ή } T = \frac{1}{50} = 0,02m \\ \frac{x}{\lambda} = 2x \text{ ή } \frac{1}{\lambda} = 2 \text{ ή } \lambda = \frac{1}{2}m \text{ ή } \lambda = 0,5m \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 0,5\eta\mu(100\pi t - 4\pi x) \\ y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{2ος τρόπος} \\ \text{Επιμεριστική το } 2\pi \text{ στον ορισμό της} \\ \text{εξίσωσης.} \end{array} \right]$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 0,5\eta\mu(100\pi t - 4\pi x) \\ y = A\eta\mu\left(2\pi\frac{t}{T} - 2\pi\frac{x}{\lambda}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A=0,5m \\ 2\pi\frac{t}{T} = 100\pi t \text{ ή } \frac{2}{T} = 100 \text{ ή } T = 0,02s \end{array} \right\}$$

$$2\pi \frac{x}{\lambda} = 4\pi x \quad \text{ή} \quad \frac{2}{\lambda} = 4 \quad \text{ή} \quad \lambda = 0,5m$$

Ταχύτητα ταλάντωσης υλικού σημείου M: $v_M = v_{max} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} \pm \frac{x_M}{\lambda} \right)$

$$v_{max} = \omega \cdot A$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Δεν πρέπει να μπερδεύουμε την **ταχύτητα διάδοσης** του κύματος, με την **ταχύτητα ταλάντωσης** των υλικών σημείων του μέσου διάδοσης.

✓ Η **ταχύτητα της ταλάντωσης** ενός σημείου μπορεί να υπολογιστεί (εκτός της χρονικής εξίσωσης) και από **ΑΔΕΤ** εάν γνωρίζουμε τα υπόλοιπα μεγέθη (y_M , A , ω).

Επιτάχυνση ταλάντωσης υλικού σημείου M: $a_M = -a_{max} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} \pm \frac{x_M}{\lambda} \right)$

$$a_{max} = \omega^2 \cdot A$$

Εκτός της χρονικής εξίσωσης υπάρχει και η συνάρτηση της επιτάχυνσης με την απομάκρυνση y_M :

$$a_M = -\omega^2 \cdot \underbrace{A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} \pm \frac{x_M}{\lambda} \right)}_{y_M}$$

$$a_M = -\omega^2 \cdot y_M \quad (\text{με απόδειξη})$$

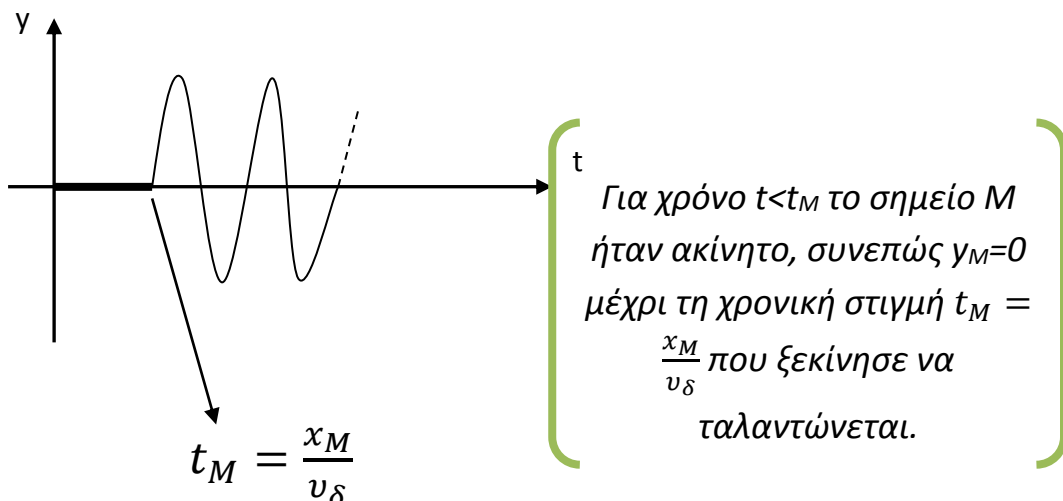
Συνισταμένη δύναμη που δέχεται το σημείο M: $F_M = -D \cdot y_M$

Δηλαδή: $F_M = -m\omega^2 A \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} \pm \frac{x_M}{\lambda} \right)$

ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ: Όλες οι εξισώσεις που αφορούν κάποιο υλικό σημείο του μέσου διάδοσης πρέπει να συνοδεύονται από περιορισμό στο χρόνο t:

$$t \geq \frac{x_M}{v_\delta}$$

Γραφική παράσταση απομάκρυνσης y συναρτήσει χρόνου t για υλικό σημείο M



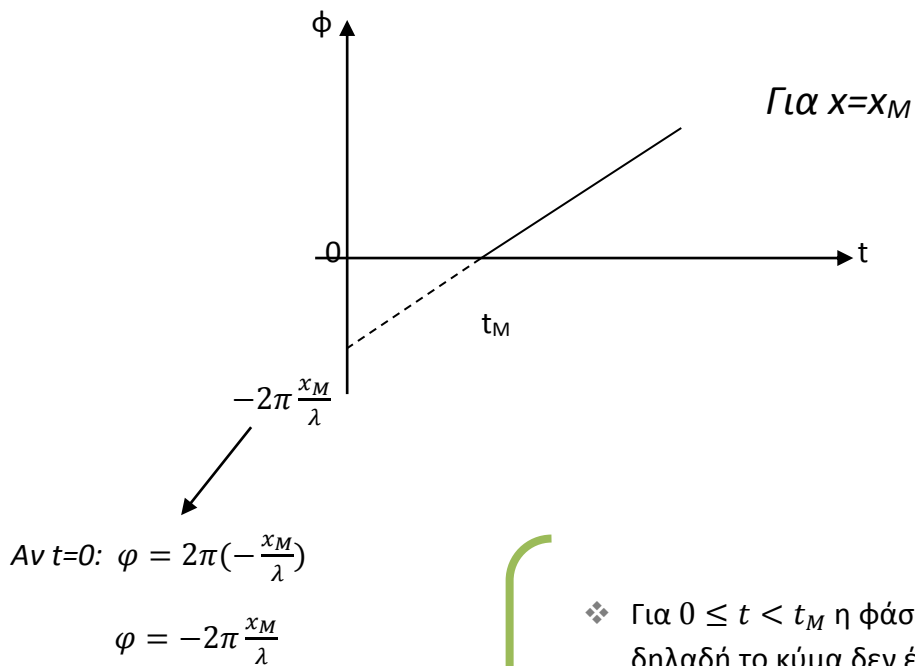
Φάση αρμονικού κύματος:

$$\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda}\right)$$

Όπως φαίνεται και στην εξίσωση, η φάση κύματος είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών: και του χρόνου t και της θέσης x .

Φάση ενός υλικού σημείου M :

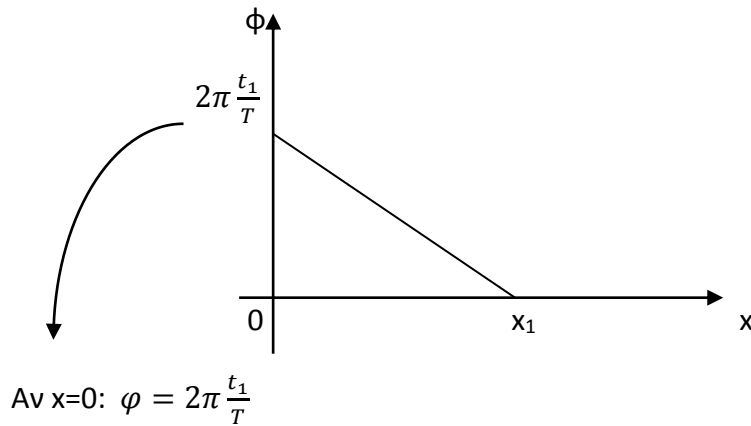
$$\varphi_M = 2\pi\left(\frac{t}{T} \pm \frac{x_M}{\lambda}\right)$$



- ❖ Για $0 \leq t < t_M$ η φάση είναι αρνητική, δηλαδή το κύμα δεν έχει φτάσει ακόμα στο M .
- ❖ Τη στιγμή t_M , το κύμα φτάνει στο M , το οποίο ξεκινά να ταλαντώνεται ($t_M = \frac{x_M}{v_\delta}$).
- ❖ Όσο περισσότερο χρόνο ταλαντώνεται ένα σημείο, τόσο μεγαλύτερη φάση έχει.

Φάση των υλικών σημείων του μέσου μια στιγμή $t=t_1$: $\varphi = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$

(φάση σε συνάρτηση με θέση)



- Όλα τα σημεία του μέσου διάδοσης έχουν διαφορετική φάση σε μια χρονική στιγμή t_1 .
- Η φάση είναι μικρότερη καθώς αυξάνεται η τιμή της θέσης x , δηλαδή σημεία με μεγαλύτερη τιμή x θα έχουν μικρότερη φάση φ , συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι φάσεις ελαττώνονται κατά τη φορά διάδοσης του κύματος.
- Τη χρονική στιγμή $t=t_1$, το κύμα φτάνει στη θέση x_1 (γι' αυτό και το σημείο αυτό έχει φάση $\varphi=0$, αφού μόλις ξεκινά την ταλάντωσή του), ενώ σημεία που βρίσκονται σε θέσεις $x > x_1$ έχουν φάση $\varphi < 0$ δηλαδή τα σημεία αυτά δεν έχουν αρχίσει ακόμα να ταλαντώνονται.

- ❖ Διαφορά φάσης του ίδιου σημείου σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές t_1 και t_2 ($t_2 > t_1$).

$$\Delta\varphi = 2\pi \left(\frac{t_2}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right) - 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right)$$

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{t_2}{T} - 2\pi \cancel{\frac{x_1}{\lambda}} - 2\pi \frac{t_1}{T} + 2\pi \cancel{\frac{x_1}{\lambda}}$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{T} (t_2 - t_1)$$

$$\boxed{\Delta\varphi = \frac{2\pi}{T} \Delta t}$$

- ❖ Διαφορά φάσης δύο σημείων σε μια δεδομένη χρονική στιγμή t .

$$\varphi_A = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_A}{\lambda} \right) \quad \text{και} \quad \varphi_B = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_B}{\lambda} \right)$$

{με $x_B > x_A$, άρα και $\varphi_A > \varphi_B$ }

$$\Delta\varphi = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_A}{\lambda} \right) - 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_B}{\lambda} \right)$$

$$\Delta\varphi = 2\pi \cancel{\frac{t}{T}} - 2\pi \frac{x_A}{\lambda} - 2\pi \cancel{\frac{t}{T}} + 2\pi \frac{x_B}{\lambda}$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (x_B - x_A)$$

$$\boxed{\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x}$$

- ✓ Και οι 2 προηγούμενες σχέσεις χρειάζονται απόδειξη για να χρησιμοποιηθούν σε επίλυση προβλημάτων.

ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ

- Αν στην παραπάνω σχέση ($\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x$), η **διαφορά των αποστάσεων** δύο σημείων από την πηγή Ο είναι **ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος λ** , τότε τα σημεία αυτά θα λέμε ότι βρίσκονται σε **συμφωνία φάσης**, δηλαδή θα έχουν συνεχώς (σε κάθε χρονική στιγμή) ίδια απομάκρυνση y από τη Θ.Ι. τους, καθώς και την ίδια ταχύτητα ταλάντωσης.
Άρα:

Αφού ισχύει $\Delta x = \kappa \cdot \lambda$, η σχέση γίνεται $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \kappa \lambda$ και με απλοποίηση των λ , προκύπτει: $\Delta\varphi = 2\kappa\pi \text{ rad}$

$$\text{Καθώς και: } y_A = A\eta\mu\varphi_A = A\eta\mu(\varphi_B + 2\kappa\pi) = A\eta\mu\varphi_B = y_B$$

- Αν όμως ισχύει η **διαφορά των αποστάσεων** είναι των σημείων από την πηγή είναι **περιττό πολλαπλάσιο του μισού μήκους κύματος λ** , τότε τα σημεία αυτά θα λέμε ότι βρίσκονται σε **αντίθεση φάσης**, δηλαδή θα έχουν συνεχώς αντίθετες ταχύτητες και αντίθετες απομακρύνσεις (εκτός της χρονικής στιγμής που διέρχονται ταυτόχρονα από τη Θ.Ι. τους που θα έχουν μόνο αντίθετες ταχύτητες).
Άρα:

Αφού ισχύει $\Delta x = (2\kappa + 1) \frac{\lambda}{2}$, η σχέση γίνεται $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (2\kappa + 1) \frac{\lambda}{2}$ και με απλοποίηση των 2 και λ , προκύπτει: $\Delta\varphi = (2\kappa + 1)\pi \text{ rad}$

$$\text{Επίσης: } y_A = A\eta\mu\varphi_A = A\eta\mu[\varphi_B + (2\kappa + 1)\pi] = -A\eta\mu\varphi_B = -y_B$$

Σχεδίαση στιγμιότυπου κύματος

1. Βρίσκουμε τη **θέση x_1** στην οποία έχει φτάσει το κύμα τη **χρονική στιγμή t_1** :

$$\text{➤ ή με } v_\delta = \frac{x_1}{t_1} \implies x_1 = v_\delta \cdot t_1 \implies x_1 = \dots$$

- Ή μηδενίζοντας τη φάση ($\phi=0$)

$$\phi = 0 \implies 2\pi \left(\frac{t_1}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right) = 0 \implies x_1 = \dots$$

2. Συγκρίνουμε την παραπάνω θέση x_1 με το μήκος κύματος λ , δηλαδή βρίσκουμε πόσα μήκη κύματος λ «χωράνε» στην απόσταση x_1

$$\text{Πλήθος μηκών κύματος } \lambda \implies N = \frac{x_1}{\lambda}$$

(Μερικές φορές βολεύει να υπολογίζουμε πόσα $\frac{\lambda}{4}$ «χωράνε» στην απόσταση x_1 , δηλαδή: $N = \frac{x_1}{\frac{\lambda}{4}}$)

3. Βρίσκουμε την **απομάκρυνση y του σημείου O ($x=0$)** για τη **χρονική στιγμή t_1** , καθώς και την απομάκρυνση y του σημείου με $x = \frac{\lambda}{4}$ εάν είναι απαραίτητο (δηλαδή όταν $y_0 \neq +A$ ή $y_0 \neq -A$)

4. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση κύματος όπου t το χρόνο t_1 για τον οποίο πρέπει να σχεδιάσουμε το στιγμιότυπο. Έτσι προκύπτει μια **εξίσωση y συναρτήσει x** , της οποίας η γραφική παράσταση αποτελεί το στιγμιότυπο και ξεκινάμε να σχεδιάζουμε, προσέχοντας ότι το στιγμιότυπο πρέπει «να κλείσει επάνω στον άξονα $x'x''$ », δηλαδή σε σημείο με $y=0$.

Παράδειγμα στιγμιότυπου κύματος

Να σχεδιαστεί στιγμιότυπο κύματος με εξίσωση $y = 7\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{2} - \frac{x}{4} \right)$ (S.I.) για τη χρονική στιγμή $t_1 = 5s$.

Από την εξίσωση του κύματος παρατηρούμε ότι:

$$A=7m, \quad T=2s \quad \text{και} \quad \lambda=4m, \quad \text{καθώς και} \quad v_\delta = \frac{\lambda}{T} = \frac{4}{2} = 2 \frac{m}{s}$$

$$1. \quad v_\delta = \frac{x_1}{t_1} \implies x_1 = v_\delta \cdot t_1 = 2 \cdot 5 = 10m$$

Άρα η σχεδίαση του στιγμιότυπου θα «σταματήσει» στη θέση $x_1 = 10m$.

2. Βρίσκουμε πόσα μήκη κύματος λ «χωράνε» στην απόσταση x_1 :

$$N = \frac{x_1}{\lambda} = \frac{10}{4} = 2,5 \quad \text{δηλαδή} \quad 2,5 \text{ μήκη κύματος.}$$

3. Βρίσκουμε την απομάκρυνση του σημείου O , θέτοντας στην εξίσωση $x=0$ και $t=t_1=5s$

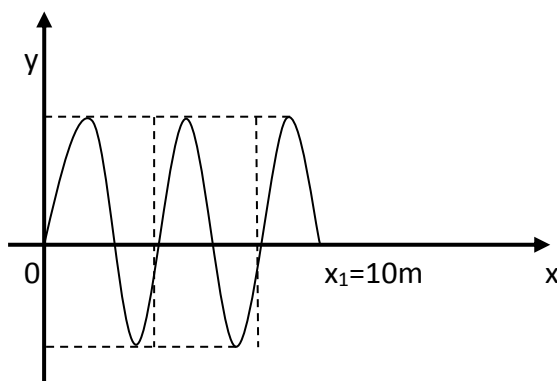
$$\begin{aligned} y_o &= 7\eta\mu 2\pi \left(\frac{5}{2} - \frac{0}{4} \right) = 7\eta\mu 2\pi \frac{5}{2} = 7\eta\mu 5\pi = 7\eta\mu(4\pi + \pi) \\ &= 7\eta\mu\pi = 0 \end{aligned}$$

Όταν $y_o=0$, πρέπει να βρούμε εάν το στιγμιότυπο θα σχεδιαστεί προς τα θετικά (προς το $+A$) ή προς τα αρνητικά (προς το $-A$),

θέτοντας στην εξίσωση: $x = \frac{\lambda}{4} = 1m$ και $t = t_1 = 5s$

$$\begin{aligned} y &= 7\eta\mu 2\pi \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{4} \right) = 7\eta\mu 2\pi \cdot 2,25 = 7\eta\mu 4,5\pi = 7\eta\mu \left(4\pi + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= 7\eta\mu \frac{\pi}{2} = 7m \end{aligned}$$

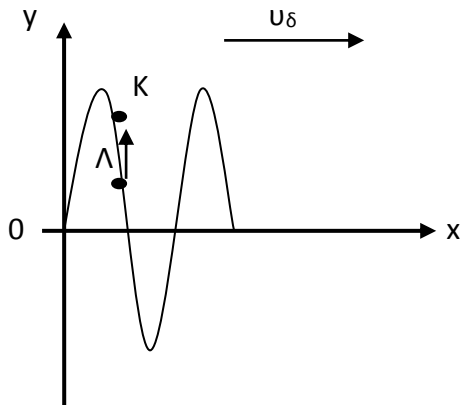
4. Για $t = t_1 = 5s$: $y = 7\eta\mu 2\pi \left(2,5 - \frac{x}{4} \right)$



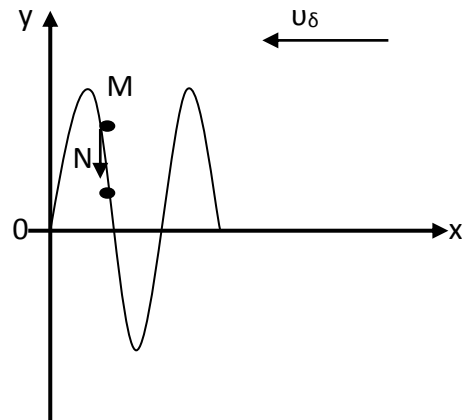
Ο σχεδιασμός του στιγμιότυπου ξεκίνησε από $y=0$, πήγε προς τα θετικά (προς το $+A$), δημιουργήθηκαν 2,5 μήκη κύματος και τελείωσε στη θέση $x_1=10m$.

Φορά κίνησης των σημείων του ελαστικού μέσου

Κάθε υλικό σημείο του ελαστικού μέσου τείνει να κινηθεί έτσι, ώστε να λάβει την απομάκρυνση που έχουν τα αμέσως προηγούμενα σημεία από αυτό.

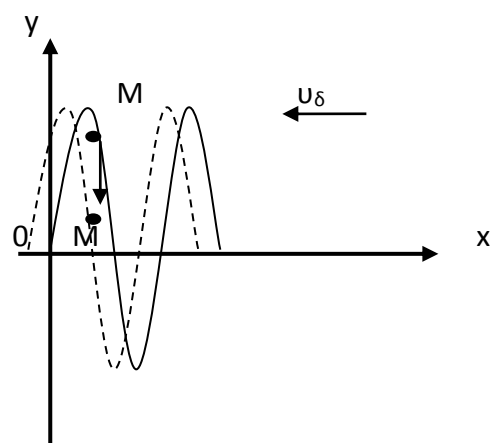
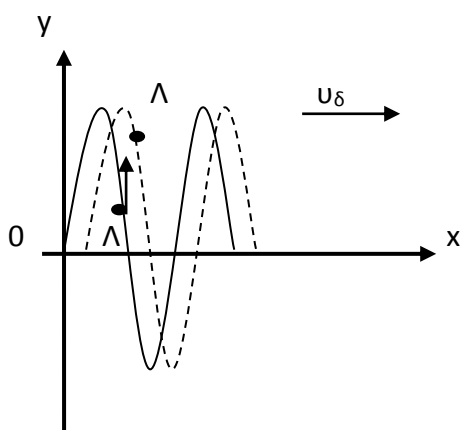


(φορά προς τα θετικά)



(φορά προς τα αρνητικά)

Μπορούμε να το ελέγξουμε σχεδιάζοντας ένα «γρήγορο» στιγμιότυπο για μια χρονική στιγμή $t + \Delta t$



Αρμονικό κύμα με αρχική φάση

→ Τι σημαίνει αρχική φάση φ_0 για ένα κύμα;

- ❖ Είτε τη χρονική στιγμή $t=0$, το υλικό σημείο Ο ($x=0$) **δεν έχει αρχίσει ακόμα να ταλαντώνεται** (το κύμα δεν έχει φτάσει ακόμα στο σημείο Ο).
- ❖ Είτε έχει ήδη **αρχίσει να ταλαντώνεται πριν τη στιγμή που θεωρούμε $t=0$** (δηλαδή το κύμα έχει προχωρήσει πέρα από το σημείο Ο. Αν θέλουμε να βρούμε που έχει φτάσει το κύμα τη στιγμή $t=0$, αρκεί να μηδενίσουμε τη φάση ($\phi=0$))

$$\varphi = 0 \implies 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \varphi_0 = 0 \implies x = \dots\dots\dots$$

- ❖ Είτε το σημείο Ο ($x=0$) **αρχίζει να ταλαντώνεται** από τη Θ.Ι. του με **αρνητική ταχύτητα**.

Όταν υπάρχει αρχική φάση, η εξίσωση του κύματος γράφεται ως εξής:

$$y = A\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right]$$

{ή βγάζοντας κοινό παράγοντα 2π } $y = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \frac{\varphi_0}{2\pi} \right)$