

Απλή Αρμονική Ταλάντωση και χάσιμο επαφής.

Γενικά, όταν ένα σώμα βρίσκεται σε επαφή με ένα δεύτερο σώμα ή μια επιφάνεια δέχεται λόγω της επαφής μια δύναμη F . Οριακά, η επαφή χάνεται όταν η δύναμη αυτή μηδενιστεί ($F=0$).

Όταν ένα σύστημα δύο σωμάτων με μάζες m_1 και m_2 βρίσκεται στερεωμένο στο ελεύθερο άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, θα ισχύουν:

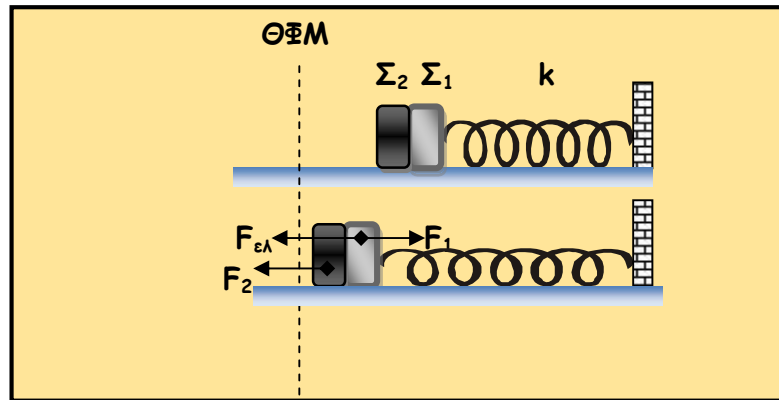
- Για το σύστημα: $D = k = (m_1 + m_2)\omega^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m_1 + m_2}$ (1)
- Για το σώμα μάζας m_1 : $D_1 = m_1\omega^2 \xRightarrow{(1)} D_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}k$
- Για το σώμα μάζας m_2 : $D_2 = m_2\omega^2 \xRightarrow{(1)} D_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}k$



Μπορούμε να μελετήσουμε την ταλάντωση του συστήματος των δύο σωμάτων, αλλά και την ταλάντωση κάθε σώματος ξεχωριστά, προσέχοντας ότι η σταθερά επαναφοράς είναι ίση με k μόνο για την ταλάντωση του συστήματος. Προσοχή επίσης χρειάζεται και στην εύρεση των δυνάμεων που συμμετέχουν στην ταλάντωση του κάθε σώματος. Παρακάτω αναλύονται κάποιες περιπτώσεις.

A. Οριζόντιο ελατήριο με δύο σώματα

Έστω ότι στο ελεύθερο άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k υπάρχει στερεωμένο σώμα Σ_1 μάζας m_1 και σε επαφή με αυτό (χωρίς να είναι κολλημένο) υπάρχει δεύτερο σώμα Σ_2 μάζας m_2 . Συμπιέζουμε το ελατήριο με τα δύο σώματα να είναι σε επαφή και κάποια στιγμή αφήνουμε το σύστημα να κινηθεί ελεύθερα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

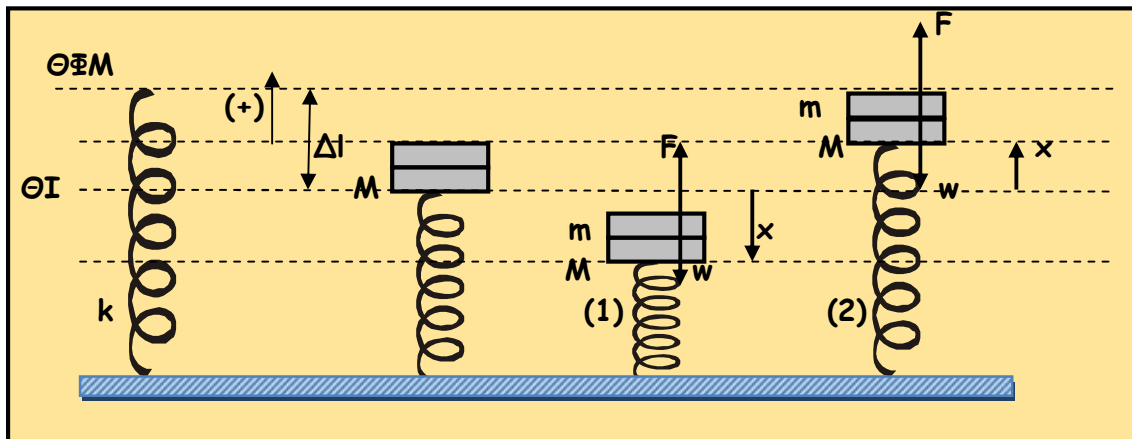


- Το σύστημα των δύο σωμάτων εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D=k=(m_1+m_2)\omega^2$. Η δύναμη επαναφοράς του συστήματος είναι η δύναμη από το ελατήριο: $\Sigma F=F_{ελ}=-Dx$.
- Το σώμα Σ_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D_1=m_1\omega^2$. Η δύναμη επαναφοράς για το σώμα αυτό είναι η συνισταμένη της $F_{ελ}$ και της F_1 (δύναμη επαφής από το σώμα μάζας m_2).
- Το σώμα Σ_2 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D_2=m_2\omega^2$. Η δύναμη επαναφοράς για το σώμα αυτό είναι η F_2 (δύναμη επαφής από το σώμα μάζας m_1 και αντίδραση της F_1).
- **Η επαφή των δύο σωμάτων θα χαθεί στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου**, αφού αμέσως μετά η δύναμη του ελατηρίου θα επιβραδύνει το σώμα Σ_1 , ενώ το σώμα Σ_2 θα συνεχίσει να κινείται με την ίδια ταχύτητα. Εξάλλου, η δύναμη F_2 θα μηδενιστεί στη θέση φυσικού μήκους (που ταυτίζεται με τη θέση ισορροπίας), αφού λειτουργεί ως δύναμη επαναφοράς για την ταλάντωση του σώματος Σ_2 . Αλλά ο μηδενισμός της F_2 (άρα και της F_1) σημαίνει ότι χάνεται η επαφή των δύο σωμάτων.
- Μετά το χάσιμο της επαφής, το σώμα Σ_1 θα εκτελέσει νέα απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D=k=m_1\omega_1^2$, δηλαδή με **διαφορετική κυκλική συχνότητα ω_1** . Το πλάτος της νέας ταλάντωσης (A_1) μπορεί να υπολογιστεί αν σκεφτούμε ότι η ταχύτητα του συστήματος Σ_1 και Σ_2 αμέσως πριν χαθεί η επαφή είναι ίση με την ταχύτητα του Σ_2 αμέσως μετά το χάσιμο της επαφής. Επειδή οι ταχύτητες αυτές αφορούν τη θέση ισορροπίας των δύο ταλαντώσεων, θα είναι σε μέτρο ίσες με τις αντίστοιχες μέγιστες ταχύτητες:

$$v_{\max} = v_{1,\max} \rightarrow \omega A = \omega_1 A_1$$

B. Κατακόρυφο ελατήριο με δύο σώματα

Έστω ότι στο άνω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k βρίσκεται σύστημα δύο σωμάτων με μάζες M και m το οποίο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A . Όταν ζητείται κάποιο μέγεθος της ταλάντωσης ώστε να μη χάνεται (ή οριακά να χάνεται) η επαφή των δύο σωμάτων, ακολουθούμε την εξής διαδικασία:



- Η σταθερά επαναφοράς του συστήματος των δύο σωμάτων είναι διαφορετική από τη σταθερά επαναφοράς για την ταλάντωση κάθε σώματος χωριστά. Κάθε σώμα εκτελεί ταλάντωση με την ίδια γωνιακή συχνότητα με αυτή του συστήματος, οπότε είναι:
 - Για το σύστημα: $D = (M + m)\omega^2$
 - Για το σώμα μάζας M : $D_1 = M\omega^2$
 - Για το σώμα μάζας m : $D_2 = m\omega^2$
- Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα μάζας m είναι το βάρος του w και η δύναμη επαφής F από το σώμα μάζας M . Η συνισταμένη τους είναι η δύναμη επαναφοράς της ταλάντωσης του. Με θετική τη φορά προς τα πάνω, είναι:

$$\Sigma F = -D_2 x \quad \text{ή} \quad F - w = -D_2 x \quad \text{ή} \quad F = mg - D_2 x$$

- Αφού θετική είναι η φορά προς τα πάνω, κάτω από τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης (σχ.1) είναι $x < 0$, άρα $F > 0$. Δηλαδή η επαφή των σωμάτων **δεν μπορεί να χαθεί κάτω από τη ΘΙ**, αφού για να συμβεί αυτό θα πρέπει να γίνει $F=0$.

- Πάνω από τη ΘΙ (σχ.2) είναι $x > 0$, άρα θα γίνει $F=0$ όταν:

$$mg = D_2 x = m\omega^2 x \quad \text{ή} \quad g = \omega^2 x$$

Άρα, το μέγιστο πλάτος που μπορεί να έχει η ταλάντωση ώστε να μη χάνεται η επαφή, είναι:

$$g = \omega^2 A_{\max} \quad \text{ή} \quad A_{\max} = \frac{g}{\omega^2}$$

Αν η ταλάντωση έχει πλάτος μικρότερο από αυτή την τιμή, η επαφή των σωμάτων δεν θα χαθεί. Αν έχει πλάτος μεγαλύτερο, η επαφή θα χαθεί όταν το σύστημα βρίσκεται πάνω από τη ΘΙ, σε απομάκρυνση $x = g/\omega^2$.

Η θέση αυτή ταυτίζεται με τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου. Αν εφαρμόσουμε τη συνθήκη $\Sigma F=0$ στη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης:

$$\Sigma F = 0 \rightarrow w = F_{\varepsilon\lambda} \rightarrow (m_1 + m_2)g = k\Delta l \rightarrow$$

$$(m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)\omega^2 \Delta l \rightarrow \Delta l = \frac{g}{\omega^2}$$

- Σε μια ταλάντωση δεδομένου πλάτους A , για να μη χάνεται η επαφή, θα πρέπει η ελάχιστη δύναμη επαφής να είναι μεγαλύτερη από μηδέν (οριακά ίση με μηδέν). Είναι:

$$F_{\min} = mg - D_2 A \geq 0 \quad \text{ή} \quad mg \geq D_2 A \quad \text{ή} \quad mg \geq m\omega^2 A \quad \text{ή}$$

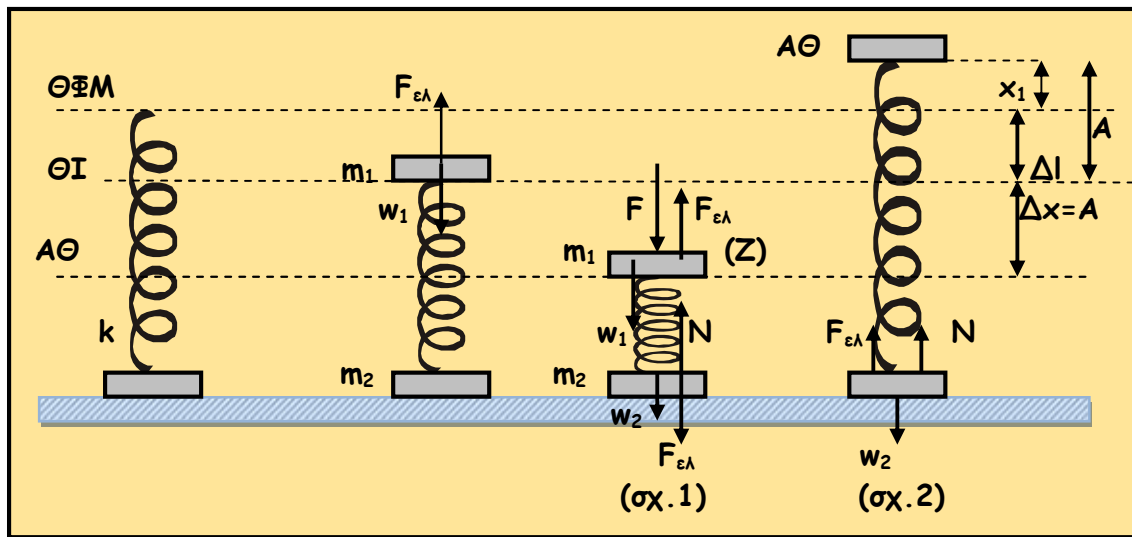
$$\omega \leq \sqrt{\frac{g}{A}} \quad \text{ή} \quad \frac{2\pi}{T} \leq \sqrt{\frac{g}{A}} \quad \text{ή} \quad T \geq 2\pi \sqrt{\frac{A}{g}}$$

Άρα, η ελάχιστη δυνατή περίοδος ταλάντωσης για να μη χάνεται η επαφή είναι:

$$T_{\min} = 2\pi \sqrt{\frac{A}{g}}$$

Γ. Χάσιμο επαφής σώματος από το έδαφος

Στα άκρα κατακόρυφου ελατηρίου είναι στερεωμένα δύο σώματα με μάζες m_1 και m_2 . Ζητείται το μέτρο της κατακόρυφης δύναμης F που πρέπει να ασκούμε αρχικά στο σώμα μάζας m_1 κρατώντας το ακίνητο, έτσι ώστε όταν το αφήσουμε, αυτό μόλις να προκαλέσει την ανύψωση του σώματος μάζας m_2 .



- Στη θέση ισορροπίας του σώματος μάζας m_1 , είναι:

$$\Sigma F = 0 \text{ ή } w_1 = F_{ελ} \text{ ή } m_1 g = k \Delta l \text{ ή } \Delta l = \frac{m_1 g}{k} \quad (1)$$

- Συμπιέζουμε επιπλέον το ελατήριο κατά Δx μέχρι τη θέση Ζ. Εκεί κρατάμε το σώμα ακίνητο ασκώντας δύναμη F , οπότε:

$$\Sigma F = 0 \text{ ή } w_1 + F = F_{ελ} \text{ ή } m_1 g + F = k(\Delta l + \Delta x)$$

και λόγω της (1):

$$m_1 g + F = k\left(\frac{m_1 g}{k} + \Delta x\right) \text{ ή } m_1 g + F = m_1 g + k \Delta x \text{ ή } \Delta x = \frac{F}{k} \quad (2)$$

- Αφήνουμε το σώμα από τη θέση Ζ, οπότε εκτελεί ταλάντωση με πλάτος $A = \Delta x$. Κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του m_1 , το σώμα μάζας m_2 δέχεται το βάρος του w_2 , τη δύναμη N από το έδαφος και τη δύναμη $F_{ελ}$ από το ελατήριο.
- Όταν το ελατήριο είναι συμπιεσμένο (σχ.1), η δύναμη από το ελατήριο στο σώμα m_2 έχει φορά προς τα κάτω, οπότε για το σώμα m_2 είναι:

$$\Sigma F = 0 \text{ ή } N = w_2 + F_{ελ}$$

Στην περίπτωση αυτή, είναι $N > 0$, οπότε δεν μπορεί να χαθεί η επαφή με το έδαφος.

- Όταν το ελατήριο είναι επιμηκυμένο (σχ.2), η δύναμη από το ελατήριο στο σώμα m_2 έχει φορά προς τα πάνω. Έστω ότι στην πάνω ακραία θέση της ταλάντωσης του m_1 , το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά x_1 . Τότε, η δύναμη από το ελατήριο στο m_2 έχει μέτρο $F_{ελ} = kx_1$ (ίδια με τη δύναμη που ασκείται στο m_1). Οπότε, αν τότε μόλις που χάνεται η επαφή του m_2 με το δάπεδο, θα είναι $N = 0$ και:

$$\Sigma F = 0 \text{ ή } N + F_{\epsilon\lambda} = w_2 \text{ ή } 0 + kx_1 = m_2g \text{ ή } x_1 = \frac{m_2g}{k} \quad (3)$$

- Το πλάτος της ταλάντωσης του m_1 είναι $A = \Delta x = x_1 + \Delta l$, οπότε, από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει:

$$\frac{F}{k} = \frac{m_1g}{k} + \frac{m_2g}{k} \text{ ή } F = m_1g + m_2g$$

- Άρα, όταν η δύναμη F έχει μέτρο ίσο με το άθροισμα των βαρών των δύο σωμάτων, η επαφή του m_2 με το έδαφος χάνεται οριακά, όταν το m_1 βρίσκεται στην άνω ακραία θέση της ταλάντωσής του.