

**ΦΥΣΙΚΗ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΛΥΚΕΙΟΥ**

Κεφάλαιο 6^ο

**ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ
ΚΥΜΑΤΑ**

Κεφάλαιο 7^ο

ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

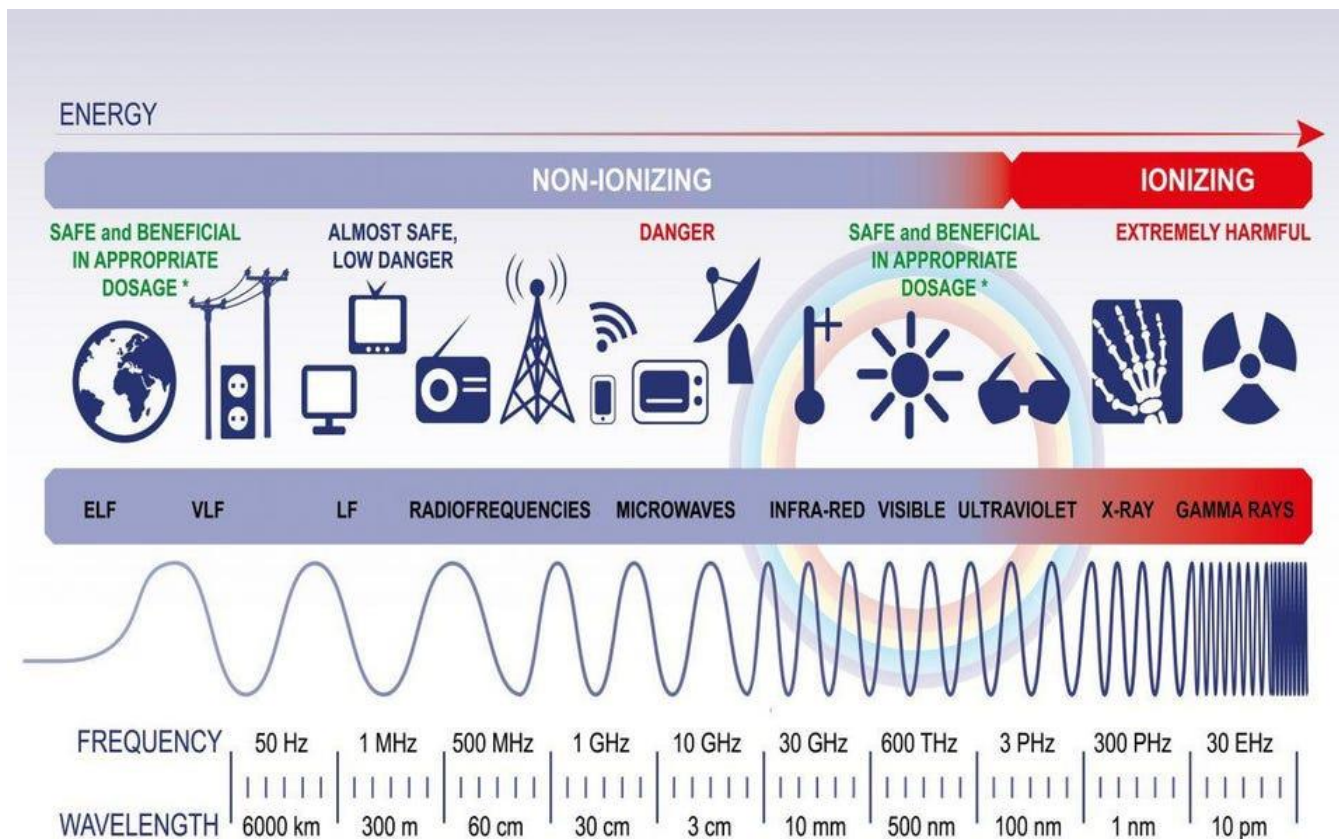
**Ομάδα Φυσικής
Α. ΛΙΒΑΝΟΣ
Α. ΤΖΙΜΑ
Χ. ΑΓΡΙΟΔΗΜΑΣ**

Περιεχόμενα

6. Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα	4
6.1 Παραγωγή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.	4
6.2 Φάσμα ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας.....	7
6.3 Λυμένα παραδείγματα.....	9
7. Κβαντομηχανική	12
7.1 Ακτινοβολία μέλανος σώματος.....	12
7.1.1 Τι είναι μέλαν σώμα και τι ακτινοβολία του μέλανος σώματος;	12
7.1.2 Ένταση ακτινοβολίας, I.....	14
7.1.3 Φάσμα θερμικής ακτινοβολίας.....	15
7.1.4 Νόμοι ακτινοβολίας μέλανος σώματος.	16
7.1.5 Η ερμηνεία της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος.	17
7.1.6 Λυμένα Παραδείγματα	22
7.2 Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο.....	26
7.2.1 Εξαγωγή ηλεκτρονίων από μέταλλα.	26
7.2.2 Περιγραφή φωτοηλεκτρικού φαινομένου	27
7.2.3 Περιγραφή της διάταξης για τη μελέτη του φωτοηλεκτρικού φαινομένου	28
7.2.4 Πειραματικές διαπιστώσεις από τη μελέτη του φωτοηλεκτρικού φαινομένου	29
7.2.5 Αποτυχία ερμηνείας του φωτοηλεκτρικού φαινομένου από την κλασική θεωρία.....	30
7.2.6 Θεωρία Einstein. Εξήγηση του φωτοηλεκτρικού φαινομένου.....	32
7.2.7 Ερμηνεία των πειραματικών δεδομένων με βάση τη φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein	33
7.2.8 Η ορμή των φωτονίων	37
7.2.9 Λυμένα παραδείγματα.....	38
7.3 Φαινόμενο Compton.....	44
7.3.1 Εισαγωγή-Ακτίνες X (Ακτίνες Röntgen)	44
7.3.2 Φαινόμενο Compton.....	46
7.3.3 Ερμηνεία φαινομένου με βάση την κβαντική θεώρηση.....	48
7.3.4 Μαθηματική περιγραφή και χρήσιμες σχέσεις	48
7.3.5 Λυμένα παραδείγματα.....	52
7.4 Η κυματική φύση της ύλης.....	58
7.4.1 Κυματοσωματιδιακός дуΐσμός του φωτός	58
7.4.2 Υπόθεση de Broglie	58
7.4.3 Λυμένα παραδείγματα.....	59
7.5 Η αρχή της αβεβαιότητας ή αρχή της απροσδιοριστίας.....	61
7.5.1 Μαθηματική έκφραση της αρχής της αβεβαιότητας.....	62
7.5.2 Λυμένα παραδείγματα.....	67
7.6 Κυματοσυνάρτηση και εξίσωση Schrodinger, (Σρέντινγκερ).....	68
Βιβλιογραφία.....	70

Κεφάλαιο 6.

Ηλεκτρομαγνητικά κύματα



6. Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα

6.1 Παραγωγή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.

Ηλεκτρομαγνητικό κύμα είναι η ταυτόχρονη διάδοση ενός ηλεκτρικού και ενός μαγνητικού πεδίου.

Γενικότερα «είναι εκπομπή στον χώρο ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας υπό μορφή κυμάτων που ονομάζονται ηλεκτρομαγνητικά κύματα.»

Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα διαδίδονται στο κενό με την ταχύτητα του φωτός. Σε όλα τα άλλα υλικά διαδίδονται με μικρότερη ταχύτητα.

Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα δημιουργούνται από **μεταβαλλόμενα** ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία. Ένα σταθερό ηλεκτρικό πεδίο ή ένα σταθερό μαγνητικό πεδίο δεν παράγει ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Αυτό σημαίνει ότι ούτε τα ακίνητα φορτία ούτε τα φορτία που κινούνται με σταθερή ταχύτητα (σταθερά ρεύματα) μπορούν να δημιουργήσουν ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Όταν, όμως, έχουμε ηλεκτρικά φορτία που επιταχύνονται, τα μεταβαλλόμενα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία που δημιουργούν έχουν ως αποτέλεσμα την παραγωγή ηλεκτρομαγνητικού κύματος. Επομένως:

Η αιτία δημιουργίας του ηλεκτρομαγνητικού κύματος είναι η επιταχυνόμενη κίνηση των ηλεκτρικών φορτίων.

Μηχανισμός δημιουργίας ηλεκτρομαγνητικού κύματος

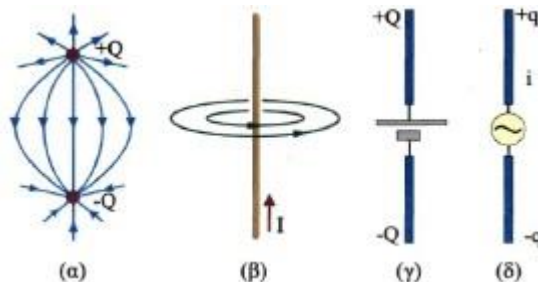
Τα **ταλαντούμενα ηλεκτρικά δίπολα** είναι ένα σύστημα δύο μεταλλικών ράβδων συνδεδεμένες με πηγή εναλλασσόμενης τάσης με αποτέλεσμα να αποκτήσουν ετερόσημα φορτία $+q$, $-q$ που μεταβάλλονται ημιτονοειδώς με το χρόνο, αποτελούν κοινή μέθοδο παραγωγής ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στους ραδιοφωνικούς και τηλεοπτικούς σταθμούς. Κατά την ταλάντωση του ηλεκτρικού φορτίου στην κεραία:

- ✓ όταν τα φορτία στα άκρα της έχουν μέγιστη τιμή, το ρεύμα σ' αυτή είναι μηδέν, και
- ✓ όταν τα φορτία στα άκρα της μηδενίζονται, η κεραία διαρρέεται από ρεύμα μέγιστης έντασης.

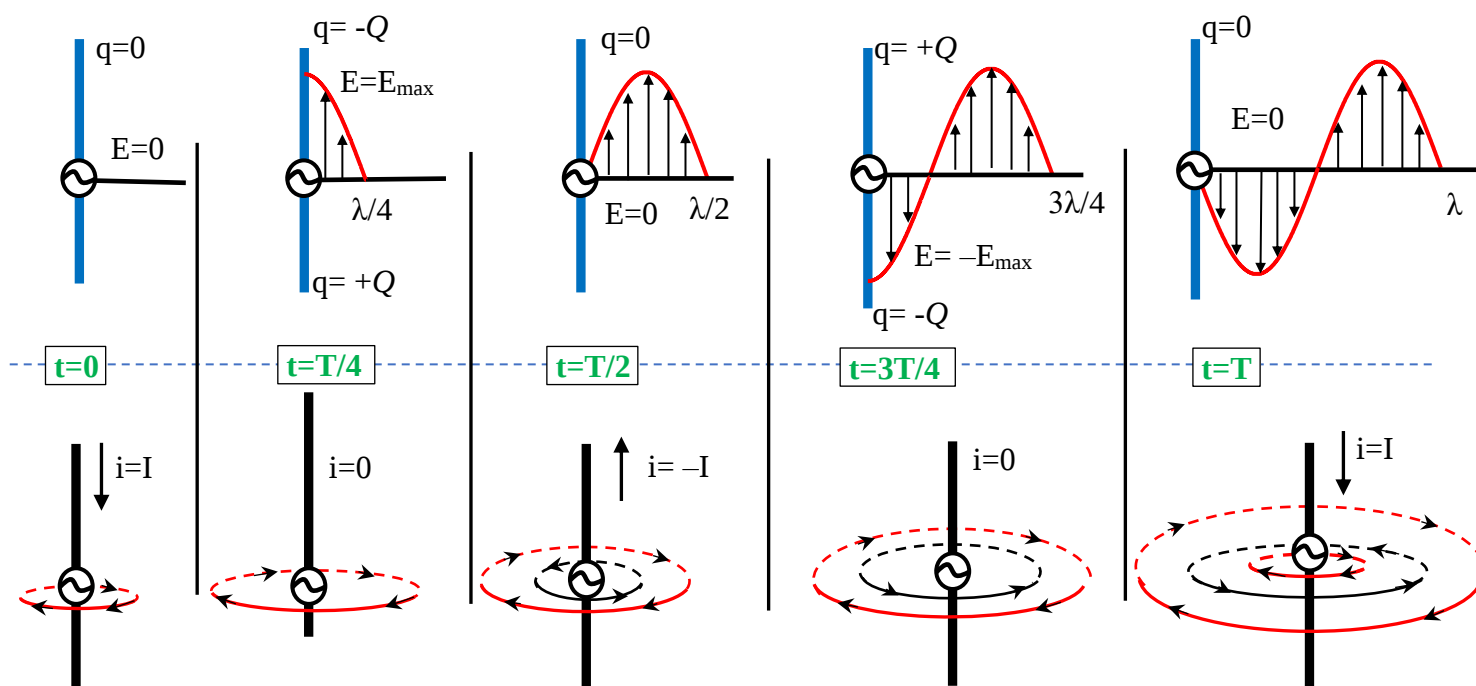
(α) Ηλεκτρικό πεδίο δύο σημειακών φορτίων. (β) Μαγνητικό πεδίο ευθύγραμμου αγωγού, (γ) Μεταλλικοί αγωγοί συνδέονται με πηγή συνεχούς τάσης. Οι αγωγοί φορτίζονται με φορτία $\pm Q$. (δ) Οι αγωγοί συνδέονται με γεννήτρια εναλλασσόμενης τάσης. Το φορτίο των αγωγών μεταβάλλεται ημιτονοειδώς με το χρόνο. Η διάταξη διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα.



Ο Τζέιμς Κλερκ Μάξγουελ (James Clerk Maxwell, 13 Ιουνίου 1831 – 5 Νοεμβρίου 1879) ήταν Σκωτσέζος θεωρητικός φυσικός. Το πιο επιφανές επίτευγμά του ήταν η διατύπωση μιας σειράς εξισώσεων που ένωσαν προηγουμένως άσχετες παρατηρήσεις, πειράματα και εξισώσεις ηλεκτρισμού, μαγνητισμού και οπτικής σε μία συνεπή θεωρία. Η θεωρία του κλασικού ηλεκτρομαγνητισμού καταδεικνύει ότι ο ηλεκτρισμός, ο μαγνητισμός και το φως είναι όλα εκδηλώσεις του ίδιου φαινομένου, καλούμενου ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Τα επιτεύγματα του Μάξγουελ που αφορούν τον ηλεκτρομαγνητισμό αποκαλούνται «η δεύτερη σημαντικότερη ενοποίηση στη φυσική», μετά την πρώτη που πέτυχε ο Ισαάκ Νεύτων.



Στα παρακάτω σχήματα απεικονίζεται ο κύκλος λειτουργίας του ταλαντούμενου ηλεκτρικού διπόλου.



- I. Τη χρονική στιγμή $t=0$ τα φορτία στα άκρα των αγωγών είναι μηδέν και επομένως δεν έχει δημιουργηθεί ηλεκτρικό πεδίο ($E=0$). Οι αγωγοί διαρρέονται από μέγιστο ρεύμα και στο χώρο έχει δημιουργηθεί μαγνητικό πεδίο.
- II. Τη χρονική στιγμή $t=T/4$ τα φορτία στα άκρα των αγωγών έχουν πάρει τη μέγιστη τιμή τους $+Q$ και $-Q$. Το ηλεκτρικό πεδίο που είχε δημιουργηθεί στο χρονικό διάστημα 0 έως $T/4$ έχει διαδοθεί κατά $\lambda/4$ απομακρυνόμενο από τους αγωγούς. Το ρεύμα μηδενίζεται στιγμιαία. Το μαγνητικό πεδίο που είχε δημιουργηθεί απλώνεται στο χώρο.
- III. Τη χρονική στιγμή $t=T/2$ τα φορτία στα άκρα των ράβδων μηδενίζονται. Το ηλεκτρικό πεδίο έχει απομακρυνθεί κατά $\lambda/2$ από τους αγωγούς. Το ηλεκτρικό ρεύμα που διαρρέει τη χρονική στιγμή $t = T/2$ τις ράβδους είναι μέγιστο με αντίθετη όμως φορά. Το μαγνητικό πεδίο δημιουργείται εκ νέου με αντίθετη φορά των δυναμικών γραμμών του.
- IV. Τη χρονική στιγμή $t=3T/4$ τα φορτία στα άκρα των ράβδων έχουν πάρει μέγιστες τιμές $-Q$ και $+Q$. Το ηλεκτρικό πεδίο έχει απομακρυνθεί κατά $3\lambda/4$ από τους αγωγούς. Το ηλεκτρικό ρεύμα είναι μηδέν. Το μαγνητικό πεδίο απομακρύνεται με την ταχύτητα c του φωτός από τους αγωγούς.
- V. Τη χρονική στιγμή $t=T$ τα φορτία στα άκρα των ράβδων μηδενίζονται. Το ηλεκτρικό πεδίο έχει απομακρυνθεί απόσταση λ από τους αγωγούς. Οι αγωγοί διαρρέονται πάλι από ρεύμα και γύρω τους δημιουργείται εκ νέου μαγνητικό πεδίο.

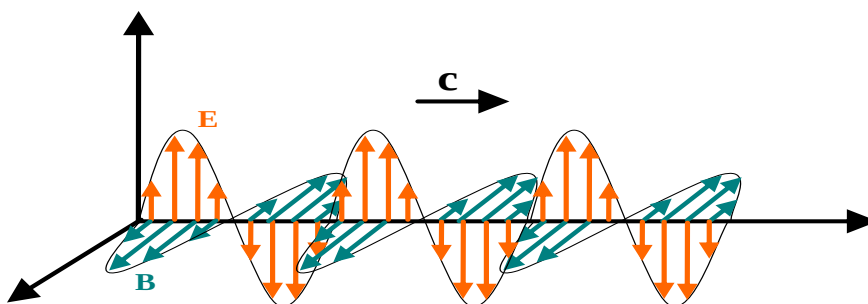
Το φαινόμενο επαναλαμβάνεται συνεχώς και στο χώρο διαδίδονται ένα ηλεκτρικό και ένα μαγνητικό πεδίο. Τα δύο πεδία κοντά στο ταλαντούμενο ηλεκτρικό δίπολο παρουσιάζουν διαφορά φάσης 90° (όταν το ένα είναι μέγιστο, το άλλο είναι μηδέν). Σε μεγάλες όμως αποστάσεις τα δύο πεδία είναι σε φάση.

Περισσότερα για την παραγωγή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από κεραία στον ακόλουθο σύνδεσμο.

<https://www.youtube.com/watch?v=ZaXm6wau-jc&t=8s>

Χαρακτηριστικά ηλεκτρομαγνητικού κύματος

α. Το ηλεκτρομαγνητικό κύμα είναι εγκάρσιο, τα διανύσματα του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου είναι κάθετα μεταξύ τους και κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος.



β. Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, σε αντίθεση με τα μηχανικά, δεν απαιτούν την ύπαρξη ελαστικού μέσου για την διάδοσή τους.

γ. Κάθε στιγμή ο λόγος των μέτρων, των εντάσεων του ηλεκτρικού E και του μαγνητικού B είναι ίσος με την ταχύτητα διάδοσης του κύματος v .

$$\frac{E}{B} = v$$

δ. Για τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα ισχύει η θεμελιώδης κυματική εξίσωση $v = \lambda \cdot f$ (στο κενό $c = \lambda_0 \cdot f = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$).

ε. Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα όπως και στα μηχανικά υπακούουν στην αρχή της επαλληλίας

στ. Οι εξισώσεις που περιγράφουν ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα είναι:

$$E = E_{\max} \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$B = B_{\max} \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

Για τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα που δημιουργούνται από κεραίες το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο κοντά στην κεραία έχουν διαφορά φάσης 90° (όταν το ένα είναι μέγιστο το άλλο είναι μηδέν). Σε μεγάλη όμως απόσταση από την κεραία τα δύο πεδία είναι σε φάση. Οι παραπάνω εξισώσεις περιγράφουν ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα με τα πεδία σε φάση.

6.2 Φάσμα ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας

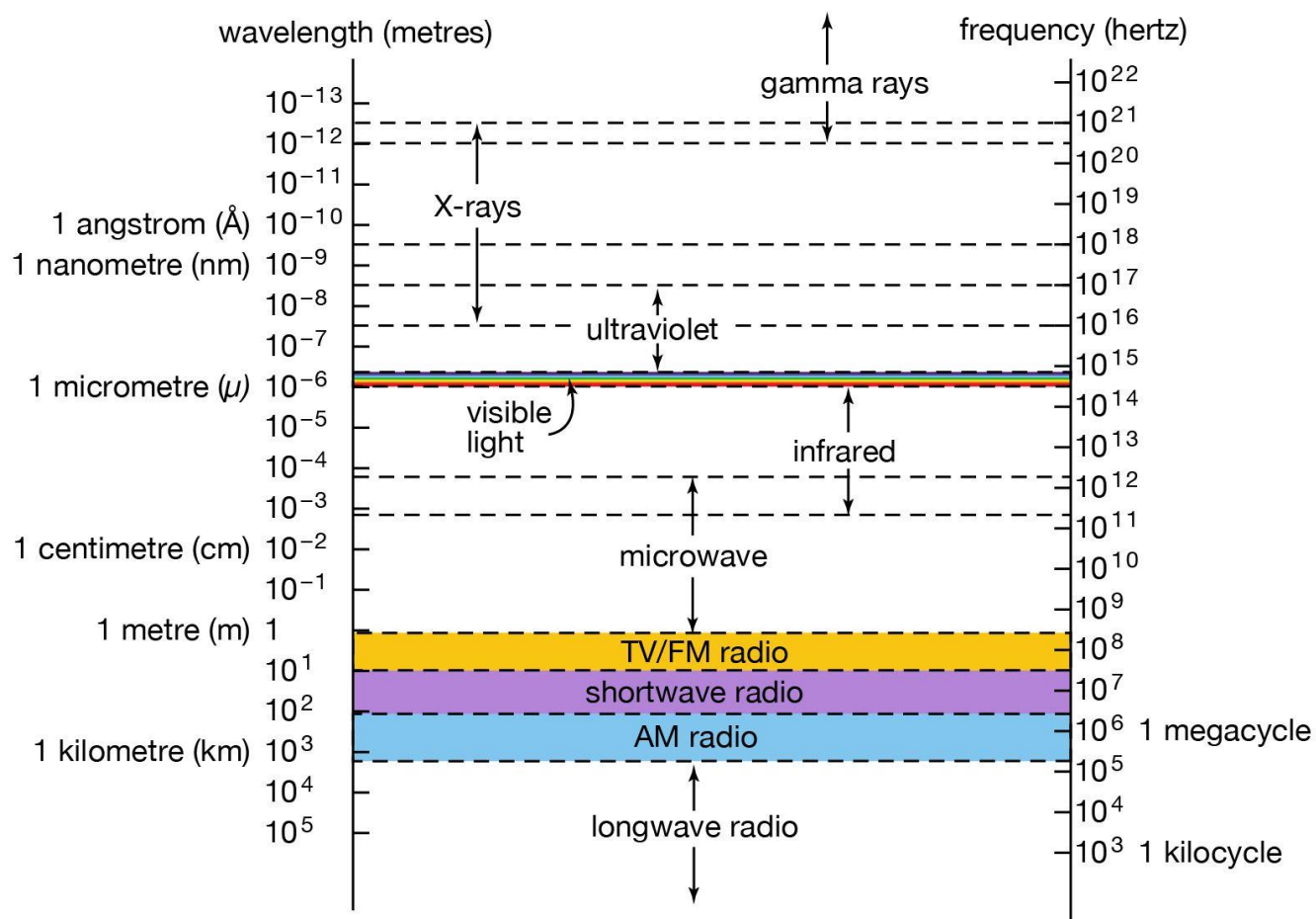
Ηλεκτρομαγνητικά κύματα παράγονται από ταλαντούμενα ηλεκτρικά δίπολα αλλά και κατά τις αποδιεγέρσεις των ατόμων ή των πυρήνων. Έτσι καλύπτουν ένα πολύ μεγάλο εύρος συχνοτήτων η οποία ονομάζεται ηλεκτρομαγνητικό φάσμα. Ανάλογα με τη συχνότητα τους έχουν διαφορετικές ιδιότητες και εφαρμογές. Ένας (όχι αυστηρός) διαχωρισμός του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος (κατά τη φθίνουσα τιμή του μήκους κύματος) των ακτινοβολιών στο κενό είναι:

Ονομασία	Μήκος κύματος	Πως παράγονται	Πως ανιχνεύονται	Χρήσεις
Ραδιοκύματα	Από 10^5 m έως μερικά εκατοστά περίπου	Από ηλεκτρονικά κυκλώματα, όπως το κύκλωμα L – C	Με κεραίες ραδιοφώνου τηλεόρασης κ.λ.π.	Ραδιοφωνία, τηλεόραση, τηλέφωνα κ.λ.π.
Μικροκύματα	Από 30 cm έως 1 mm περίπου	Από ηλεκτρονικά κυκλώματα	Με ραντάρ	Φούρνοι μικροκυμάτων, ραδιοαστρονομία, ραντάρ κ.λ.π.
Υπέρυθρη ακτινοβολία	Από 1 mm έως $7 \cdot 10^{-7}$ m (700 nm) περίπου	Εκπέμπεται από θερμαινόμενα σώματα	Με φωτογραφικά φιλμ ή θέρμανσης του δέρματος κ.λ.π.	Ειδικές φωτογραφήσεις τη νύχτα ή μέσα στα σύννεφα
Ορατή ακτινοβολία	Από 700 nm έως 400 nm περίπου	Από τις αποδιεγέρσεις των ηλεκτρονίων στα άτομα	Από το ανθρώπινο μάτι, φωτοκύτταρα, φωτογραφικά φιλμ κ.λ.π.	Όραση, φωτοσύνθεση, οπτικές ίνες, φασματοσκοπία κ.λ.π.
Υπεριώδης ακτινοβολία	Από 400 nm έως $6 \cdot 10^{-8}$ m περίπου	Από τον Ήλιο και από τις αποδιεγέρσεις ηλεκτρονίων ορισμένων ατόμων	Με φωτογραφικά φιλμ και φωτοκύτταρα	Αισθητική Ιατρική, αποστείρωση ιατρικών εργαλείων κ.λ.π.
Ακτίνες X (ή ακτίνες Rontgen)	Από 10^{-8} m έως 10^{-13} m περίπου	Από την επιβράδυνση ταχέως κινούμενων ηλεκτρονίων καθώς προσκρούουν σε μεταλλικό στόχο	Με φωτογραφικά φιλμ	Στην Ιατρική για διαγνωστικούς σκοπούς και στη μελέτη της δομής των κρυστάλλων
Ακτίνες γ	Από 10^{-10} m έως 10^{-14} m περίπου	Από τις αποδιεγέρσεις ραδιενεργών πυρήνων και από πυρηνικές αντιδράσεις	Με απαριθμητή Geiger - Muller	Εργαστηριακή μελέτη κρυσταλλικών δομών (ιδιαίτερα επικίνδυνες για τον άνθρωπο)

Ορατό φως: είναι το μέρος εκείνο της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας που ανιχνεύει το ανθρώπινο μάτι. Το μήκος κύματος του ορατού φωτός κυμαίνεται από 400 nm έως 700 nm περίπου για διάδοση **στο κενό**. Το ανθρώπινο μάτι μπορεί να διακρίνει τις παρακάτω έξι βασικές ομάδες χρωμάτων.

Μήκος κύματος στο κενό σε nm	Χρώμα
700 – 630	Ερυθρό
630 – 590	Πορτοκαλί
590 – 560	Κίτρινο
560 – 480	Πράσινο
480 – 440	Κυανό
440 – 400	Ιώδες

Μια ακτινοβολία που περιέχει μήκη κύματος σε μια πολύ στενή περιοχή ονομάζεται μονοχρωματική. Το απόλυτα μονοχρωματικό φως αποτελεί μια εξιδανίκευση. Τα laser παράγουν φως που πλησιάζει πολύ στο μονοχρωματικό.



© 2015 Encyclopædia Britannica, Inc.

6.3 Λυμένα παραδείγματα

Παράδειγμα 1.

Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος, το οποίο διαδίδεται στο κενό στη διεύθυνση του άξονα Ox , έχει χρονική εξίσωση $E = 0,02\eta\mu 2\pi (10^8 t - \frac{x}{\lambda})$ (S.I.).

α. Να υπολογίσετε το μήκος κύματος του ηλεκτρομαγνητικού κύματος,

β. Να γράψετε την εξίσωση της έντασης του μαγνητικού πεδίου σε συνάρτηση με το χρόνο, Δίνεται η ταχύτητα διάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο κενό $c = 3 \cdot 10^8$ m/s και για τις πράξεις:

Απάντηση:

α. Συγκρίνοντας την εξίσωση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου που δίνεται στην εκφώνηση με τη γενική μορφή της χρονικής εξίσωσης της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος

$$E = E_{\max} \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \text{ προκύπτει: } T = 10^{-8} \text{ s} \Rightarrow f = 10^8 \text{ Hz} \text{ και } E_{\max} = 0,02 \text{ V/m}$$

$$\text{Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής έχουμε: } c = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{c}{f} \Rightarrow \lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{10^8} \Rightarrow \lambda = 3 \text{ m}$$

β. Η γενική μορφή της εξίσωσης της έντασης του μαγνητικού πεδίου είναι η: $B = B_{\max} \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$

$$\text{Ισχύει } c = \frac{E_{\max}}{B_{\max}} \Rightarrow B_{\max} = \frac{E_{\max}}{c} \Rightarrow B_{\max} = \frac{2}{3} \cdot 10^{-10} \text{ T} . \text{ Επομένως: } B = \frac{2 \cdot 10^{-10}}{3} \eta\mu 2\pi (10^8 t - \frac{x}{3}) \text{ (S.I.)}$$

Παράδειγμα 2.

Η χρονική εξίσωση της έντασης του μαγνητικού πεδίου ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος, το οποίο διαδίδεται στο κενό και προς τη θετική φορά του άξονα $x'Ox$, είναι η $B = 4,5 \cdot 10^{-8} \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$ (S.I.).

α. Να υπολογίσετε την περίοδο T του ηλεκτρομαγνητικού κύματος.

β. Να γράψετε την εξίσωση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου του ηλεκτρομαγνητικού κύματος.

Το ηλεκτρομαγνητικό κύμα λαμβάνεται από ραδιοφωνικό δέκτη που περιλαμβάνει ιδανικό κύκλωμα LC. Όταν το ηλεκτρομαγνητικό κύμα εισέρχεται από το κενό σε διαφανές υλικό, καταγράφουμε ελάττωση κατά 10% στην ταχύτητα διάδοσης του, ενώ δεν παρατηρούμε καμία μεταβολή στη συχνότητα του.

γ. Να υπολογίσετε το μήκος κύματος του κύματος στο διαφανές υλικό.

Η ταχύτητα διάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο κενό είναι $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

Δίνεται για τις πράξεις: $\pi^2 = 10$.

Απάντηση:

α. Συγκρίνοντας τη δοθείσα εξίσωση $B = 4,5 \cdot 10^{-8} \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$ με την αντίστοιχη εξίσωση της θεωρίας

$$B = B_{\max} \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right), \text{ προκύπτει: } B_{\max} = 4,5 \cdot 10^{-8} \text{ T} \text{ και } \lambda = 6 \text{ m.}$$

Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής θεωρίας $c = \frac{\lambda}{T}$ προκύπτει:

$$c = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow T = \frac{\lambda}{c} \Rightarrow T = \frac{6}{3 \cdot 10^8} \Rightarrow T = 2 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

β. Η μέγιστη τιμή της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$c = \frac{E_{\max}}{B_{\max}} \Rightarrow E_{\max} = c \cdot B_{\max} \Rightarrow E_{\max} = 13,5 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Η γενική μορφή της εξίσωσης της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου του κύματος είναι:

$$E = E_{\max} \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

Με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών στην προηγούμενη εξίσωση παίρνουμε:

$$E = 13,5 \eta \mu 2\pi \left(10^8 \frac{t}{2} - \frac{x}{6} \right) \text{ (S.I.)}$$

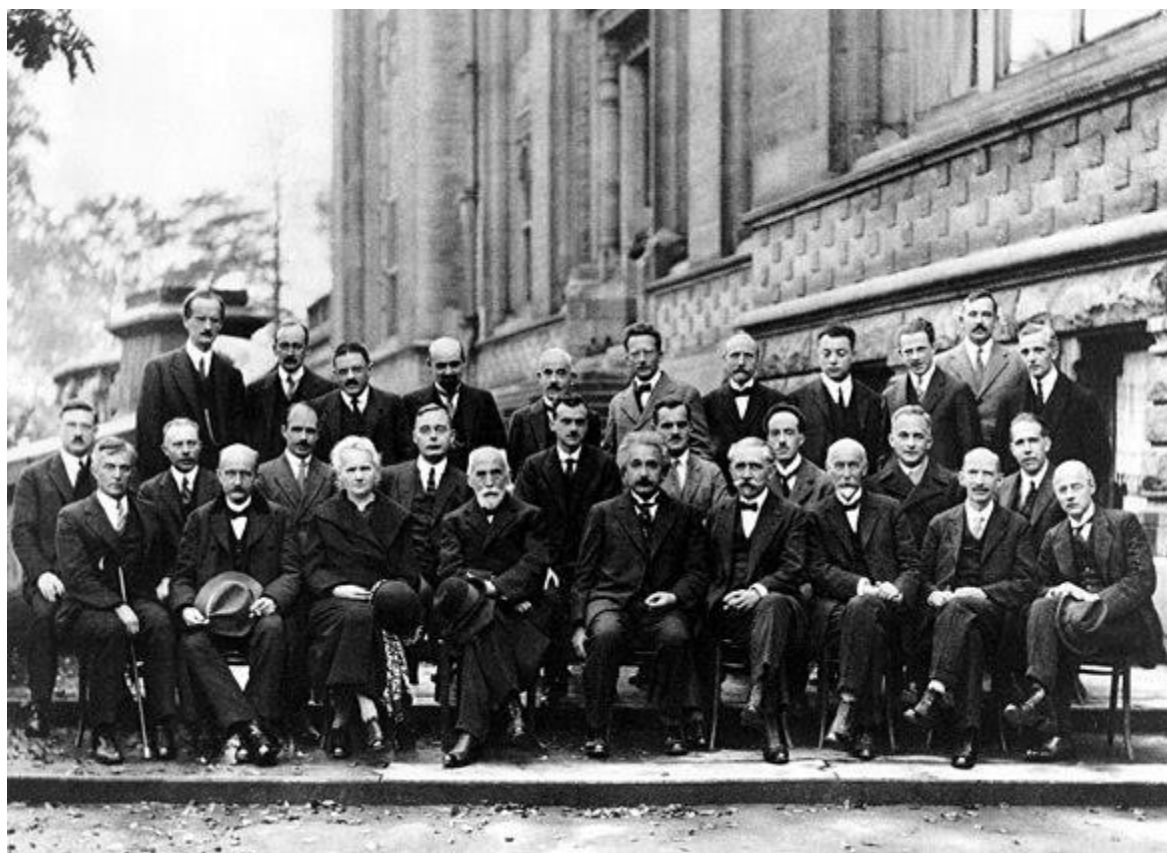
γ. Σύμφωνα με την εκφώνηση, η ταχύτητα διάδοσης v του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο διαφανές υλικό είναι: $v = c - 0,1c = 0,9c \Rightarrow v = 2,7 \cdot 10^8$ m/s.

Εφόσον δεν μεταβάλλεται η συχνότητα του κύματος κατά την είσοδο του στο διαφανές υλικό, η

θεμελιώδης εξίσωση της κυματικής γράφεται: $v = \frac{\lambda'}{T} \Rightarrow \lambda' = v \cdot T \Rightarrow \lambda' = 2,7 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^{-8} \Rightarrow \lambda' = 5,4 \text{ m}$

Κεφάλαιο 7.

Κβαντομηχανική



Η ιστορική φωτογραφία από το 5ο Συνέδριο Σολβέ, το 1927. Εικονίζονται οι:

Όρθιοι (από αριστερά): Ο. Πικάρ, Ε. Ενριό, Π. Έρενφεστ, Ε. Ερζέν, Τ. ντε Ντοντέ, Ε. Σρέντινγκερ, Ζ.-Ε. Βερσαφέλτ, Β. Πάουλι, Β. Χάιζενμπεργκ, Ρ.Χ. Φάουλερ, Λ. Μπριλουέν.

Μεσαία σειρά (από αριστερά): Π. Ντεμπέι, Μ. Κνούντσεν, Ο.Λ. Μπραγκ, Χ.Α. Κράμερς, Π.Α.Μ. Ντιράκ, Α.Χ. Κόμπτον, Λ. ντε Μπρολί, Μ. Μπορν, Ν. Μπορ.

Πρώτη σειρά (από αριστερά): Ι. Λάνμουντ, Μ. Πλανκ, Μ. κιοουρί, Χ.Α. Λόρεντζ, Α. Αϊνστάιν, Π. Λανξβέν, Σ.-Ε. Γκυ, Τ.Τ.Ρ. Γουίλσον, Ο.Γ. Ρίτσαρντσον.

7. Κβαντομηχανική

Στο τέλος του 19^{ου} αιώνα υπήρχαν τρία σημαντικά προβλήματα που η κλασική φυσική αδυνατούσε να λύσει. Τα προβλήματα αυτά ήταν, η ακτινοβολία του μέλανος σώματος, το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο και τα γραμμικά φάσματα εκπομπής και απορρόφησης. Η λύση του προβλήματος του μέλανος σώματος από τον Planck εισάγει τη γέννηση της κβαντομηχανικής και σταδιακά την εξέλιξη αυτής.

Το 1894 ο Πλανκ έστρεψε την προσοχή του στο πρόβλημα της ακτινοβολίας μέλανος σώματος. Είχε αναλάβει να ανακαλύψει για λογαριασμό εταιρειών ηλεκτρισμού τον τρόπο παραγωγής του περισσότερου δυνατού φωτός με λαμπτήρες που θα κατανάλωναν την ελάχιστη ενέργεια. Με το πρόβλημα είχε ήδη ασχοληθεί ο Κίρκοφ το 1859: πώς εξαρτάται η ένταση της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας που εκπέμπει ένα μέλαν σώμα (ένας τέλει απορροφητής της ξένης ακτινοβολίας, όπως μία κοιλότητα) από τη συχνότητα της ακτινοβολίας (π.χ. το χρώμα του φωτός) και τη θερμοκρασία του μέλανος σώματος; Το ζήτημα είχε ήδη μελετηθεί πειραματικά, αλλά ο νόμος Rayleigh-Jeans που εξαγόταν με τη βοήθεια της Κλασικής Φυσικής αποτύγχανε να εξηγήσει την παρατηρούμενη συμπεριφορά σε υψηλές συχνότητες, δίνοντας πυκνότητα ενέργειας αποκλίνουσα προς το άπειρο, από όπου και ο όρος «υπεριώδης καταστροφή». Ο Wilhelm Wien πρότεινε τον ομώνυμο νόμο (Νόμος του Wien), που προέβλεπε με ακρίβεια τη συμπεριφορά σε υψηλές συχνότητες, αλλά αποτύγχανε στις χαμηλές. Στην προσπάθειά του να συμφιλιώσει τη θεωρία με το πείραμα, ο Πλανκ ανακάλυψε τον περίφημο Νόμο του Πλανκ για την ακτινοβολία μέλανος σώματος, που θα συγκλόνιζε την επιστήμη της Φυσικής από τα θεμέλιά της. Ο νόμος πρωτοπαρουσιάστηκε σε μία συνάντηση της Γερμανικής Φυσικής Εταιρείας, στις 19 Οκτωβρίου 1900, και δημοσιεύθηκε το 1901.

7.1 Ακτινοβολία μέλανος σώματος

7.1.1 Τι είναι μέλαν σώμα και τι ακτινοβολία του μέλανος σώματος;

Τα αντικείμενα τα βλέπουμε είτε επειδή τα ίδια είναι φωτεινές πηγές, δηλαδή εκπέμπουν φως στο ορατό φάσμα και τα ονομάζουμε **αυτόφωτα**, είτε επειδή φωτίζονται από άλλες φωτεινές πηγές και τα ονομάζουμε **ετερόφωτα**.

Οι πιο κοινές πηγές φωτός είναι **α)** Θερμαινόμενα στερεά, π.χ. νήμα από W (βολφράμιο) λυχνίας πυρακτώσεως. **β)** Αέρια με τη βοήθεια ηλεκτρικής εκκένωσης, π.χ. λυχνία με Ne(Νέον). **γ)** Φωτοдиодοι (Light Emitting Diodes - LED), που αποτελούνται από ημιαγωγούς GaAs, κ.λ.π.

Αν φωτίσουμε ένα ετερόφωτο σώμα τότε ένα μέρος από τις φωτεινές ακτίνες που προσπίπτουν σε αυτό ανακλώνται προς το περιβάλλον και γίνονται ορατές φτάνοντας στα μάτια μας όπου σχηματίζεται η εικόνα του σώματος. Το υπόλοιπο μέρος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας απορροφάται από το σώμα. Ένα κόκκινο σώμα απορροφά όλες τις ακτίνες του ορατού φάσματος και επανεκπέμπει την κόκκινη που φτάνει στα μάτια μας και το βλέπουμε ως κόκκινο. Για να είμαστε πιο ακριβείς, το κόκκινο σώμα απορροφά ένα μεγάλο μέρος του ορατού φάσματος και αυτό που φτάνει στα μάτια μας, δίνει την εντύπωση του κόκκινου. Δεν έρχονται μόνο μήκη κύματος που ανήκουν στο κόκκινο (άλλωστε δεν υπάρχει μια μόνο ακτινοβολία στο κόκκινο), φτάνουν πολλές, με πολλά μήκη κύματος και μας δημιουργείται η εντύπωση κόκκινης απόχρωσης.

Για τα ετερόφωτα σώματα:

α. Αν ένα σώμα φωτιστεί με λευκό φως, τότε αυτό απορροφά ορισμένες ακτινοβολίες αλλά επανεκπέμπει κάποιες άλλες με βάση τις οποίες διακρίνουμε το χρώμα του σώματος.

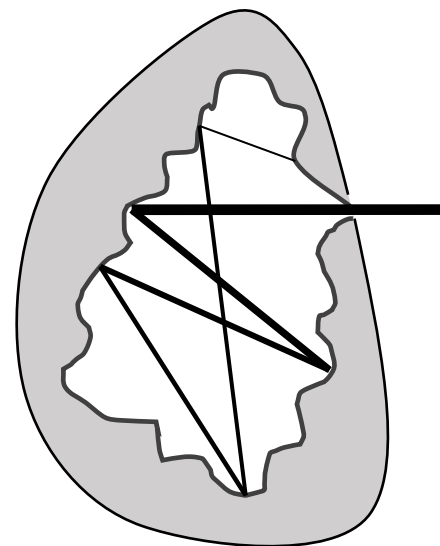
β. Ένα σώμα φαίνεται μαύρο όταν απορροφά όλες τις ακτίνες του ορατού φάσματος και δεν επανεκπέμπει καμία στο ορατό φάσμα, (εκπέμπει στο υπέρυθρο).

γ. Ένα σώμα φαίνεται λευκό όταν δεν απορροφά καμία από τις ακτίνες του ορατού φάσματος. Τότε το σώμα δεν απορρόφησε καμία από τις εισερχόμενες ακτίνες και τις επανεκπέμπει όλες. Το λευκό χρώμα δημιουργείται από την ταυτόχρονη άφιξη όλων των μηκών κύματος του ορατού φωτός στο μάτι μας. Το λευκό δηλαδή δεν αποτελείται από κάποιο μήκος κύματος ή κάποια συχνότητα αλλά αποτελεί τη σύνθεση όλων.

Μέλαν σώμα στη φυσική θεωρείται το σώμα που απορροφά την ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία που προσπίπτει σ' αυτό, σε όλο το φάσμα της (όλες τις συχνότητες).

- Το μέλαν σώμα αποτελεί μια εξιδανίκευση, αφού στη φύση δεν υπάρχει σώμα από υλικό που να απορροφά το 100% της ενέργειας της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας που προσπίπτει σε αυτό. Πρακτικά μπορεί να θεωρηθεί ένα οποιοδήποτε αντικείμενο με αιθαλωμένη την επιφάνειά του.
- Το μέλαν σώμα ούτε ανακλά, ούτε διαχέει την προσπίπτουσα σε αυτό ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία. Η ονομασία μέλαν προέρχεται από το γεγονός ότι απορροφά όλη την ακτινοβολία οπότε θα φαίνεται μαύρο σε θερμοκρασία περιβάλλοντος. Ωστόσο όπως θα δούμε και αργότερα το μέλαν σώμα εκπέμπει και ακτινοβολία η οποία εξαρτάται από τη θερμοκρασία του και το σώμα θα έχει χρώμα αν εκπέμπει στο ορατό φάσμα.

Το μέλαν σώμα προσεγγίζεται από μια κοιλότητα που επικοινωνεί με το περιβάλλον με μια μικρή οπή. Αυτή η οπή έχει την ιδιότητα του μέλανος σώματος. Μία εισερχόμενη ακτινοβολία στην κοιλότητα αλληλεπιδρά επανειλημμένα με τα τοιχώματα (φορτισμένα σωματίδια) μεταβιβάζοντας σ' αυτά ενέργεια. Η ακτινοβολία θα ανακλαστεί πολλές φορές πάνω στα τοιχώματα της κοιλότητας (στην πραγματικότητα, απορροφήσεις και επανεκπομπές) μέχρι που τελικά να απορροφηθεί όλη. Η πιθανότητα για ένα τμήμα της ακτινοβολίας που μπήκε μέσα στην κοιλότητα από την οπή να ξαναβγεί από αυτήν είναι πολύ μικρή, αν η οπή είναι αρκετά μικρή σε σχέση με την κοιλότητα, που σημαίνει ότι μόνο ένα πολύ μικρό μέρος από το προσπίπτον φως εξέρχεται από την οπή, ενώ το υπόλοιπο έχει απορροφηθεί.



Όταν επέλθει η θερμική ισορροπία τότε εκπέμπεται ακτινοβολία το φάσμα της οποίας εξαρτάται από την θερμοκρασία του σώματος (θερμικής προέλευσης). Αυτό συμβαίνει **ανεξάρτητα από το υλικό των τοιχωμάτων**, το σχήμα, το μέγεθος της κοιλότητας και το μήκος κύματος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας, διότι, καθώς το σώμα αλληλεπιδρά επανειλημμένως με την προσπίπτουσα ακτινοβολία χάνεται η πληροφορία της σύστασης του σώματος και η ακτινοβολία αποκτά θερμική κατανομή της ενέργειάς της στις διάφορες συχνότητες, (θερμοποιημένη). Δύο σώματα από διαφορετικό υλικό που βρίσκονται στην ίδια θερμοκρασία εκπέμπουν το ίδιο είδος θερμικής ακτινοβολίας.

Το μέλαν σώμα αφήνει όλη την προσπίπτουσα ακτινοβολία να μπει μέσα του δηλαδή ανακλά μηδενικό ποσοστό της προσπίπτουσας ακτινοβολίας, εσωτερικά απορροφά όλη αυτή την προσπίπτουσα ακτινοβολία, χωρίς να αφήνει ακτινοβολία να το διαπεράσει και αυτό ισχύει για όλες τις συχνότητες και για όλες τις γωνίες προσπτώσεως. Άρα ένα μέλαν σώμα είναι τέλειος απορροφητής της προσπίπτουσας Η.Μ. ακτινοβολίας.

Βεβαίως, αν συνέβαιναν μόνο τα παραπάνω, τότε λόγω της συνεχούς απορρόφησης ενέργειας, η θερμοκρασία του σώματος θα αυξανόταν συνεχώς. Έτσι, ένα μέλαν σώμα που βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία άρα και σε σταθερή θερμοκρασία θα πρέπει να επανεκπέμπει ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία η οποία καλείται ακτινοβολία μέλανος σώματος (black-body radiation), έτσι ώστε να διατηρείται το ενεργειακό ισοζύγιο.

Η ακτινοβολία μέλανος σώματος είναι η θερμική ακτινοβολία που εκπέμπουν όλα τα σώματα εξαιτίας της θερμοκρασίας τους.

- Τα στερεά σώματα έχουν συνεχές φάσμα εκπομπής και απορρόφησης καθώς εξαιτίας του μεγάλου αριθμού των ατόμων και των επανειλημμένων αλληλεπιδράσεων θα απορροφηθούν όλα τα μήκη κύματος και θα εκπέμπει συνεχές φάσμα σε όλα τα μήκη κύματος.

- Η ακτινοβολία του μέλανος σώματος έχει **παγκόσμιο χαρακτήρα** δηλαδή δεν εξαρτάται από τη χημική σύσταση του σώματος που την εκπέμπει αλλά μόνο από τη θερμοκρασία του. Η ακτινοβολία έχει χάσει οποιαδήποτε πληροφορία σχετική με τις ιδιότητες των τοιχωμάτων της κοιλότητας - οπής ή των σωμάτων που την εκπέμπουν εκτός από την θερμοκρασία τους. Δύο σώματα στην ίδια θερμοκρασία εμφανίζουν το ίδιο ακριβώς φάσμα εκπομπής. Π.χ. ένα πυρακτωμένο σίδηρο και τα αναμμένα κάρβουνα στην ίδια θερμοκρασία φαίνονται κόκκινα και δεν διακρίνεται το υλικό τους.

7.1.2 Ένταση ακτινοβολίας, I

Για να μετράμε το ποσό της ακτινοβολούμενης ενέργειας από τη μονάδα της επιφάνειας του σώματος, στη μονάδα του χρόνου, ορίζουμε το φυσικό μονόμετρο μέγεθος, ένταση ακτινοβολίας, I.

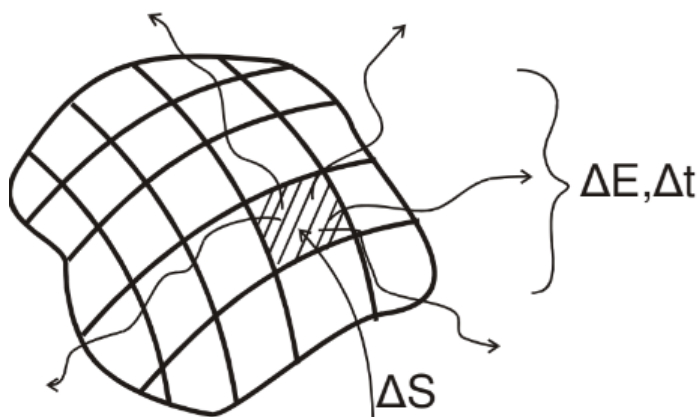
Ονομάζουμε ένταση ακτινοβολίας το φυσικό μέγεθος που είναι ίσο με το πηλίκο της ενέργειας, E, που εκπέμπεται από τη μονάδα της επιφάνειας, σε χρονικό διάστημα Δt προς το χρονικό διάστημα Δt. Δηλαδή:

$$I = \frac{\Delta E}{\Delta A \cdot \Delta t}$$

Ισοδύναμα αφού η ενέργεια ανά μονάδα χρόνου είναι η ισχύς P, η ένταση της ακτινοβολίας ορίζεται και ως ισχύς ανά μονάδα επιφάνειας:

$$I = \frac{P}{\Delta A}$$

Στο S.I. η ένταση της ακτινοβολίας μετριέται σε $\frac{J}{m^2 \cdot s}$ ή $\frac{W}{m^2}$



Στην πράξη είναι πιο χρήσιμο μέγεθος η ένταση ανά μονάδα μήκους κύματος ή συχνότητας

$I_f = \frac{\Delta E}{\Delta A \cdot \Delta t \cdot \Delta f}$. Η ένταση ανά μονάδα συχνότητας ονομάζεται φασματική ένταση.

Η ένταση της ακτινοβολίας που εκπέμπει ένα σώμα εξαρτάται μόνο από την θερμοκρασία του.

7.1.3 Φάσμα θερμικής ακτινοβολίας

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον, λόγω του ρόλου που έπαιξε στην εξέλιξη της φυσικής, έχει η μελέτη της θερμικής ακτινοβολίας του μέλανος σώματος.

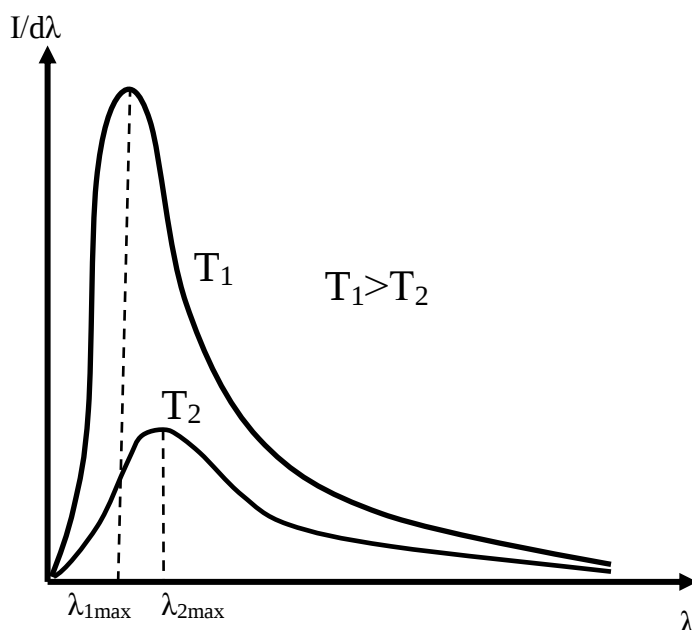
Το μέλαν σώμα (black body), σ' οποιαδήποτε θερμοκρασία και αν βρίσκεται εκπέμπει ενέργεια (black body radiation) με τη μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας σ' όλο το φάσμα της. Το διάγραμμα της έντασης της ακτινοβολίας, I ανά μονάδα μήκους κύματος, $d\lambda$, σε συνάρτηση με το μήκος κύματος, λ για μια συγκεκριμένη θερμοκρασία είναι όπως στο διπλανό διάγραμμα.

Από τη μελέτη της γραφικής παράστασης προκύπτει ότι θερμική ακτινοβολία εκπέμπεται σε όλα τα μήκη κύματος, αλλά υπάρχει ένα μήκος κύματος αιχμής, $\lambda_{\max}$, όπου η ένταση της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας μεγιστοποιείται.

- Το εμβαδό που σχηματίζεται κάτω από την καμπύλη, εκφράζει τη συνολική ένταση θερμικής ακτινοβολίας που εκπέμπει το μέλαν σώμα στη συγκεκριμένη θερμοκρασία σε όλα τα μήκη κύματος.

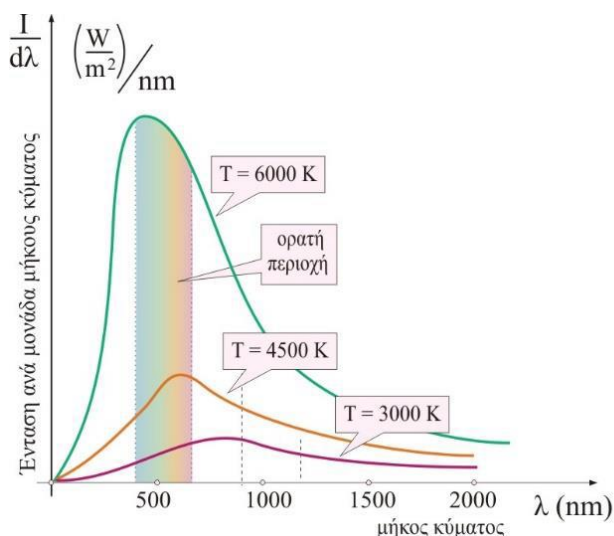
- Το εμβαδό μιας στενής λωρίδας γύρω από ένα συγκεκριμένο μήκος κύματος $\lambda_i + d\lambda_i$ εκφράζει την ένταση θερμικής ακτινοβολίας που εκπέμπει το μέλαν σώμα στην περιοχή $\lambda_i + d\lambda_i$.

- Η αύξηση της θερμοκρασίας οδηγεί αφενός στην αύξηση της εκπεμπόμενης έντασης ακτινοβολίας, αφετέρου στη μετατόπιση του $\lambda_{\max}$ σε μικρότερα μήκη κύματος.



Το διπλανό διάγραμμα παρουσιάζει την ένταση της ακτινοβολίας σε συνάρτηση με το μήκος κύματος για διαφορετικές τιμές της θερμοκρασίας φαίνεται δίπλα. Μπορούμε να δούμε ότι για θερμοκρασίες όπως αυτές που αντιστοιχούν στην επιφάνεια του Ήλιου (5800 K περίπου) η μέγιστη ένταση της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας αντιστοιχεί στο ορατό φάσμα (400-700 nm)

Πρέπει εδώ να τονιστεί ότι η μορφή του διαγράμματος είναι ίδια για όλα τα σώματα και ανεξάρτητη από την φύση τους.



Κάθε σώμα με θερμοκρασία έστω και ελάχιστα μεγαλύτερη του απόλυτου μηδενός εκπέμπει θερμική ακτινοβολία, η οποία όμως δεν είναι άμεσα αισθητή από εμάς διότι έχει πολύ χαμηλή ένταση αλλά και μήκη κύματος που πέφτουν στο υπέρυθρο κυρίως και γενικά εκτός ορατής περιοχής. Αντίθετα, η θερμική ακτινοβολία των πυρακτωμένων σωμάτων γίνεται αισθητή όχι μόνο ως θερμότητα αλλά και ως πλούσιο ορατό φως με το χαρακτηριστικό κοκκινωπό ή κίτρινο χρώμα.

7.1.4 Νόμοι ακτινοβολίας μέλανος σώματος.

1. Νόμος μετατόπισης του Wien

Η σχέση που συνδέει την απόλυτη θερμοκρασία, T και το μήκος κύματος αιχμής, $\lambda_{\max}$, ανακαλύφθηκε από τον Wien ονομάστηκε **νόμος της μετατόπισης του Wien** και γράφεται

$$\lambda_{\max} \cdot T = \text{σταθερό}$$

Η τιμή της σταθεράς ισούται με $3 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$ ή $2,9 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$

2. Νόμος των Stefan – Boltzmann

Εκτός ύλης

Η ισχύς που εκπέμπει ένα Μέλαν σώμα ανά μονάδα επιφάνεια καθορίζεται από νόμο των Stefan-Boltzmann, ο οποίος αναφέρει ότι η ολική ένταση της ακτινοβολίας ανά μονάδα επιφάνειας, είναι ανάλογη της απόλυτης θερμοκρασίας στην τέταρτη δύναμη.

$$I = \sigma \cdot T^4,$$

όπου σ η σταθερά των **Stefan – Boltzmann** με τιμή $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$

7.1.5 Η ερμηνεία της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος.

Κλασική θεωρία

Σύμφωνα με την κλασική θεωρία ένα σώμα μπορεί να εκπέμψει και να απορροφήσει ενέργεια κατά **συνεχή τρόπο** όπως και η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία μπορεί να μεταφέρει οποιοδήποτε ποσό ενέργειας. Με βάση την κλασική θεωρία, τα άτομα καθώς ταλαντώνονται εκπέμπουν H/M κύματα ίδιας συχνότητας με αυτήν της ταλάντωσης. Αύξηση της θερμοκρασίας προκαλεί αύξηση του πλάτους ταλάντωσης και αύξηση της εκπεμπόμενης ενέργειας. Όταν ένα H/M κύμα αλληλεπιδρά με την ύλη (τα άτομα), της μεταφέρει ενέργεια θέτοντας τα άτομα σε εξαναγκασμένη ταλάντωση, με αποτέλεσμα αυτά να επανεκπέμπουν κύμα ίδιας συχνότητας με αυτή του προσπίπτοντος H/M κύματος.

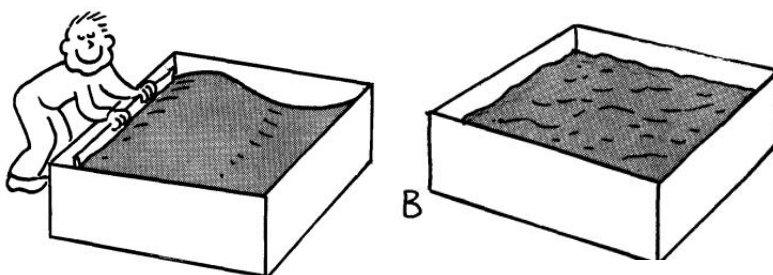
Σύμφωνα με την κλασική φυσική η ακτινοβολία της κοιλότητας προέρχεται από τις ταλαντώσεις των φορτισμένων σωματιδίων στα τοιχώματα της κοιλότητας και η συχνότητά της είναι ίση με τη συχνότητα των ταλαντώσεων αυτών. Η ενέργεια της ακτινοβολίας μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή. Οι Rayleigh – Jeans προσπάθησαν να εξηγήσουν την ακτινοβολία του μέλανος σώματος σύμφωνα με την στατιστική μηχανική και την H.M. θεωρία του Maxwell. Οι Rayleigh και Jeans έκαναν υπολογισμούς της συνάρτησης $I(\lambda)$, στηριζόμενοι στην αντίληψη της Κλασικής Φυσικής, που θεωρεί τα άτομα του μελανού σώματος ταλαντωτές, οι οποίοι ακτινοβολούν ηλεκτρομαγνητικά κύματα όλων των μηκών κύματος.

Ο Rayleigh υπέδειξε ότι η κλασική μηχανική, όταν εφαρμόζοταν στους ταλαντωτές ενός μέλανος σώματος, οδηγούσε σε μια ενεργειακή κατανομή η οποία αυξάνει με το τετράγωνο της συχνότητας. Ο Rayleigh στήριξε την επιχειρηματολογία του στο λεγόμενο θεώρημα ισοκατανομής της ενέργειας από το οποίο προκύπτει ότι η μέση ενέργεια των ταλαντωτών που αποτελούν ένα μέλαν σώμα θα δίνεται από τη σχέση kT όπου το k είναι η σταθερά του Boltzmann. **Θεωρώντας στάσιμα H.M. κύματα στην κοιλότητα του πρότυπου μέλανος σώματος και ότι το υλικό των τοιχωμάτων, που συνίσταται από φορτισμένους αρμονικούς ταλαντωτές, ανταλλάσσει οποιοδήποτε ποσό ενέργειας με τα H.M. κύματα.** Έτσι μέσα σε μια κοιλότητα θα μπορούσαμε να έχουμε άπειρο αριθμό δυνατών στάσιμων κυμάτων οποιασδήποτε ενέργειας και συχνότητας. (όπως σε μια χορδή έχουμε άπειρο αριθμό μονοδιάστατων κυμάτων). Όταν έχουμε πολύ μικρά μήκη κύματος, τότε σε δεδομένο μήκος μπορούν να δημιουργηθούν πολλές στάσιμες καταστάσεις. Επειδή η κάθε στάσιμη κατάσταση περιέχει το ίδιο ποσό ενέργειας σύμφωνα με το θεώρημα ισοκατανομής της ενέργειας, η ισχύς της πηγής θα πρέπει ν' αυξάνεται όσο μικραίνουν τα μήκη κύματος. Όταν τα μήκη κύματος τείνουν στο μηδέν, τότε η ισχύς της πηγής θα πρέπει να απειρίζεται. Αυτό όμως οδηγεί σε υψηλές συχνότητες (μικρά μήκη κύματος) η ένταση της ακτινοβολίας να τείνει στο άπειρο (νόμος Rayleigh – Jeans), ενώ το πείραμα δείχνει ότι τείνει στο μηδέν. Η ασυμφωνία αυτή μεταξύ της σχέσης των Rayleigh-Jeans και της πειραματικής καμπύλης οδηγεί στην λεγόμενη "υπεριώδη καταστροφή". Αυτό σημαίνει ότι αν εισέλθει έστω μια ερυθρή ακτίνα μέσα στον λεγόμενο κύβο του Jeans, που είναι ένας άδειος κύβος με κατοπτρικά τοιχώματα, από μια οπή του, τότε αυτή η υπέρυθρη ακτινοβολία σιγά-σιγά μετατρέπεται σε μπλε, ιώδη, υπεριώδη, ακτίνες-X, ακτινοβολία γ και ακόμη παραπέρα χωρίς όριο. Θα ήταν λοιπόν παράτολμο να κάθεται μπροστά στο τζάκι γιατί σε λίγο το κόκκινο φως των κάρβουνων θα μετατρέποταν σε επικίνδυνη πυρηνική ακτινοβολία. Η θεωρητική προσέγγιση των Rayleigh-Jeans λοιπόν οδηγεί σε εκπομπή άπειρης ολικής ενέργειας, αφού είναι επιτρεπτά όλα τα μήκη κύματος. Όταν το μήκος κύματος λ τείνει στο μηδέν τότε το $I(\lambda)$ τείνει στο άπειρο.

Σε μικρές συχνότητες η κλασική θεωρία συμφωνεί με τα πειραματικά δεδομένα.

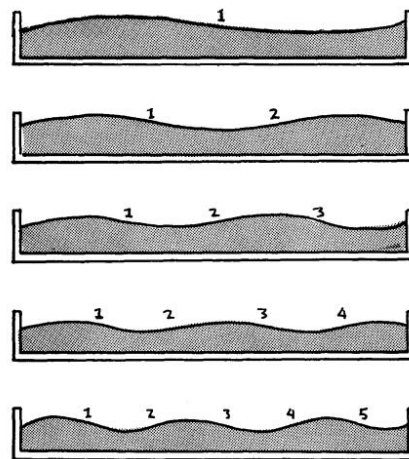
Παραστατικά θα μπορούσαμε να σκεφτούμε το εξής ανάλογο:

Αν σε μια δεξαμενή με νερό δημιουργήσουμε έναν κυματισμό μετά από λίγο η εικόνα που θα παρατηρήσουμε είναι το κύμα να έχει διαιρεθεί σε μικρότερους κυματισμούς όπως στο σχήμα Β. Αυτό συμβαίνει επειδή η ενέργεια των κυμάτων διαιρείται και σχηματίζονται όλα τα πιθανά κύματα που χωράνε στη δεξαμενή. Υπάρχουν πολλά περισσότερα κύματα μικρού μήκους κύματος που μπορούν να χωρέσουν σε σχέση με αυτά που έχουν μεγάλο μήκος κύματος. Θεωρητικά, υπάρχουν άπειρα κύματα με πολύ μικρό μήκος κύματος.



Αν συνέβαινε το ίδιο στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα τότε για παράδειγμα μία κίτρινη ακτινοβολία εντός της κοιλότητας που δεν υπήρχε δυνατότητα διαφυγής της, θα μετατρεπόταν σταδιακά σε μπλε, μετά βιολετί, μετά υπεριώδη (υπεριώδης καταστροφή) και τέλος σε ακτίνα Χ. Αν ίσχυε κάτι τέτοιο προφανώς δεν θα είχαμε δυνατότητα ύπαρξης.

Η υπεριώδης όμως καταστροφή δεν υφίσταται. Αυτό συμβαίνει γιατί η ενέργεια των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων δεν διαιρείται. Υπάρχει μια ελάχιστη ενέργεια που απαιτείται για τη δημιουργία ενός κύματος συγκεκριμένου χρώματος ή μήκους κύματος. Για τη δημιουργία κυμάτων μικρού μήκους κύματος απαιτείται υψηλή ενέργεια.



Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα δεν έχουν την ίδια συμπεριφορά με τα μηχανικά.

Ερμηνεία του φαινομένου από τον Planck

Το 1900 ο M. Planck στην προσπάθειά του να ερμηνεύσει το φάσμα του μέλανος σώματος, έκανε μια υπόθεση έξω από κάθε λογική για τη φυσική της εποχής του.

1^η παραδοχή

Υπόθεση Planck: Το άτομο ως ταλαντωτής με ιδιοσυχνότητα f δεν μπορεί να βρεθεί σε οποιαδήποτε ενεργειακή κατάσταση αλλά μόνο σε συγκεκριμένες (κβαντισμένες) καταστάσεις που έχουν ενέργεια πολλαπλάσια της ποσότητας hf .

Οι τιμές της ενέργειας που μπορεί να πάρει ο ατομικός ταλαντωτής είναι:

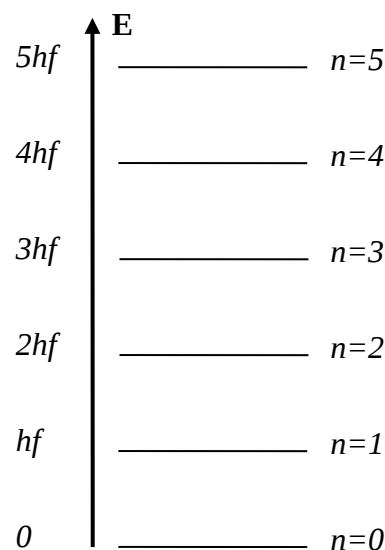
$$E_n = n \cdot h \cdot f$$

όπου:

- n , ένας ακέραιος αριθμός που καλείται κβαντικός αριθμός,
- h , μία σταθερά που ονομάζεται σταθερά δράσης του Planck και είναι ίση με $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
- f , η συχνότητα ταλάντωσης του ατόμου.

Ο ατομικός ταλαντωτής μπορεί να εκπέμψει ή να απορροφήσει ενέργεια με τη μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας μόνο σε διακριτές (κβαντισμένες) τιμές και αυτό συμβαίνει μόνον όταν το άτομο αλλάζει ενεργειακή κατάσταση.

Τα σωματίδια των τοιχωμάτων (που φέρουν φορτίο) είναι αρμονικοί ταλαντωτές με συγκεκριμένες ιδιοσυχνότητες f . Τα Η.Μ. κύματα που γεμίζουν την κοιλότητα δεν μπορούν να ανταλλάξουν οποιοδήποτε ποσό ενέργειας με τους ταλαντωτές, παρά μόνον σε διακριτά (ασυνεχή) ποσά ενέργειας.



2^η παραδοχή

Η 2η παραδοχή είναι συνέπεια της 1ης και προκύπτει από την αρχή διατήρησης της ενέργειας στο άτομο, καθώς η μείωση της ενέργειας του ατομικού ταλαντωτή πρέπει να είναι ίση με την ενέργεια που εκπέμπεται από αυτόν με τη μορφή ακτινοβολίας. Αντίστοιχα η αύξηση της ενέργειας του ατομικού ταλαντωτή πρέπει να είναι ίση με την ενέργεια που απορροφάει ο ταλαντωτής με τη μορφή ακτινοβολίας.

Το ποσό της ενέργειας, που μπορεί να απορροφήσει ή να εκπέμψει ένα άτομο, υπό μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, μπορεί να πάρει μόνο διακριτές τιμές.

Η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία μεταφέρεται σε διάκριτες ποσότητες.

Τα άτομα, λοιπόν, απορροφούν ή εκπέμπουν ενέργεια όχι συνεχώς αλλά κάνοντας ενεργειακά άλματα.

Αν το άτομο απορροφήσει ένα κβάντο ενέργειας δηλαδή ενέργεια $\Delta E = hf$, αυξάνει την ενέργειά του κατά ένα σκαλοπάτι στην κλίμακα των ενεργειακών σταθμών. Αν πάλι το άτομο εκπέμπει ένα κβάντο ενέργειας υπό μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας τότε κατεβαίνει ένα σκαλοπάτι στην ίδια κλίμακα. Όσο ο ταλαντωτής παραμένει σε κάποια από τις κβαντισμένες του καταστάσεις δεν εκπέμπει ούτε απορροφά ακτινοβολία.

Τα κβάντα εκπέμπονται όταν ο ταλαντωτής μεταβαίνει από μια υψηλότερη σε μια χαμηλότερη ενεργειακή κατάσταση. Η ενέργεια ενός κβάντου είναι

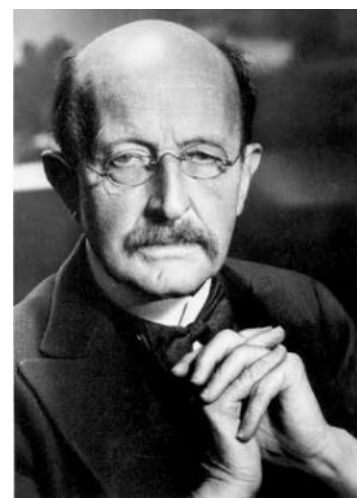
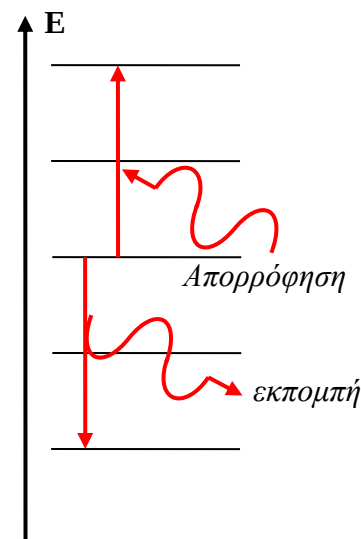
$$\Delta E_n = \Delta n \cdot h \cdot f$$

Όπου Δn η διαφορά των κβαντικών αριθμών.

- Για $f \rightarrow 0$ η ποσότητα $h \cdot f$ παίρνει πολύ μικρές τιμές. Επομένως η απόσταση δύο ενεργειακών σταθμών είναι πολύ μικρή και το φάσμα ακτινοβολίας καθίσταται συνεχές. Οδηγούμαστε δηλαδή σε αυτό που ονομάζεται «κλασικό όριο». Η κβαντική φύση της ακτινοβολίας είναι φανερή στις υψηλές συχνότητες, ενώ στο όριο των χαμηλών συχνοτήτων έχουμε την ισχύ της κλασικής φυσικής.

- Παρά το γεγονός ότι κάθε άτομο (ταλαντωτής) της κοιλότητας εκπέμπει ή απορροφά ακτινοβολία ορισμένης συχνότητας, το φάσμα της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας του μέλανος σώματος είναι συνεχές, λόγω του μεγάλου πλήθους των ατόμων του.

Ο Planck προσπάθησε να μετρήσει τον αριθμό των τρόπων, με τους οποίους μια δεδομένη ενέργεια μπορεί να κατανεμηθεί μεταξύ ενός πλήθους ταλαντωτών. Ο Planck δεν δέχτηκε το θεώρημα της ισοκατανομής ως θεμελιώδες. Ας σημειωθεί ότι ο Planck όταν μιλούσε για ταλαντωτές εννοούσε τα άτομα. Ο όρος ταλαντωτής είναι μια ασαφής στοιχειώδης οντότητα που ταλαντώνεται σε μια συχνότητα που εξαρτάται από τη θερμοκρασία. Στην προσπάθειά του να βρει αυτή τη διαδικασία αρίθμησης, ο Planck εμπνεύστηκε από τον Boltzmann και εισήγαγε αυτό που αποκάλεσε «ενεργειακά στοιχεία», (energy elements αργότερα ονομάστηκαν κβάντα). Αρχικά έπρεπε να παραδεχθεί ότι ο δεύτερος θερμοδυναμικός νόμος δεν έχει καθολική ισχύ, αλλά όπως είχε δεχθεί ο Boltzmann έχει στατιστική ισχύ (με μεγάλη πιθανότητα να συμβαίνει) και δεύτερον να παραδεχθεί ότι η ενέργεια ταλάντωσης των ατόμων παίρνει όχι συνεχείς τιμές αλλά διακριτές. Έτσι η πιθανότητα ένα άτομο να είναι διεγερμένο σε κατάσταση υψηλής ενέργειας είναι σημαντικά μικρότερη σε σχέση με την πιθανότητα να είναι διεγερμένο σε



Ο Μαξ Πλανκ (Max Karl Ernst Ludwig Planck) 1858 – 1947 .

Γεννήθηκε στις 23 Απριλίου 1858 στο Κίελο της Γερμανίας. Σπούδασε στο Μόναχο και στο Βερολίνο όπου πήρε το διδακτορικό του το 1879. Εργάστηκε για κάποιο διάστημα στο Κίελο και το 1889 έγινε καθηγητής θεωρητικής φυσικής στο πανεπιστήμιο του Βερολίνου στη θέση του Kirchhoff. Αρχικά ασχολείτο με τη θερμοδυναμική και όταν στο Βερολίνο γνώρισε την πειραματική εργασία συναδέλφων πάνω στη θερμική ακτινοβολία, καταπιείστηκε και εξήγησε τον νόμο της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος. Οι εργασίες του ήταν η αρχή της κβαντικής φυσικής και το 1918 τιμήθηκε με το βραβείο Nobel για την ανακάλυψη της κβάντωσης της ενέργειας. Θεωρείται ως ο πατέρας της Κβαντικής Θεωρίας κι ένας από τους πιο σημαντικούς φυσικούς του εικοστού αιώνα.

χαμηλής ενέργειας για δεδομένη θερμοκρασία. Στις μικρές συχνότητες δηλαδή στα μεγάλα μήκη κύματος περισσότερα άτομα είναι διεγερμένα, αλλά οι ενεργειακές στάθμες είναι κοντά η μία με την άλλη με αποτέλεσμα κατά τις αποδιεγέρσεις να εκπέμπεται μικρό ποσό ενέργειας ανά μονάδα χρόνου και συνολικά η ένταση της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας να είναι χαμηλή. Στις υψηλές συχνότητες παρόλο που οι διαφορές μεταξύ των ενεργειακών σταθμών των ατόμων είναι μεγαλύτερες, εντούτοις τα άτομα που είναι διεγερμένα είναι πολύ λιγότερα, οπότε οι αποδιεγέρσεις τους συνεισφέρουν και πάλι μικρό ποσό ενέργειας ανά μονάδα χρόνου, άρα και χαμηλή ένταση εκπεμπόμενης ακτινοβολίας.

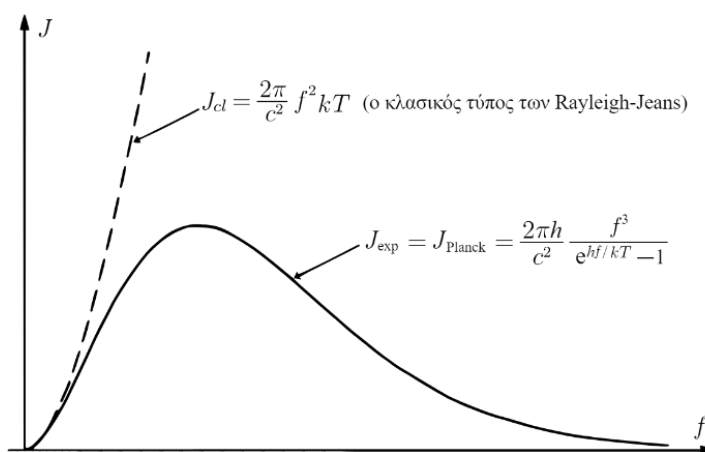
Ηλεκτρονιοβόλτ, eV

Το ηλεκτρονιοβόλτ (eV) είναι μονάδα μέτρησης ενέργειας. Είναι η ενέργεια που μεταβιβάζεται σε ένα ηλεκτρόνιο αν αυτό επιταχυνθεί από τάση $V=1\text{Volt}$. Είναι ίση με:

$$1\text{ eV}=1\text{e}\cdot 1\text{V}=1,6\cdot 10^{-19}\text{C}\cdot 1\text{V}=1,6\cdot 10^{-19}\text{J}$$

Είναι πολύ μικρή μονάδα ενέργειας της τάξης μεγέθους αυτών που συναντώνται στα ατομικά φαινόμενα, και έτσι χρησιμοποιείται συχνά στη μελέτη τους.

Ο θερμικός χαρακτήρας της ακτινοβολίας του μέλανος σώματος σε συνδυασμό με την υπόθεση του Planck μας δίνει μια φυσική ερμηνεία του διαγράμματος. Από την κινητική ενέργεια των αερίων γνωρίζουμε ότι η μέση κινητική ενέργεια ανά μόριο είναι $(3/2)kT$. Γενικά ο παράγοντας kT χαρακτηρίζει τη ζωηρότητα της θερμικής κίνησης των μορίων και είναι περίπου ίσος με $1/40$ του ηλεκτρονιοβόλτ, ($1\text{eV}=1,6\cdot 10^{-19}\text{J}$) σε θερμοκρασία δωματίου η οποία είναι περίπου εκατό φορές μικρότερη από την



ενέργεια των κβάντων του ορατού φωτός ($\epsilon \approx 2\text{ eV}$) και επομένως η διέγερση αυτών των κβάντων είναι αδύνατη σε αυτή τη θερμοκρασία. Για το λόγο αυτό τα σώματα σε θερμοκρασία δωματίου εκπέμπουν θερμική (αόρατη υπέρυθη) ακτινοβολία αλλά όχι φως. Σε θερμοκρασία δωματίου θα μπορούν λοιπόν να δημιουργηθούν μόνο εκείνα τα φωτεινά κβάντα με ενέργεια μικρότερη του kT , δηλαδή τα μικρής συχνότητας. Τα κβάντα με υψηλή συχνότητα και μικρό μήκος κύματος δεν θα είναι δυνατόν να δημιουργηθούν και να είναι παρόντα στο εκπεμπόμενο φάσμα πράγμα που η κλασική φυσική δεν μπορούσε να ερμηνεύσει.

7.1.6 Λυμένα Παραδείγματα

Παράδειγμα 1.

Η θερμοκρασία της επιφάνειας του Ήλιου είναι $T = 6.000 \text{ K}$. Δίνονται η σταθερά του Planck $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$, η ταχύτητα του φωτός στο κενό $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, η σχέση $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ και η σταθερά του νόμου Wien $2,9 \cdot 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{K}$. Θεωρώντας ότι ο Ήλιος είναι μέλαν σώμα, να υπολογιστούν:

- α1. το μήκος κύματος αιχμής $\lambda_{\max}$ της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας,
- α2. η συχνότητα f της ακτινοβολίας που αντιστοιχεί στο μήκος κύματος αιχμής,
- α3. η ενέργεια που έχει ένα κβάντο ενέργειας της ακτινοβολίας μήκους κύματος $\lambda_{\max}$

B. Μία φωτεινή πηγή με ισχύ $P = 411 \text{ W}$ εκπέμπει μονοχρωματική ακτινοβολία μήκους κύματος $\lambda_{\max}$. Να υπολογιστεί ο αριθμός των κβάντων ενέργειας που εκπέμπονται από την πηγή σε χρονικό διάστημα $\Delta t = 1 \text{ min}$.

Απάντηση:

α1. Από τον νόμο του Wien: $\lambda_{\max} T = \text{σταθερό έχουμε:}$

$$\lambda_{\max} T = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{K} \Rightarrow \lambda_{\max} = \frac{2,9 \cdot 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{K}}{T} \Rightarrow \lambda_{\max} = 483 \text{ nm}$$

Επομένως, η ακτινοβολία ανήκει στην περιοχή του ορατού φωτός.

α2. Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής $c = \lambda f$ προκύπτει: $f = \frac{c}{\lambda_{\max}} \Rightarrow f = 6,21 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$

α3. Η ενέργεια που έχει ένα κβάντο ενέργειας της ακτινοβολίας μήκους κύματος $\lambda_{\max}$ δίνεται από τη σχέση $E = hf$. Επομένως: $E = hf \Rightarrow E = 41,1723 \cdot 10^{-20} \text{ J} \Rightarrow E = 2,57 \text{ eV}$

B. Η ισχύς μίας φωτεινής πηγής δίνεται από τη E σχέση $P = \frac{E}{\Delta t}$. Εάν σε χρονικό διάστημα Δt η πηγή

εκπέμπει N κβάντα ενέργειας, η συνολική τους ενέργεια είναι: $E = Nhf$. Επομένως:

$$P = \frac{E}{\Delta t} = \frac{Nhf}{\Delta t} \Rightarrow N = \frac{P\Delta t}{hf} \Rightarrow N = 6 \cdot 10^{22} \text{ κβάντα ενέργειας.}$$

Παράδειγμα 2.

Ένα σώμα μάζας $m = 2 \text{ kg}$ είναι δεμένο στο ένα άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθερός $k = 32 \text{ N/m}$ και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $A = 2 \text{ cm}$. Θεωρούμε ότι το σύστημα αποτελεί κβαντικό ταλαντωτή, δηλαδή ταλαντωτή του οποίου η ενέργεια παίρνει μόνο διακριτές τιμές. Δίνεται η σταθερά του Planck $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$. Να υπολογιστούν:

- α. η συχνότητα της ταλάντωσης,
- β. η ενέργεια του ταλαντωτή,
- γ. το ενεργειακό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών ενεργειακών σταθμών,
- δ. ο κβαντικός αριθμός n της ενεργειακής στάθμης στην οποία βρίσκεται ο ταλαντωτής,
- ε. το ποσοστό στα εκατό της μεταβολής της ενέργειας της ταλάντωσης, εάν ο κβαντικός αριθμός της ενεργειακής στάθμης του ταλαντωτή αυξηθεί κατά 2 μονάδες.

Απάντηση:

α. Η συχνότητα της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow f = \frac{2}{\pi} \text{ Hz}$$

β. Η ενέργεια του ταλαντωτή είναι: $E = \frac{1}{2} kA^2 \Rightarrow E = 6,4 \cdot 10^{-3} \text{ J}$

γ. Σύμφωνα με την υπόθεση του Planck, η διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών ενεργειακών σταθμών του ταλαντωτή είναι: $\Delta E = hf \Rightarrow \Delta E = 4,22 \cdot 10^{-34} \text{ J}$. Είναι προφανές ότι η διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών ενεργειακών σταθμών του ταλαντωτή είναι πολύ μικρή και επομένως πολύ δύσκολα ανιχνεύεται.

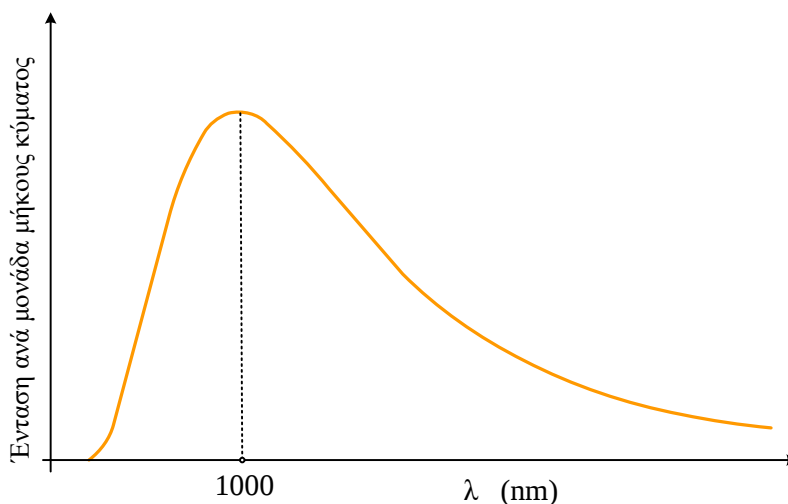
δ. Εάν η είναι ο κβαντικός αριθμός της ενεργειακής κατάστασης στην οποία βρίσκεται ο ταλαντωτής, ισχύει: $E = nhf \Rightarrow 6,4 \cdot 10^{-3} = n \cdot 4,22 \cdot 10^{-34} \Rightarrow n = 1,5 \cdot 10^{31}$.

ε. Όταν ο κβαντικός αριθμός της ενεργειακής στάθμης του ταλαντωτή γίνεται $n' = n + 2$, έχουμε:

$$\pi = \frac{E' - E}{E} \cdot 100\% = \frac{(n+2)hf - nhf}{nhf} \cdot 100\% = \frac{2}{n} \cdot 100\% \Rightarrow \frac{2}{1,5 \cdot 10^{31}} \cdot 100\% \pi = 1,33 \cdot 10^{-29} \%$$

Παράδειγμα 3.

Διαθέτουμε ένα λαμπτήρα πυρακτώσεως των 100W, (περιλαμβάνει ένα λεπτό σύρμα Βολφραμίου), ο οποίος λειτουργεί κανονικά, με θερμοκρασία σύρματος $T=3.200\text{K}$. Στο διάγραμμα φαίνεται η ένταση της ακτινοβολίας του λαμπτήρα, ανά μονάδα μήκους κύματος, σε συνάρτηση με το μήκος κύματος της ακτινοβολίας, από όπου προκύπτει ότι η μέγιστη ισχύς εκπέμπεται σε μήκος κύματος $\lambda_{\text{max}} = 1.000\text{nm}$. Δεδομένου ότι το ορατό φως έχει μήκη κύματος περίπου από τα 400nm έως τα 700nm:

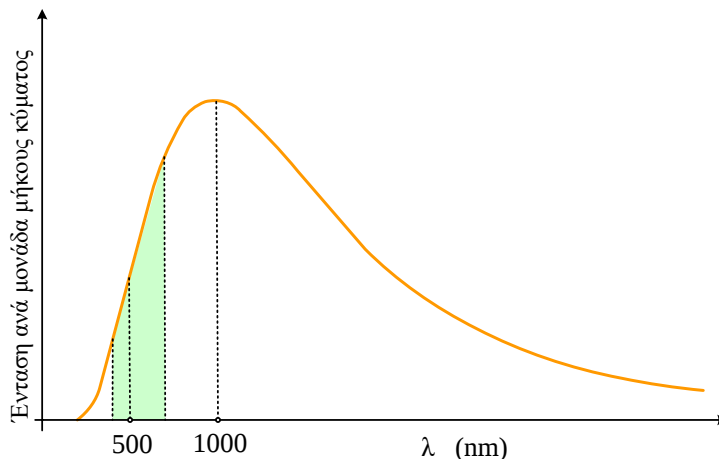


- i) Να δικαιολογήσετε γιατί ο λαμπτήρας αυτός εκπέμπει **και** ορατό φως.
 - ii) Το φως του λαμπτήρα αυτού, δεν είναι «καθαρό λευκό χρώμα», αλλά έχει μια απόχρωση προς το κίτρινο. Μπορείτε να το εξηγήσετε;
 - iii) Αν οι απώλειες ισχύος στον λαμπτήρα φτάνουν τα 12W, τότε η ισχύς της ορατής ακτινοβολίας που εκπέμπει ο λαμπτήρας μπορεί να είναι:
 - α) 5W, β) 44W, γ) 88W
 - iv) Χρησιμοποιώντας την παραπάνω απάντησή σας, πόσα φωτόνια φτάνουν στην ίριδα του ματιού μας, όταν στεκόμαστε σε απόσταση 2m από τον λαμπτήρα, ανά δευτερόλεπτο; Θεωρείστε ότι η επιφάνεια της ίριδας είναι 12mm^2 και ότι όλα τα φωτόνια του φωτός έχουν το ίδιο μήκος κύματος $\lambda=600\text{nm}$.
 - v) Αν μια μέρα έχουμε πτώση τάσεως δικτύου από τα 230V στα 160V, τι πρόκειται να παρατηρήσουμε στην λειτουργία του λαμπτήρα;
 - vi) Λαμβάνοντας την αντίστοιχη καμπύλη της ($I/\Delta\lambda=f(\lambda)$) για το ηλιακό φως, βρίσκουμε ότι το μέγιστο της ακτινοβολούμενης έντασης εμφανίζεται περίπου στα 550nm (η μέση τιμή των μηκών κύματος του ορατού φωτός). Θεωρώντας ότι το φως αυτό προέρχεται από την επιφάνεια του Ήλιου, μπορείτε να υπολογίσετε την επιφανειακή του θερμοκρασία;
- Δίνονται η σταθερά του Planck $h=6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ και η ταχύτητα του φωτός $c=3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

Απάντηση:

- i) Ο λαμπτήρας μπορεί να εκπέμπει την μέγιστη ισχύ σε μήκος κύματος 1.000nm, αλλά με βάση το διάγραμμα που μας δίνεται, εκπέμπει και κάποια ενέργεια στην περιοχή του ορατού, από τα 400nm-700nm (βλέπε στο σχήμα περιοχή γύρω από τα 500nm)

- ii) Με βάση το διπλανό σχήμα, βλέπουμε ότι πολύ μεγαλύτερη είναι η ένταση της ακτινοβολίας στα μεγαλύτερα μήκη κύματος του ορατού, γύρω στα 700nm, ενώ έχουμε πολύ μικρότερη ένταση στα μικρότερα μήκη κύματος (400nm). Αλλά αφού δεν υπάρχει μια ισορροπημένη εκπομπή σε όλα τα μήκη κύματος, το φως δεν είναι απόλυτα λευκό αφού υπερτερούν οι ακτινοβολίες στην περιοχή του ερυθρού. Έτσι το φως μπορεί να έχει μια ελαφρά κίτρινη απόχρωση.



- iii) Το εμβαδόν στο διάγραμμα, μεταξύ της παραπάνω γραφικής παράστασης και του οριζόντιου άξονα, είναι αριθμητικά ίσο με την ολική ένταση της ακτινοβολίας που εκπέμπει ο λαμπτήρας. Αντίστοιχα το χωρίο με το πρασινωπό χρώμα, θα μας δίνει την συνολική ένταση της ακτινοβολίας που εκπέμπεται στην περιοχή του ορατού φωτός. Αλλά τότε η σύγκριση των δύο εμβαδών, προκύπτει ότι στο ορατό φως εκπέμπεται ένα μικρό μέρος της ακτινοβολούμενης ενέργειας. Κατά συνέπεια η ισχύς που ακτινοβολείται στην περιοχή του ορατού φωτός (από τις τιμές που μας δίνονται), θα είναι ίση με 5W. Σωστό το α).

- iv) Αν θεωρήσουμε τον λαμπτήρα να κατέχει το κέντρο μιας σφαίρας με ακτίνα $R=2m$, τότε η ένταση του φωτός που φτάνει στην επιφάνεια της σφαίρας αυτής, θα είναι:

$$I_1 = \frac{\Delta W}{S \cdot \Delta t} = \frac{P}{4\pi R^2}$$

Αλλά τότε στην ίριδα του ματιού μας, με εμβαδόν S_1 , σε χρόνο Δt θα φτάνει ενέργεια:

$$\Delta W_1 = I_1 \cdot S_1 \cdot \Delta t = \frac{P}{4\pi R^2} \cdot S_1 \cdot \Delta t = \frac{5}{4\pi \cdot 2^2} \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 1J = 1,2 \cdot 10^{-6} J$$

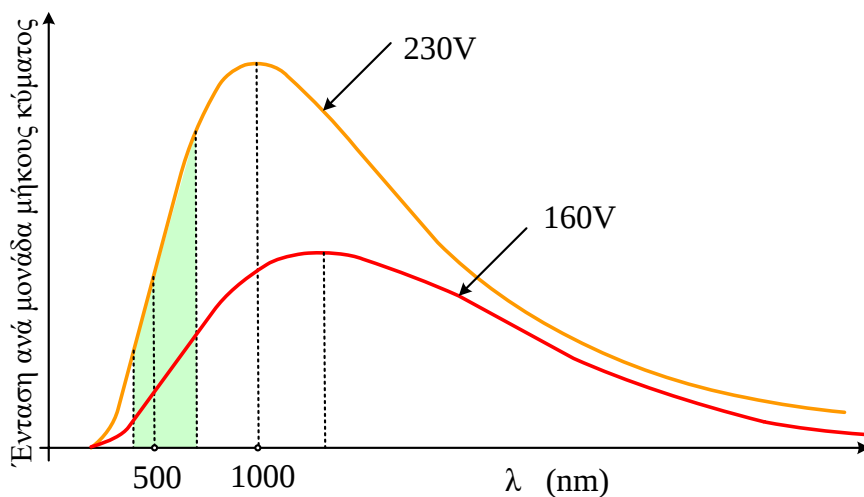
Η ενέργεια αυτή μεταφέρεται από N φωτόνια, όπου το καθένα έχει ενέργεια $E_1=hf$, οπότε:

$$N = \frac{\Delta W_1}{E_1} = \frac{\Delta W_1}{hf} = \frac{\Delta W_1}{h \frac{c}{\lambda}} = \frac{\Delta W_1}{hc} \lambda = \frac{1,2 \cdot 10^{-6}}{6,6 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} 600 \cdot 10^{-9} = 36 \cdot 10^{11}$$

Είναι πολύ «μεγάλος» ο αριθμός αυτός των φωτονίων.

- v) Αν παρουσιαστεί πτώση τάσης, τότε ο ρυθμός με τον οποίο παράγεται θερμότητα στην αντίσταση του λαμπτήρα, θα μειωθεί, αφού $P_Q = \frac{V^2}{R}$. Οπότε άμεση συνέπεια είναι να μειωθεί η θερμοκρασία του

σύρματος, να μειωθεί η ακτινοβολούμενη ενέργεια, αλλά τότε, με βάση το νόμο του Wien, θα αυξηθεί το μήκος κύματος στο οποίο εκπέμπεται η μέγιστη ένταση της ακτινοβολίας. Πράγμα που σημαίνει ότι συνολικά το χρώμα του φωτός που εκπέμπει ο λαμπτήρας, να μετακινηθεί από την περιοχή του λευκού-ελαφρά κιτρινωπού, στην περιοχή του ερυθρού. Άρα λιγότερο φως και με απόχρωση κοκκινωπή!



- vi)** Θεωρώντας και το νήμα του λαμπτήρα και την επιφάνεια του Ήλιου, ότι συμπεριφέρονται ως μέλανα σώματα, εφαρμόζουμε το νόμο του Wien και παίρνουμε:

$$\lambda_{1,\max} \cdot T_1 = \lambda_{2,\max} \cdot T_2 \rightarrow$$

$$T_H = T_2 = \frac{\lambda_{1,\max}}{\lambda_{2,\max}} \cdot T_1 = \frac{1000\text{nm}}{550\text{nm}} \cdot 3.200\text{K} \approx 5.800\text{K}$$

7.2 Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο

Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο ανακαλύφθηκε το 1887 από τον Hertz, εντούτοις μόλις το 1905 ο Einstein κατόρθωσε να το ερμηνεύσει, διευρύνοντας τη θεωρία των κβάντα του Planck. Για την ερμηνεία του φαινομένου τιμήθηκε με το βραβείο Νόμπελ το 1921. Η μελέτη του φαινομένου υπήρξε ιδιαίτερα σημαντική για την κατανόηση της κβαντικής φύσης του φωτός.

Με το όνομα «φωτοηλεκτρικό φαινόμενο» χαρακτηρίζουμε την εκπομπή ηλεκτρονίων από ένα μέταλλο η οποία προκαλείται από την πρόσπτωση ορατής ή υπεριώδους ακτινοβολίας στην επιφάνειά του. Στην πραγματικότητα ο όρος χρησιμοποιείται σήμερα με ένα πολύ ευρύτερο περιεχόμενο. Δηλώνει την απόσπαση ηλεκτρονίων από οποιοδήποτε φυσικό σύστημα —άτομο, μόριο ή στερεό— στο οποίο τα ηλεκτρόνια αυτά είναι δέσμια.

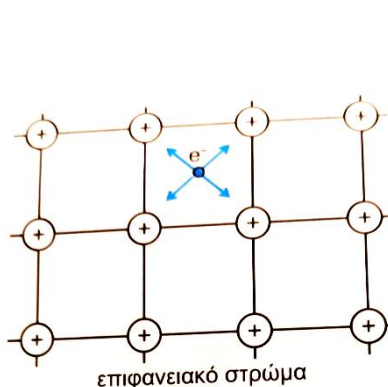
Στα πλαίσια του μαθήματος θα μελετηθεί το φαινόμενο στην περίπτωση που ακτινοβολία προσπίπτει σε **μεταλλική** επιφάνεια και ορίζουμε το φαινόμενο ως εξής:

Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο είναι το φαινόμενο κατά το οποίο μια μεταλλική επιφάνεια απελευθερώνει ηλεκτρόνια στο περιβάλλον όταν πάνω της προσπίπτει φως.

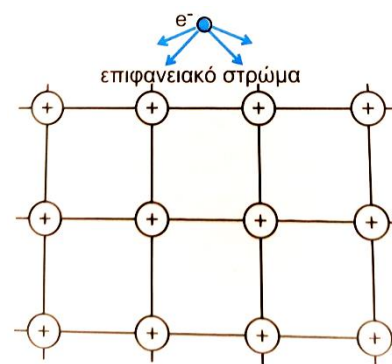
7.2.1 Εξαγωγή ηλεκτρονίων από μέταλλα.

Είναι γνωστό ότι τα μέταλλα αποτελούνται από θετικά ιόντα που είναι τοποθετημένα συμμετρικά στο κρυσταλλικό πλέγμα. Μέσα στο μέταλλο βρίσκονται εγκλωβισμένα τα ελεύθερα ηλεκτρόνια, περίπου 10^{22} ηλεκτρόνια ανά cm^3 , που πρακτικά ισοδυναμεί με ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο για κάθε άτομο του υλικού.

Πάνω στα ελεύθερα ηλεκτρόνια που βρίσκονται στο εσωτερικό ενός μετάλλου, εξασκούνται δυνάμεις από τα θετικά ιόντα του πλέγματος. Οι



Σχήμα 1



Σχήμα 2

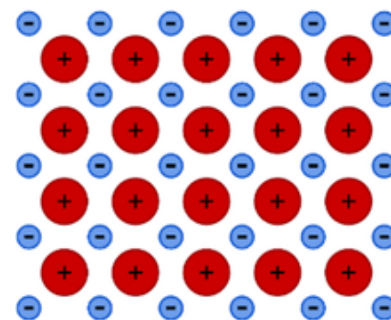
δυνάμεις αυτές έχουν τυχαίες διευθύνσεις και επομένως η συνισταμένη τους είναι μηδέν, με αποτέλεσμα τα ελεύθερα ηλεκτρόνια να μπορούν να κινούνται μέσα στο μέταλλο, σχήμα 1. Όταν ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο λόγω της ταχύτητάς του, βρεθεί έξω από το μέταλλο, τότε δέχεται δυνάμεις από τα ιόντα. Η συνισταμένη των δυνάμεων αυτών έχει τέτοια φορά, που τείνει να επαναφέρει το ελεύθερο ηλεκτρόνιο στο εσωτερικό του μετάλλου σχήμα 2. Για να μπορέσει, λοιπόν, να απομακρυνθεί από το μέταλλο ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο, πρέπει να υπερνικήσει αυτές τις ελκτικές δυνάμεις του πλέγματος.

Σε κανονικές συνθήκες η μέγιστη κινητική ενέργεια των ελεύθερων ηλεκτρονίων δεν είναι αρκετή για να υπερνικηθούν αυτές οι δυνάμεις. Επομένως, για να μπορέσει να ξεφύγει οριστικά ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο από το μέταλλο, θα πρέπει να του προσφερθεί με κάποιο τρόπο επιπλέον ενέργεια. Η ελάχιστη ενέργεια που πρέπει να προσφερθεί σε ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο κάποιου μετάλλου, για να μπορέσει να εγκαταλείψει οριστικά την επιφάνεια του μετάλλου, ονομάζεται έργο εξαγωγής ϕ και αποτελεί μια χαρακτηριστική σταθερά του μετάλλου. Το έργο εξαγωγής συνήθως το εκφράζουμε σε ηλεκτρονιοβόλτ, eV.

Η εξαγωγή των ηλεκτρονίων μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους. Ένας από αυτούς είναι με θέρμανση του μετάλλου. Όταν θερμάνουμε σε υψηλή θερμοκρασία ένα μέταλλο, ένας μεγάλος αριθμός ελεύθερων ηλεκτρονίων αποκτά μεγάλες ταχύτητες άρα και μεγάλη κινητική ενέργεια. Τα ηλεκτρόνια αυτά υπερνικούν τις ελκτικές δυνάμεις των θετικών ιόντων του μετάλλου και έτσι διαφεύγουν από αυτό. Η εξαγωγή αυτή καλείται **θερμική ή θερμοιονική εκπομπή**. Ένας άλλος τρόπος είναι με απορρόφηση ακτινοβολίας που καλείται **φωτοηλεκτρικό φαινόμενο** και παρουσιάζεται παρακάτω.

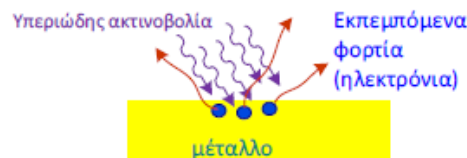
7.2.2 Περιγραφή φωτοηλεκτρικού φαινομένου

Τα **ελεύθερα**¹ ηλεκτρόνια των μετάλλων, κινούμενα με τυχαίες ταχύτητες, περιορίζονται στο εσωτερικό των αγωγών λόγω ελκτικών δυνάμεων (μεταλλικός δεσμός) και δεν μπορούν να διαχυθούν στο περιβάλλον. Όταν μια δέσμη φωτός προσπίπτει πάνω στην επιφάνεια του αγωγού κάποια ηλεκτρόνια απορροφούν ενέργεια αρκετή για να υπερνικήσουν αυτές τις δυνάμεις και βγαίνουν από το μέταλλο (**φωτοηλεκτρόνια**).



Η ελάχιστη ενέργεια που πρέπει να προσλάβει ένα ηλεκτρόνιο της επιφάνειας του μετάλλου για να υπερνικήσει τις ελκτικές δυνάμεις του μετάλλου που το συγκρατούν όπως ήδη έχει αναφερθεί την ονομάζουμε **έργο εξαγωγής**, συμβολίζεται (διεθνώς) με ϕ και εξαρτάται μόνο από το είδος του μετάλλου.

Να τονιστεί **ότι το έργο εξαγωγής αναφέρεται στην ελάχιστη ενέργεια που χρειάζονται εκείνα τα ηλεκτρόνια που βρίσκονται στις υψηλότερες ενεργειακές καταστάσεις**, που κινούνται δηλαδή με τις μεγαλύτερες ταχύτητες. Τα ηλεκτρόνια που κινούνται με μικρότερες ταχύτητες, χρειάζονται περισσότερη ενέργεια.



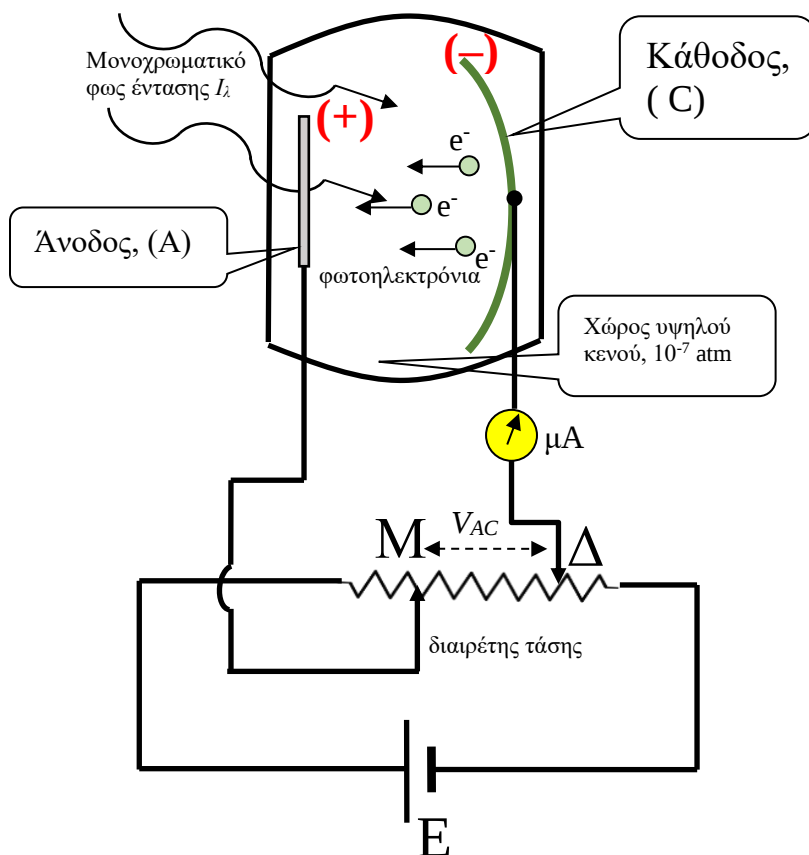
¹ Ελεύθερα εννοείται ότι δεν ανήκουν σε ένα συγκεκριμένο πυρήνα αλλά είναι δέσμια στο μέταλλο. Σε τελείως ελεύθερα ηλεκτρόνια δεν μπορεί να απορροφηθεί τελείως η ενέργεια του φωτονίου και δεν μπορεί να συμβεί το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο καθώς παραβιάζει αρχές διατήρησης ενέργειας και ορμής. Πρέπει να είναι δέσμιο είτε σε άτομο ή σε μέταλλο.

7.2.3 Περιγραφή της διάταξης για τη μελέτη του φωτοηλεκτρικού φαινομένου

Η πειραματική διάταξη με την οποία μελετάμε το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο αποτελείται από μια μεταλλική καμπύλη επιφάνεια, την **κάθοδο**, (C) και ένα μεταλλικό σύρμα, την **άνοδο**, (A). Από την κάθοδο, που φέρει επίστρωση αλκαλιμέταλλου (K ή Cs), ελευθερώνονται τα φωτοηλεκτρόνια και στην άνοδο συλλέγονται. Τα δύο ηλεκτρόδια βρίσκονται μέσα σε σωλήνα υψηλού κενού (περίπου 10^{-7} atm) και συνδέονται με μια ποτενσιομετρική διάταξη, η οποία μας επιτρέπει να μεταβάλλουμε τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των δύο ηλεκτροδίων. Ένα μικροαμπερόμετρο που παρεμβάλλεται στο κύκλωμα, μας επιτρέπει να μετράμε την ένταση του ρεύματος που δημιουργείται. Όταν η κάθοδος φωτίζεται, ελευθερώνονται ηλεκτρόνια, **φωτοηλεκτρόνια**, τα οποία επιταχυνόμενα από το ηλεκτρικό πεδίο φθάνουν στην άνοδο, δημιουργώντας ένα μικρό ηλεκτρικό ρεύμα, το **φωτοηλεκτρικό ρεύμα**.

Με την πολικότητα της πηγής όπως φαίνεται στο σχήμα τα ηλεκτρόνια που εκπέμπονται από την κάθοδο επιταχύνονται. Μπορούμε όμως να μηδενίσουμε την τάση ή ακόμα και να αλλάξουμε την πολικότητα μεταξύ ανόδου και καθόδου όταν ο δρομέας Δ βρίσκεται αριστερά του M, εμποδίζοντας την κίνηση των ηλεκτρονίων.

Παρατηρήθηκε ότι υπάρχει ρεύμα και με μηδενική τάση καθώς τα ηλεκτρόνια εκπέμπονται από την κάθοδο έχοντας ήδη κινητική ενέργεια. Αυξάνοντας σταδιακά την αντίθετη πολικότητα μπορούμε να μετρήσουμε έμμεσα την κινητική ενέργεια των εκπεμπόμενων φωτοηλεκτρονίων βλέποντας για ποια τιμή της τάσης σταματά το ρεύμα.



Με την μετακίνηση του δρομέα Δ , μπορούμε να μεταβάλλουμε την τάση μεταξύ ανόδου και καθόδου. Όταν ο δρομέας Δ είναι αριστερά του M αλλάζει η πολικότητα μεταξύ ανόδου και καθόδου και το πεδίο δυσκολεύει την κίνηση των φωτοηλεκτρονίων

7.2.4 Πειραματικές διαπιστώσεις από τη μελέτη του φωτοηλεκτρικού φαινομένου

Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο μελετήθηκε από τους Hallwachs και Lenard οι οποίοι μελέτησαν πώς μεταβάλλεται το φωτοηλεκτρικό ρεύμα, i σε συνάρτηση:

- με τη συχνότητα, f , του προσπίπτοντος φωτός,
- με την ένταση ακτινοβολίας, I , του προσπίπτοντος φωτός,
- με την εφαρμοζόμενη διαφορά δυναμικού, V , μεταξύ ανόδου και καθόδου.

Οι Hallwachs και Lenard διαπίστωσαν ότι:

1) Για να ελευθερωθούν φωτοηλεκτρόνια πρέπει η προσπίπτουσα ακτινοβολία να έχει συχνότητα **μεγαλύτερη ή ίση** από μια ελάχιστη τιμή, την οποία ονόμασαν **συχνότητα κατωφλίου**, f_0 , και η οποία εξαρτάται μόνο από το υλικό της καθόδου. Όταν το φως έχει συχνότητα μικρότερη από τη συχνότητα κατωφλίου, από την κάθοδο δεν εξέρχονται φωτοηλεκτρόνια, **ανεξάρτητα από το πόσο μεγάλη είναι η ένταση της φωτεινής ακτινοβολίας**.

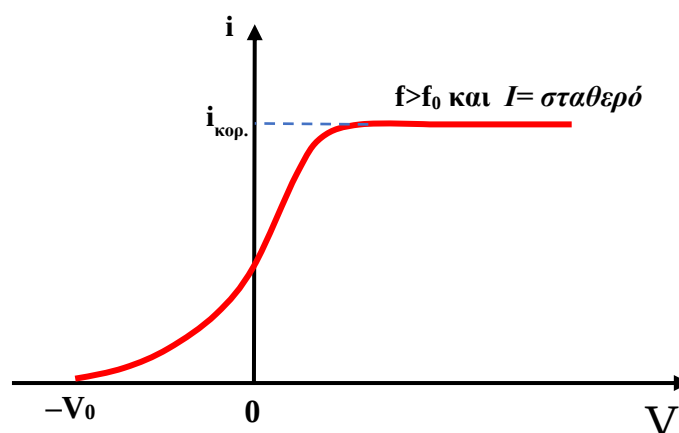
2) Για ακτινοβολία με συχνότητα μεγαλύτερη της συχνότητας κατωφλίου, η αύξηση της έντασης ακτινοβολίας προκαλεί αύξηση του φωτοηλεκτρικού ρεύματος. Δηλαδή ο αριθμός των ηλεκτρονίων που αποσπώνται από το μέταλλο ανά μονάδα χρόνου **είναι ανάλογος της έντασης** της φωτεινής ακτινοβολίας που προσπίπτει σε αυτό. (όχι όμως με μεγαλύτερη ενέργεια για συγκεκριμένη συχνότητα).

3) Η ταχύτητα με την οποία εξέρχονται τα ηλεκτρόνια **δεν εξαρτάται από την ένταση** της φωτεινής ακτινοβολίας **αλλά μόνο από τη συχνότητά της** και αυξάνεται όταν η συχνότητα της ακτινοβολίας μεγαλώνει.

4) Το ρεύμα εμφανίζεται χωρίς καθυστέρηση όταν προσπίπτει το φως. Σε νεότερα πειράματα έχει υπολογιστεί ότι η όποια καθυστέρηση είναι μικρότερη από 1 ns ακόμη και με ασθενή ένταση ακτινοβολίας.

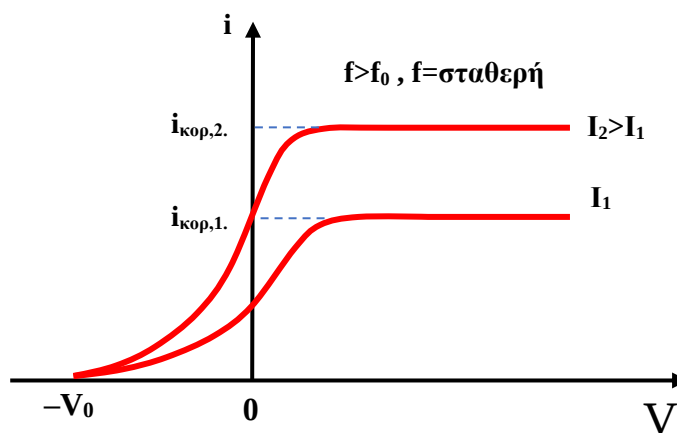
5) Στο διπλανό διάγραμμα παριστάνεται η ένταση του ρεύματος σε συνάρτηση με την διαφορά δυναμικού V_{AC} μεταξύ ανόδου και καθόδου στο κύκλωμα, για μία συγκεκριμένη τιμή της έντασης της ακτινοβολίας I και δεδομένης συχνότητας μεγαλύτερης της συχνότητας κατωφλίου, $f > f_0$. Από την μελέτη του διαγράμματος παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται η διαφορά δυναμικού αυξάνεται το ρεύμα των φωτοηλεκτρονίων. Αυτό εξηγείται από την αύξηση του ηλεκτρικού πεδίου άρα και της δύναμης που δέχονται τα ηλεκτρόνια και συνεπώς να αυξάνεται το πλήθος των

ηλεκτρονίων που προσκρούουν στην άνοδο. Όταν η τάση γίνει αρκετά μεγάλη, το φωτοηλεκτρικό ρεύμα παίρνει μία σταθερή τιμή, ρεύμα κόρου. Αυτό συμβαίνει γιατί από κάποια τάση και μετά όλα τα



ηλεκτρόνια που παράγονται στην κάθοδο συλλέγονται στην άνοδο. Όταν η εφαρμοζόμενη διαφορά δυναμικού είναι μηδέν, κάποια φωτοηλεκτρόνια έχουν αρκετή κινητική ενέργεια για να φθάσουν στην άνοδο και να δημιουργήσουν ένα μικρό φωτοηλεκτρικό ρεύμα. Ακόμη και όταν η εφαρμοζόμενη διαφορά δυναμικού αντιστραφεί και τα ηλεκτρόνια **εμποδίζονται από το πεδίο**, κάποια καταφέρνουν να φθάσουν στην άνοδο. Η ροή των ηλεκτρονίων μηδενίζεται μόνο όταν η αντίστροφη διαφορά δυναμικού V είναι αρκετά μεγάλη ώστε τα ηλεκτρόνια να μην φτάνουν στην άνοδο.

6) Επαναλαμβάνοντας το πείραμα για μεγαλύτερη ένταση ακτινοβολίας προκύπτει το εξής διάγραμμα. Παρατηρούμε ότι η τάση αποκοπής δεν εξαρτάται από την ένταση της ακτινοβολίας. Δηλαδή η κινητική ενέργεια με την οποία φεύγουν τα ηλεκτρόνια από την κάθοδο δεν σχετίζεται με την συνολική ενέργεια που προσπίπτει στο μέταλλο αλλά με την συχνότητα της ακτινοβολίας. Από την άλλη βέβαια όταν η ένταση της προσπίπτουσας ακτινοβολίας είναι μεγαλύτερη έχουμε μεγαλύτερο ρεύμα δηλαδή μεγαλύτερο αριθμό ηλεκτρονίων που εκπέμπονται από την κάθοδο.



7.2.5 Αποτυχία ερμηνείας του φωτοηλεκτρικού φαινομένου από την κλασική θεωρία

Τα πειραματικά αποτελέσματα του φωτοηλεκτρικού φαινομένου είχαν δημιουργήσει, προς στιγμή, σύγχυση στους φυσικούς επιστήμονες της τότε εποχής. Η κλασική φυσική με την κυματική θεωρία σύμφωνα με την οποία ένα σώμα μπορεί να εκπέμψει ή να απορροφήσει ενέργεια κατά **συνεχή** τρόπο, δεν μπορούσε να εξηγήσει πολλές από τις ιδιότητες του φωτοηλεκτρικού φαινομένου.

Σύμφωνα με την κλασική θεωρία το φως, που είναι ηλεκτρομαγνητικό κύμα, μεταφέρει ενέργεια η οποία απορροφάται από τα ηλεκτρόνια, τα οποία στη συνέχεια εξέρχονται του μετάλλου. Αυτό θα εξηγούσε την αύξηση της ενέργειας των ηλεκτρονίων και την εκπομπή τους από την κάθοδο, όπως και το γεγονός ότι μεγαλύτερη ένταση ακτινοβολίας είχε ως αποτέλεσμα μεγαλύτερο ρεύμα. Αδυνατούσε όμως να ερμηνεύσει κάποια άλλα χαρακτηριστικά του φαινομένου:

- Επειδή η ένταση I της ακτινοβολίας εξαρτάται από την μεταφερόμενη ενέργεια της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, θα έπρεπε η τάση αποκοπής να αυξάνεται με την αύξηση της έντασης I . Η αύξηση της έντασης της ακτινοβολίας θα έπρεπε να προκαλέσει μεγαλύτερη απορρόφηση ενέργειας, επομένως τα εξερχόμενα ηλεκτρόνια θα έπρεπε να είχαν μεγαλύτερη κινητική ενέργεια, άρα και το δυναμικό αποκοπής θα έπρεπε να αυξηθεί. Καθώς η ένταση ακτινοβολίας δεν εξαρτάται από τη συχνότητα f , θα έπρεπε η τάση αποκοπής να μην επηρεάζεται από τη συχνότητα. Όμως το δυναμικό αποκοπής δεν εξαρτάται από την ένταση της φωτεινής ακτινοβολίας, αλλά μόνον από τη συχνότητά της.
- Η κλασική θεωρία δεν μπορούσε να ερμηνεύσει τη συχνότητα κατωφλίου. Η ένταση I της ακτινοβολίας εξαρτάται από το πλάτος του ηλεκτρομαγνητικού κύματος, δηλαδή την μεταφερόμενη ενέργεια και όχι από τη συχνότητα, άρα θα έπρεπε να συμβαίνει το φαινόμενο για οποιαδήποτε

συχνότητα f . Όταν η συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας είναι μικρή, θα έπρεπε τα ηλεκτρόνια του μετάλλου, αθροίζοντας σταδιακά την προσπίπτουσα ενέργεια, κάποια στιγμή να συγκεντρώσουν αρκετή για να υπερνικήσουν τις ελκτικές δυνάμεις και να εξέλθουν. Αυτό πειραματικά δεν συνέβαινε, απεναντίας οι πειραματικοί φυσικοί της εποχής παρατηρούσαν το αντίθετο. Στην περίπτωση που η προσπίπτουσα ακτινοβολία είχε πολύ μικρή ένταση, αλλά η συχνότητά της ήταν μεγαλύτερη της συχνότητας κατωφλίου, το φωτοηλεκτρικό ρεύμα εμφανιζόταν ακαριαία.

- Ακόμα και το χρονικό διάστημα που χρειαζόταν για να ξεκινήσει το φαινόμενο (μερικά ps) το οποίο δεν άλλαζε ακόμα και για πολύ μικρές εντάσεις προσπίπτουσας ακτινοβολίας δεν μπορούσε να εξηγηθεί με το κλασικό μοντέλο. Αφού η Κλασική φυσική προβλέπει ότι για ακτινοβολία χαμηλής ενέργειας, θα χρειαζόταν σημαντικός χρόνος προτού τα ακτινοβολούμενα ηλεκτρόνια αποκτήσουν επαρκή ενέργεια για να εγκαταλείψουν την επιφάνεια του ηλεκτροδίου- ωστόσο, δεν παρατηρείται τέτοια άθροιση ενέργειας.

7.2.6 Θεωρία Einstein. Εξήγηση του φωτοηλεκτρικού φαινομένου

Η υπόθεση φωτονίων του Einstein

Για την εξήγηση του φωτοηλεκτρικού φαινομένου ο Einstein το 1905 διατύπωσε τη θεωρία των φωτονίων που ήταν ένα επιπλέον άλμα πέρα από τη θεωρία του Planck. Κατά την θεωρία των φωτονίων του Einstein το ηλεκτρομαγνητικό κύμα είναι ασυνεχές όχι διότι εκπέμπεται και απορροφάται ασυνεχώς στην περίπτωση της θερμικής εκπομπής του μέλανος σώματος, αλλά γιατί από τη φύση του έχει ασυνεχή υπόσταση όπως και αν παράγεται και διαδίδεται κατά ασυνεχή τρόπο αποτελούμενο από φωτόνια, τα οποία είναι πακέτα ενέργειας εντοπισμένα και στο χώρο, που διαδίδονται με την ταχύτητα του φωτός. Σύμφωνα με τον Einstein:

1) «το φως αποτελείται από μικρά πακέτα ενέργειας που ονομάζονται κβάντα φωτός ή φωτόνια». Στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο, το φως συμπεριφέρεται σαν ένα σύνολο «σωματιδίων». Κάθε ένα από αυτά μεταφέρει ενέργεια και ορμή, παρόλο που έχει μηδενική μάζα ηρεμίας.

Η ενέργεια κάθε φωτονίου είναι $E = h \cdot f$ ή $E = h \cdot \frac{c}{\lambda}$

Όπου f η συχνότητα του φωτονίου,
 $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}$ η σταθερά του Planck και
 $c = 3 \cdot 10^8 \text{m/s}$ η ταχύτητα του φωτός στο κενό.

2) Κάθε φωτόνιο της δέσμης που προσπίπτει στη μεταλλική επιφάνεια μεταφέρει την ενέργειά του σε ένα μόνο ηλεκτρόνιο, δηλαδή έχουμε σύγκρουση ενός φωτονίου με ένα ηλεκτρόνιο.

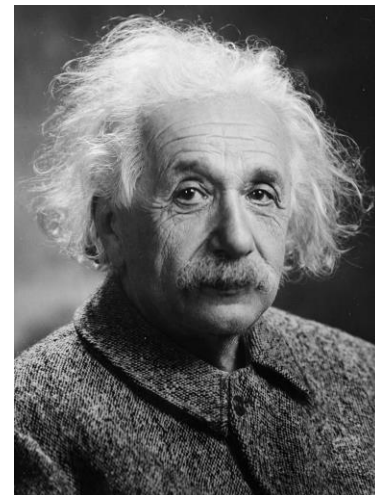
Δεδομένου ότι τα φωτόνια είναι αδιαίρετα, ένα μόνο ηλεκτρόνιο υποχρεούται να απορροφήσει δια μιας ολόκληρη την ενέργεια ενός τέτοιου φωτονίου και θα αποσπαστεί ή όχι από το μέταλλο ανάλογα με το αν η ενέργεια αυτή είναι μεγαλύτερη ή όχι από το έργο εξαγωγής

Επομένως λόγω της αρχής διατήρησης της ενέργειας η ενέργεια αυτή hf θα ισούται με το έργο εξαγωγής ϕ και τη μέγιστη κινητική ενέργεια $K_{\max}$ που αποκτά. Δηλαδή:

$$K_{\max} = h \cdot f - \phi$$

Η παραπάνω σχέση ονομάζεται **Φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein**.

Η παραπάνω εξίσωση δίνει την κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων που εγκαταλείπουν το μέταλλο από την επιφάνειά του δηλαδή τα υψηλότερης ενέργειας ηλεκτρόνια και απαιτείται η μικρότερη προσφορά ενέργειας. Επομένως αποκτούν μέγιστη κινητική ενέργεια. Αν τα ηλεκτρόνια εξέρχονται από



Ο Ο Άλμπερτ Αϊνστάιν Albert Einstein
 (14 Μαρτίου 1879 – Πρίνστον, 18
 Απριλίου 1955)

Ήταν Γερμανός φυσικός εβραϊκής καταγωγής, ο οποίος βραβεύτηκε με το Νόμπελ Φυσικής το 1921 για το Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο. Είναι ο θεμελιωτής της Θεωρίας της Σχετικότητας και από πολλούς θεωρείται ο σημαντικότερος επιστήμονας του 20ού αιώνα και ένας απ'τους μεγαλύτερους όλων των εποχών.

Είναι πιο γνωστός στο ευρύ κοινό ιδιαίτερα για τον τύπο του $E=mc^2$ που αναφέρεται από πολλούς ως «η πιο διάσημη εξίσωση στη φυσική».

Η επίδραση των ανακαλύψεων του Αϊνστάιν σχετικά με την φύση του χώρου και του χρόνου, εξακολουθεί να αποτελεί κεντρικό αντικείμενο της επιστημονικής έρευνας σε φυσική, κοσμολογία, και μαθηματικά.

χαμηλότερες ενεργειακές στάθμες, (λιγότερο ενεργητικά) πρέπει να απορροφήσουν μεγαλύτερο ποσό ενέργειας για να εξαχθούν λόγω αλληλεπίδρασης με τα ιόντα και άλλα ηλεκτρόνια.

Η αρχή διατήρησης της ενέργειας γράφεται:

$$hf = \Delta E + \phi + K$$

Όπου

hf : η ενέργεια του φωτονίου που απορροφά το ηλεκτρόνιο του μετάλλου,

ΔE : η ενέργεια που πρόκειται να χάσει το ηλεκτρόνιο κατά την διαδρομή, μέχρι την έξοδο από το μέταλλο (λόγω αλληλεπίδρασης με τα ιόντα και άλλα ηλεκτρόνια),

ϕ : το έργο εξαγωγής και

K : η κινητική ενέργεια που έχει απομείνει στο ηλεκτρόνιο, τη στιγμή που εγκαταλείπει την επιφάνεια της καθόδου.

Αν το ηλεκτρόνιο βρίσκεται αρχικά στην επιφάνεια, τότε $\Delta E = 0$ και η εξίσωση γίνεται: $K_{\max} = h \cdot f - \phi$

• Αν η ενέργεια του φωτονίου, $h \cdot f$, είναι μικρότερη από το έργο εξαγωγής, ϕ , το ηλεκτρόνιο δεν φεύγει από το μέταλλο.

• Αν η ενέργεια του φωτονίου, $h \cdot f$, είναι μεγαλύτερη από το έργο εξαγωγής, ϕ , τότε το ηλεκτρόνιο εγκαταλείπει το μέταλλο με κινητική ενέργεια που είναι ίση με

$$K_{\max} = h \cdot f - \phi$$

7.2.7 Ερμηνεία των πειραματικών δεδομένων με βάση τη φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein

Η φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein ερμηνεύει πλήρως τα πειραματικά δεδομένα του φωτοηλεκτρικού φαινομένου:

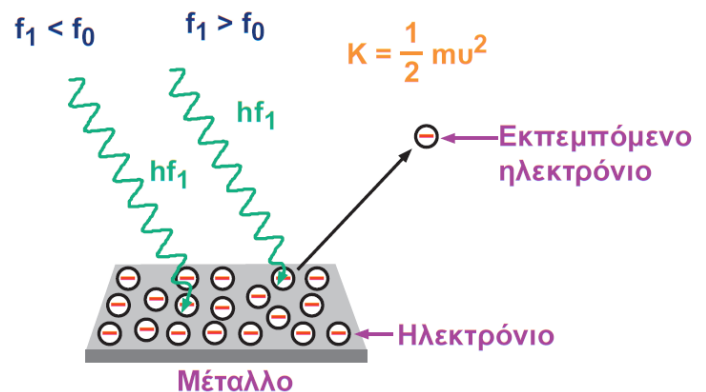
1. Για να εξέλθει ένα ηλεκτρόνιο από το μέταλλο θα πρέπει το φωτόνιο να του μεταφέρει ενέργεια μεγαλύτερη ή ίση από το έργο εξαγωγής

$$K_{\max} \geq 0 \rightarrow h \cdot f - \phi \geq 0 \Rightarrow f \geq \frac{\phi}{h}$$

Άρα, υπάρχει μια ελάχιστη τιμή της συχνότητας για να εμφανιστεί το φαινόμενο, η οποία είναι ίση με

$$f_{\min} = f_0 = \frac{\phi}{h} \quad \text{και} \quad \text{ονομάζεται} \quad \text{συχνότητα}$$

κατωφλίου.



2. Για ακτινοβολία με συχνότητα μεγαλύτερη της συχνότητας κατωφλίου, η αύξηση της έντασης ακτινοβολίας προκαλεί αύξηση του αριθμού των φωτονίων που προσπίπτουν στο μέταλλο, με αποτέλεσμα να ελευθερώνονται περισσότερα φωτοηλεκτρόνια στη μονάδα του χρόνου και να προκαλείται αύξηση του φωτοηλεκτρικού ρεύματος.

Αν θεωρήσουμε ότι σε μια περιοχή της καθόδου εμβαδού A προσπίπτουν N φωτόνια ανά μονάδα χρόνου, τότε η ένταση της προσπίπτουσας στην κάθοδο ακτινοβολίας θα είναι:

$$I = \frac{E}{\Delta t \cdot A} \rightarrow I = \frac{N \cdot h \cdot f}{\Delta t \cdot A}$$

Επομένως αύξηση της έντασης ακτινοβολίας σημαίνει ότι περισσότερα φωτόνια πέφτουν στην κάθοδο στη μονάδα του χρόνου, άρα αποσπώνται περισσότερα φωτοηλεκτρόνια από αυτήν, άρα μεγαλύτερη ένταση ηλεκτρικού ρεύματος.

3. Δεν υπάρχει καμία καθυστέρηση έναρξης του φαινομένου, από τη στιγμή που διαθέτουμε φωτόνια επαρκούς ενέργειας, (συχνότητας), εφόσον αυτά απορροφηθούν η εκπομπή φωτορεύματος παρατηρείται ακαριαία. Η ενέργεια προσφέρεται στο ηλεκτρόνιο όχι βαθμιαία, όπως με τον κλασικό μηχανισμό, αλλά με την απορρόφηση (δια μιάς) ολόκληρης της ενέργειας ενός φωτονίου. Έτσι είναι φανερό ότι δεν θα υπάρχει χρονική καθυστέρηση από την πρόσπτωση του φωτός στο μέταλλο έως την εμφάνιση φωτοηλεκτρικού ρεύματος.

4. Από τη φωτοηλεκτρική εξίσωση, $K_{\max} = h \cdot f - \phi$, προκύπτει άμεσα ότι η $K_{\max}$, άρα και η $v_{\max}$ των εξερχομένων φωτοηλεκτρονίων εξαρτάται από τη συχνότητα και όχι από την ένταση της φωτεινής ακτινοβολίας.

Εδώ να τονιστεί ότι η πιθανότητα να απορροφήσει περισσότερα του ενός φωτονίου το ίδιο ηλεκτρόνιο είναι στατιστικά απίθανο να συμβεί και συνεπώς είναι απίθανο να συμβεί το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο όταν η συχνότητα της ακτινοβολίας είναι μικρότερη της f_0 όποια και να είναι η ένταση της ακτινοβολίας.

Η σχέση $K_{\max} = h \cdot f - \phi$ είναι γραμμική συνάρτηση της συχνότητας f για ένα συγκεκριμένο υλικό της καθόδου.

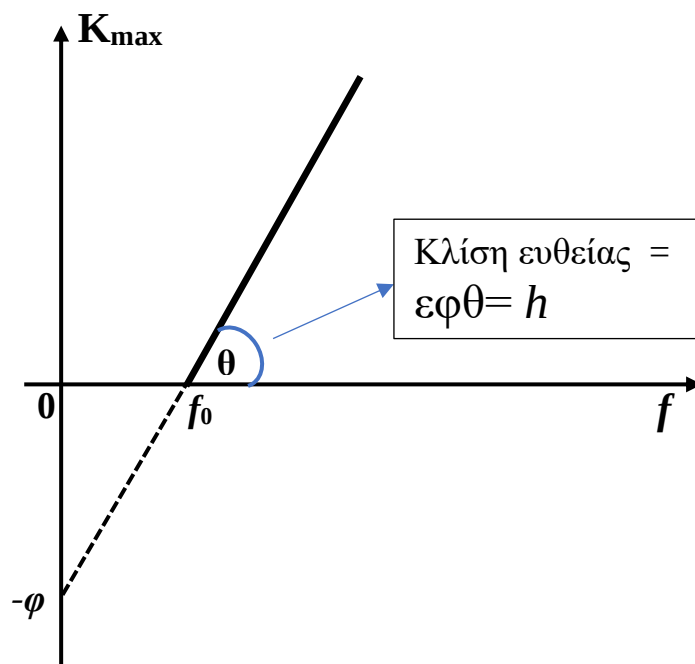
• Ο συντελεστής διεύθυνσης της εξίσωσης ισούται με h . Έτσι από την κλίση της ευθείας μπορεί κάποιος να υπολογίσει πειραματικά την σταθερά του Planck.

• Το σημείο όπου τέμνει τον οριζόντιο άξονα (δηλαδή η συχνότητα για την οποία ξεκινά το φαινόμενο) είναι η συχνότητα κατωφλίου f_0 .

$$K_{\max}=0 \rightarrow f=f_0=h/hf_0.$$

• Τέλος αν προεκτείνουμε την ευθεία αυτή θα τέμνει τον κατακόρυφο άξονα στην τιμή $-\phi$ και συνεπώς μπορούμε να υπολογίσουμε το έργο εξαγωγής.

$$\text{Για } f=0 \rightarrow K_{\max} = -\phi$$



Από την γραφική παράσταση της (μέγιστης) κινητικής ενέργειας των ηλεκτρονίων που εκπέμπονται από την επιφάνεια ενός μετάλλου σε σχέση με τη συχνότητα, του προσπίπτοντος φωτός μπορούμε να βρούμε τη συχνότητα κατωφλίου, το έργο εξαγωγής και τη σταθερά του Planck.

5. Η τάση στην οποία διακόπτεται το φωτοηλεκτρικό ρεύμα ονομάζεται τάση αποκοπής, V_0 .

Είναι προφανές πως αν επιτύχουμε να αποκόψουμε τα πιο κινητικά, δηλαδή αυτά που φεύγουν από την κάθοδο με τη **μέγιστη κινητική ενέργεια** K_{max} , θα μηδενίσουμε το ρεύμα.

Αντιστρέφοντας την πολικότητα μεταξύ ανόδου και καθόδου, το ηλεκτρικό πεδίο δυσκολεύει την κίνηση των φωτοηλεκτρονίων κατά την μετακίνησή τους προς την άνοδο. Για μία τιμή τάσης κανένα ηλεκτρόνιο δεν καταφέρνει να φτάσει στην άνοδο και τότε δεν εμφανίζεται φωτόρευμα. Η τάση αποκοπής θα είναι αυτή για την οποία ένα ηλεκτρόνιο θα φτάνει στην άνοδο με μηδενική ταχύτητα.

Εφαρμόζοντας ΘΜΚΕ από την κάθοδο στην άνοδο (με ανεστραμμένη την πολικότητα της πηγής) για τα πιο κινητικά φωτοηλεκτρόνια και θεωρώντας ότι για την τάση αποκοπής θα φτάσουν οριακά στην άνοδο ($K_{τελ} = 0$) παίρνουμε

$$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{Fηλ} \rightarrow$$

$$0 - K_{αρχ} = q(V_{καθ} - V_{αν}) \rightarrow$$

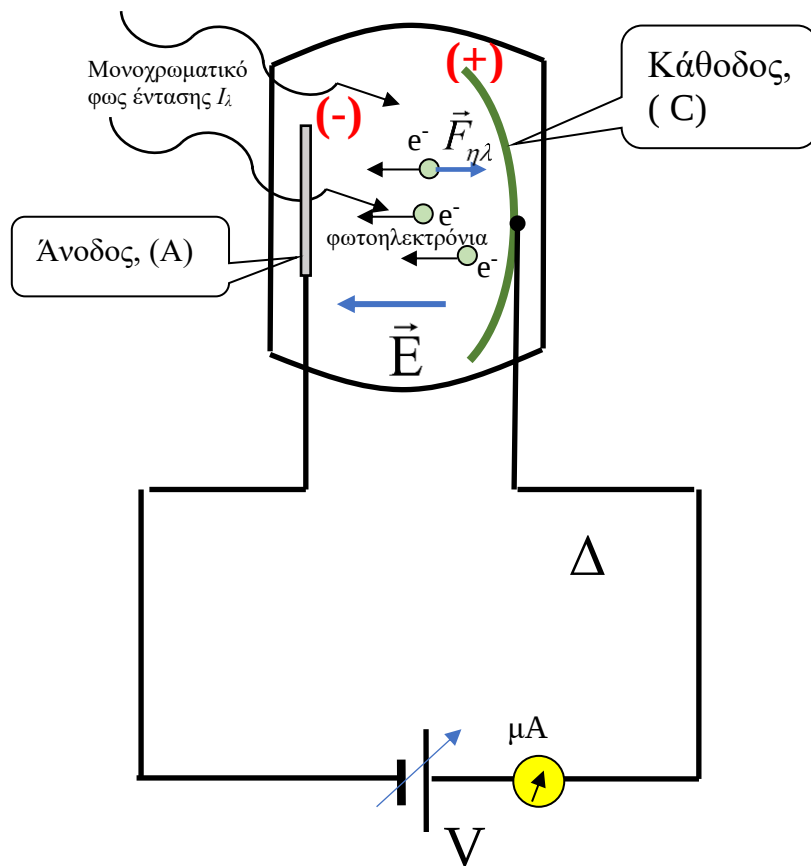
$$0 - K_{max} = -e \cdot V_0 \rightarrow K_{max} = e \cdot V_0$$

Άρα, η μέτρηση της τάσης αποκοπής μας δίνει απευθείας τη μέγιστη κινητική ενέργεια που έχουν κάποια φωτοηλεκτρόνια καθώς εγκαταλείπουν την κάθοδο.

Από τη φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein μπορούμε να γράψουμε:

$$K_{max} = h \cdot f - \phi \rightarrow eV_0 = h \cdot f - \phi \rightarrow V_0 = \frac{h \cdot f}{e} - \frac{\phi}{e}$$

Η τάση αποκοπής εξαρτάται από τη συχνότητα της προσπίπτουσας στην κάθοδο ακτινοβολίας.



Αντιστρέφοντας την πολικότητα μεταξύ ανόδου και καθόδου, το ηλεκτρικό πεδίο δυσκολεύει την κίνηση των φωτοηλεκτρονίων κατά την μετακίνησή τους προς την άνοδο.

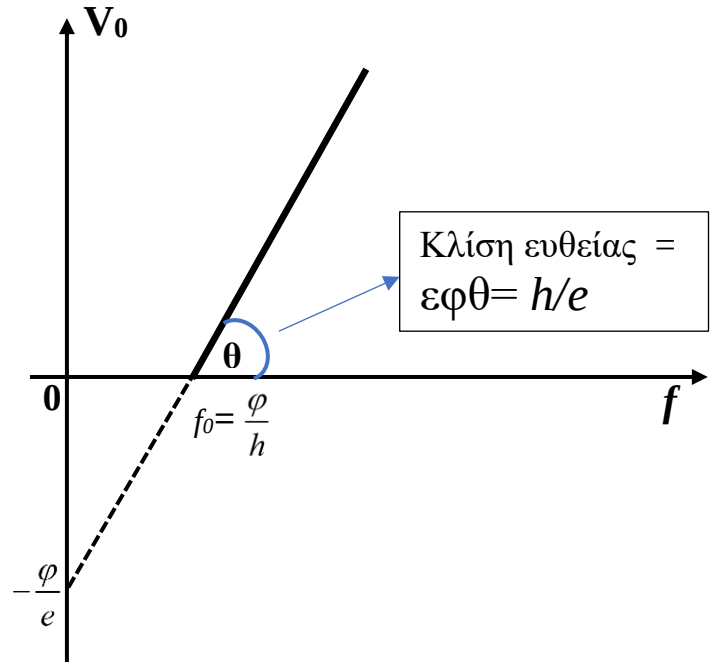
Η παραπάνω σχέση δίνει την τάση αποκοπής σε συνάρτηση με τη συχνότητα του φωτονίου για ένα συγκεκριμένο υλικό της καθόδου.

- Η γραφική παράσταση της παραπάνω σχέσης

είναι ευθεία που έχει κλίση $\tan(\theta) = \frac{h}{e}$.

- Το σημείο όπου τέμνει τον οριζόντιο άξονα (δηλαδή η συχνότητα για την οποία ξεκινά το φαινόμενο) είναι η συχνότητα κατωφλίου f_0 .

Για $V_0=0 \rightarrow f=\phi/h=f_0$. Το σημείο είναι το $\left(\frac{\phi}{h}, 0\right)$



- Αν προεκτείνουμε την ευθεία θα τέμνει τον

κατακόρυφο άξονα στην τιμή $-\frac{\phi}{e}$ και συνεπώς μπορούμε να υπολογίσουμε το έργο εξαγωγής.

Για $f=0 \rightarrow V_0 = -\phi/e$. Το σημείο αυτό περνάει από το σημείο $\left(0, -\frac{\phi}{e}\right)$.

Επομένως από το διάγραμμα $V_0(f)$ είναι δυνατό να υπολογιστούν η σταθερά h (σταθερά του Planck) και το ϕ (έργο εξαγωγής για το υλικό της φωτοκαθόδου).

7.2.8 Η ορμή των φωτονίων

Η 2η υπόθεση του Einstein για το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο, δηλαδή, ότι κάθε φωτόνιο της δέσμης που προσπίπτει στη μεταλλική επιφάνεια μεταφέρει την ενέργειά του σε ένα μόνο ηλεκτρόνιο, άφηνε να εννοηθεί ότι το φως στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο συμπεριφέρεται ως ένα ρεύμα σωματιδίων (φωτονίων) και η αλληλεπίδραση φωτονίων -ηλεκτρονίων είναι σύγκρουση δύο σωματιδίων. Από τη στιγμή που στο φως αποδόθηκε και σωματιδιακή φύση αυτό έπρεπε να έχει και ορμή, p , όπως έχουν όλα τα κινούμενα σωματίδια.

Η ορμή που αποδόθηκε σε ένα φωτόνιο είναι ίση με:

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

Όπου λ το μήκος κύματος της ακτινοβολίας (στο κενό).

Η σχέση προκύπτει ως εξής:

Από τη θεωρία της σχετικότητας προκύπτει πως η ενέργεια του φωτονίου και η ορμή του συνδέονται με τη σχέση $E = p \cdot c$. Παίρνοντας υπόψη ότι η ενέργεια του φωτονίου είναι ίση με $E = h \cdot f$, και την θεμελιώδη κυματική εξίσωση προκύπτει:

$$h \cdot f = p \cdot \lambda \cdot f \Rightarrow p = \frac{h}{\lambda}$$

Η τελευταία σχέση είναι ιδιαίτερα σημαντική, γιατί συνδέει μία καθαρά σωματιδιακή ιδιότητα, όπως η ορμή (p), με μια καθαρά κυματική ιδιότητα, όπως το μήκος κύματος (λ), συνδέοντας έτσι την κυματική φύση του φωτός με τη σωματιδιακή του φύση (p) και τονίζοντας τη δυαδική φύση του φωτός.

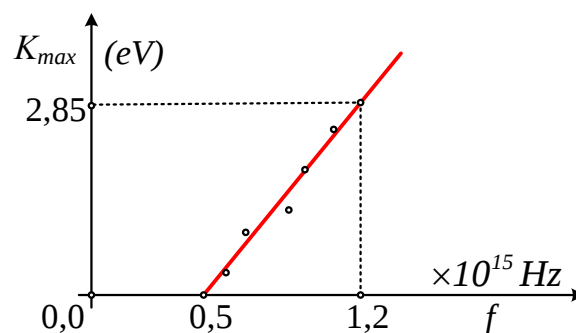
Η ανηγμένη σταθερά του Planck, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, αποτελεί το “κβάντο” της στροφορμής στην κβαντική μηχανική.

7.2.9 Λυμένα παραδείγματα

Παράδειγμα 1.

Κατά τη διάρκεια ενός πειράματος μελέτης του φωτοηλεκτρικού φαινομένου, κατασκευάσαμε το διάγραμμα της μέγιστης κινητικής ενέργειας των εκπεμπόμενων φωτοηλεκτρονίων σε συνάρτηση με τη συχνότητα της ακτινοβολίας που πέφτει στην κάθοδο, παίρνοντας το διπλανό διάγραμμα. Αντλώντας πληροφορίες από το διάγραμμα αυτό και γνωρίζοντας το φορτίο του ηλεκτρονίου $q_e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{C}$, να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις:

- Ποια η τάση ανακοπής για τις συχνότητες $f_1 = 0,5 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$ και $f_2 = 1,2 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$;
- Να υπολογιστεί η σταθερά h του Planck.
- Ποιο το έργο εξαγωγής του υλικού της καθόδου;
- Αν αλλάξουμε την λυχνία, χρησιμοποιώντας μια άλλη όπου το υλικό της καθόδου έχει έργο εξαγωγής $\phi_1 = 3,25 \text{ eV}$:
 - Να βρεθεί η πειραματική τιμή της συχνότητας κατωφλίου.
 - Να χαράξετε, πάνω στο προηγούμενο διάγραμμα, την γραφική παράσταση $K_{\max} = f(V)$ και να υπολογίστε την τάση αποκοπής για ακτινοβολία με συχνότητα $f_2 = 1,2 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$.



Απάντηση:

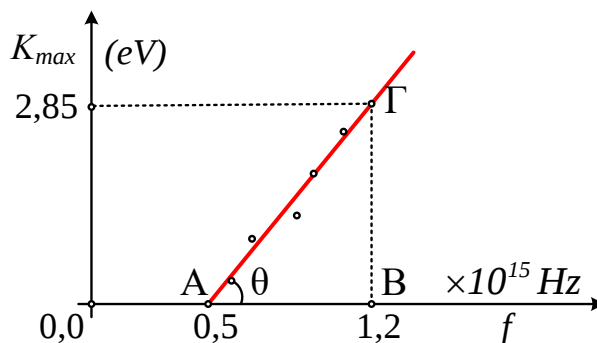
- i) Για συχνότητα ακτινοβολίας f_1 η μέγιστη κινητική ενέργεια των εξερχομένων ηλεκτρονίων είναι μηδενική, πράγμα που σημαίνει ότι η συχνότητα αυτή είναι η συχνότητα κατωφλίου και η τάση αποκοπής είναι μηδενική, αφού από την φωτοηλεκτρική εξίσωση Einstein παίρνουμε:

$$K_{\max} = hf - \phi \quad (1) \rightarrow$$

$$hf_1 = \phi \quad (2)$$

Αντίθετα για την συχνότητα f_2 η μέγιστη κινητική ενέργεια είναι ίση με 2,85 eV, συνεπώς η τάση αποκοπής θα είναι ίση με 2,85 V. (Τάση μεταξύ ανόδου και φωτιζόμενης καθόδου ίση με -2,85 V).

- ii) Από την εξίσωση (1) προκύπτει ότι η συνάρτηση $K_{max}=f(f)$ είναι πρώτου βαθμού (γι' αυτό και η παραπάνω ευθεία στο διάγραμμα) με την σταθερά του Plank να είναι ίση με τον συντελεστή διευσθύνσεως της ευθείας:



$$h = \varepsilon \varphi \theta = \frac{(B\Gamma)}{(AB)} = \frac{2,85 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{(1,2 - 0,5) \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}} = 6,5 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

- iii) Αντικαθιστώντας στην σχέση (2) υπολογίζουμε το έργο εξαγωγής για το υλικό της καθόδου:

$$\varphi = hf_1 = 6,5 \cdot 10^{-34} \cdot 0,5 \cdot 10^{15} \text{ J} = 3,25 \cdot 10^{-19} \text{ J} \quad \text{ή}$$

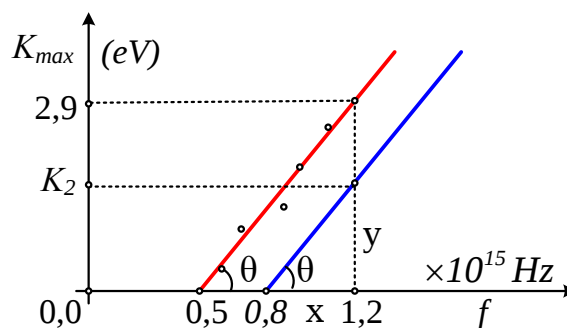
$$\varphi = \frac{3,25 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV}} = 2,03 \text{ eV}$$

- iv) Για την δεύτερη λυχνία με άλλο υλικό καθόδου, θα έχουμε:

α) Από την εξίσωση (2) βρίσκουμε για την συχνότητα κατωφλίου:

$$\varphi_1 = hf_{01} \rightarrow f_{01} = \frac{\varphi_1}{h} = \frac{3,25 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{6,5 \cdot 10^{-34} \text{ Js}} = 0,8 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

β) Με βάση τα προηγούμενα και το αντίστοιχο γράφημα για την δεύτερη λυχνία, θα είναι επίσης μια ημιευθεία, η οποία θα ξεκινά από την τιμή $f_{01}=0,8 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$ και θα είναι παράλληλη στην προηγούμενη, αφού η κλίση της θα είναι ξανά θ (ίδιο $h \dots$), όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αλλά τότε παίρνοντας την εφθ θα έχουμε:



$$h = \varepsilon \varphi \theta = \frac{y}{x} \rightarrow$$

$$y = K_2 = x \cdot \varepsilon \varphi \theta = x \cdot h = (1,2 - 0,8) 10^{15} \cdot 6,5 \cdot 10^{-34} \text{ J} = 2,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} \quad \text{ή}$$

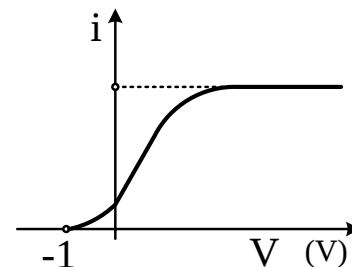
$$K_2 = \frac{2,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV}} \approx 1,6 \text{ eV}$$

Αλλά τότε η τάση αποκοπής για την συχνότητα $1,2 \cdot 10^{15} \text{ J}$ είναι ίση με 1,6V. Εναλλακτικά, από την εξίσωση (1) θα έχουμε:

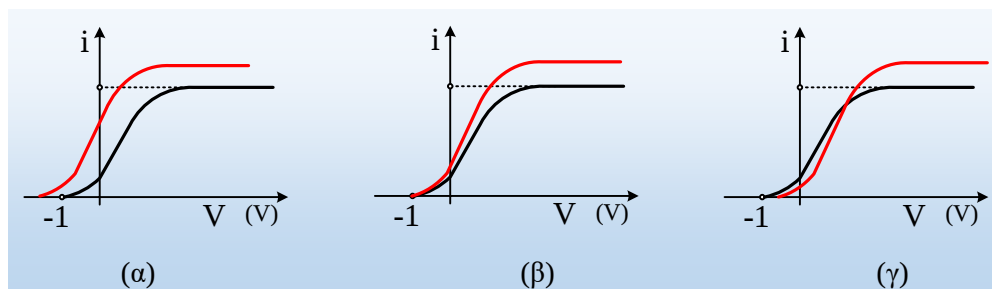
$$K_{2,\max} = hf_2 - \phi_1 = \frac{6,5 \cdot 10^{-34} \cdot 1,2 \cdot 10^{15} \text{ J}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV}} - 3,25 \text{ eV} \approx 1,6 \text{ eV}$$

Παράδειγμα 2.

Στο διπλανό σχήμα δίνεται το διάγραμμα της έντασης του ρεύματος σε συνάρτηση με την τάση μεταξύ ανόδου-καθόδου σε ένα φωτοκύτταρο, όπου φωτίζουμε την κάθοδο με την βοήθεια μιας λάμπας Α, η οποία τοποθετείται σε απόσταση d .



- i) Ποιο από τα παρακάτω διαγράμματα δίνει την μορφή της καμπύλης (κόκκινη γραμμή), στην περίπτωση που πλησιάσουμε την λάμπα σε απόσταση $d_1 < d$;



- ii) Απομακρύνουμε την λάμπα φωτισμού σε απόσταση $d_2 > d$. Να χαράξετε πάνω στο αρχικό διάγραμμα, την νέα καμπύλη $i=f(V)$.
 iii) Αλλάζουμε λάμπα φωτισμού πλησιάζοντας σε απόσταση d , μια άλλη Β η οποία εκπέμπει σε μικρότερα μήκη κύματος, στέλνοντας στην κάθοδο, τον ίδιο αριθμό φωτονίων, με την Α. Ποια θα είναι τώρα η μορφή της καμπύλης $i=f(V)$. Η νέα καμπύλη να χαραχθεί πάνω στο αρχικό διάγραμμα.
 iv) Ποια η αντίστοιχη καμπύλη αν η λάμπα Β εξέπεμπε ακτινοβολία της ίδιας έντασης με την αρχική λάμπα Α;

Θεωρούμε ότι ο αριθμός των εξερχομένων φωτοηλεκτρονίων είναι ίσος με ένα σταθερό ποσοστό του αριθμού των φωτονίων, τα οποία προσπίπτουν στην κάθοδο.

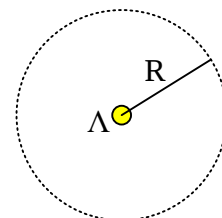
Απάντηση:

- i) Η τάση αποκοπής είναι ίση με 1V (η διαφορά δυναμικού ανόδου-καθόδου είναι ίση με -1V). Αλλά τότε από την φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein παίρνουμε:

$$K_{\max} = hf - \phi \rightarrow q_e V_a = hf - \phi$$

Αλλά αν έχουμε μια λάμπα που εκπέμπει φως με διαφορετικές συχνότητες, η μεγαλύτερη συχνότητα θα καθορίσει και την τάση αποκοπής. Και αν δεν αλλάξει η λάμπα, δεν θα αλλάξει και η τάση αποκοπής η οποία θα παραμείνει στην τιμή $V_0=1V$. Τι συμβαίνει όμως με το πλησίασμα της λάμπας;

Έστω μια φωτεινή πηγή Λ, ας την θεωρήσουμε αμελητέων διαστάσεων, η οποία εκπέμπει ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία με ισχύ P. Τότε παίρνοντας μια σφαίρα με κέντρο την πηγή και ακτίνα R, στην επιφάνειά της θα φτάνει



ενέργεια $W=Pt$, ίση με αυτήν που εκπέμπει η πηγή, οπότε η ένταση της ακτινοβολίας στην επιφάνειά της, θα είναι ίση:

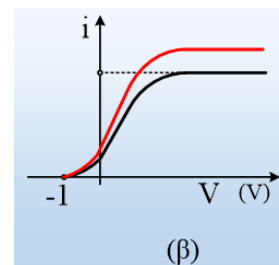
$$I = \frac{W}{S \cdot \Delta t} = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi R^2}$$

Αφού η επιφάνεια της σφαίρας έχει εμβαδόν $4\pi R^2$.

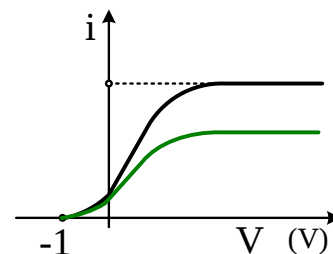
Βλέπουμε δηλαδή ότι η ένταση της ακτινοβολίας είναι αντιστρόφως ανάλογη προς το τετράγωνο της απόστασης της πηγής από την επιφάνεια πρόσπτωσης.

Αλλά τότε πλησιάζοντας την λάμπα στην κάθοδο, αυξάνουμε την ένταση της ακτινοβολίας, στην κάθοδο προσπίπτουν περισσότερα φωτόνια, συνεπώς θα ελευθερώνονται και περισσότερα ηλεκτρόνια και θα αυξάνεται η ένταση του ρεύματος.

Σύμφωνα με όλα αυτά, το σωστό διάγραμμα είναι το (β), όπως στο διπλανό σχήμα.



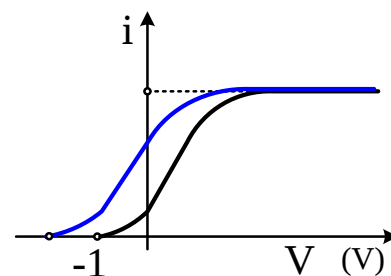
- ii)** Με βάση τα παραπάνω, απομακρύνοντας την λάμπα από το φωτοκύτταρο, δεν θα αλλάξει η τάση αποκοπής, αλλά θα μειωθεί η ένταση της προσπίπτουσας ακτινοβολίας και η καμπύλη θα πάρει τη μορφή του διπλανού σχήματος, με πράσινο χρώμα.



- iii)** Αφού όταν φωτίζεται η κάθοδος από την λάμπα B, δέχεται τον ίδιο αριθμό φωτονίων με πριν, θα εξέρχονται και ίδιος αριθμός ηλεκτρονίων (ένα ποσοστό των φωτονίων που προσπίπτουν θα απορροφηθούν από ηλεκτρόνια, τα οποία θα εξέλθουν της επιφάνειας), συνεπώς και θα έχουμε την ίδια μέγιστη τιμή της έντασης του ρεύματος. Όμως τώρα η λάμπα B εκπέμπει σε μικρότερη μήκη κύματος, συνεπώς τα φωτόνια θα μεταφέρουν μεγαλύτερη ενέργεια από τα αντίστοιχα της A λάμπας, με αποτέλεσμα τα ηλεκτρόνια που ελευθερώνονται να έχουν μεγαλύτερες κινητικές ενέργειες και άρα μεγαλύτερη $K_{\max}$ άρα και πιο «μεγάλη» τάση αποκοπής, αφού:

$$q_e V_a = hf - \phi$$

Έτσι το διάγραμμα παίρνει την μορφή του διπλανού σχήματος.

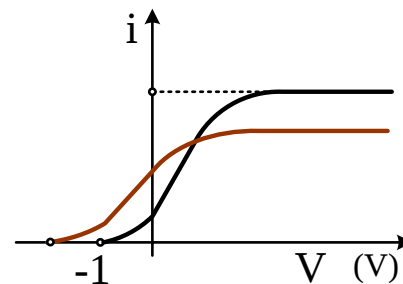


- iv)** Αν η λάμπα B εξέπεμπε ακτινοβολία της ίδιας έντασης, αλλά με μεγαλύτερες συχνότητες, τότε στην κάθοδο θα έφταναν λιγότερα φωτόνια. Πράγματι για την ενέργεια της προσπίπτουσας ακτινοβολίας στην κάθοδο (ας την πάρουμε ως μονοχρωματική...) θα έχουμε:

$$W_k = I \cdot A = \frac{W_\lambda}{4\pi R^2} \cdot A = \frac{N \cdot hf}{4\pi R^2} \cdot A$$

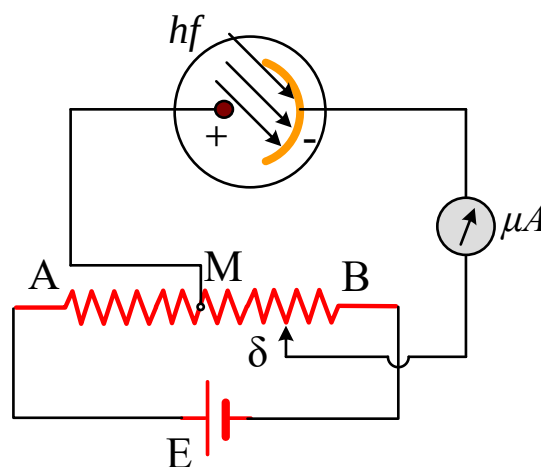
Όπου I η ένταση της ακτινοβολίας που πέφτει στην κάθοδο η οποία έχει εμβαδόν A , W_λ η συνολική ενέργεια που ακτινοβολεί η λάμπα και N ο αριθμός των φωτονίων που εκπέμπονται.

Πράγμα που σημαίνει ότι για την ίδια ένταση, όσο μεγαλύτερη είναι η συχνότητα, τόσο μικρότερος αριθμός (N) φωτονίων απαιτούνται για την διάδοση της ενέργειας αυτής. Κατά συνέπεια θα εξέρχεται από την κάθοδο και ένας μικρότερος αριθμός ηλεκτρονίων, με αποτέλεσμα να έχουμε και μικρότερη μέγιστη ένταση ρεύματος, (**ρεύματος κόρου**). Αντίθετα η τάση αποκοπής θα είναι ίδια με αυτήν του προηγούμενου ερωτήματος. Με βάση αυτά η καμπύλη παίρνει τη μορφή του διπλανού σχήματος.



Παράδειγμα 3.

Στο σχήμα δίνεται μια πειραματική διάταξη για την μελέτη του φωτοηλεκτρικού φαινομένου, όπου $E=8V$, ενώ το ποτενσιόμετρο μήκους $(AB)=20cm$ παρουσιάζει αντίσταση $R=4\Omega$. Η φωτιζόμενη κάθοδος του αερόκενου σωλήνα συνδέεται με τον δρομέα δ , ενώ η άνοδος με το μέσον M του ποτενσιόμετρου. Ρίχνουμε στην κάθοδο μονοχρωματική ακτινοβολία με μήκος κύματος $\lambda=375nm$ (στην περιοχή του υπεριώδους), με αποτέλεσμα από την κάθοδο να εξέρχονται φωτοηλεκτρόνια, ενώ ο δρομέας απέχει από το M απόσταση $(M\delta)=5cm$. Δίνονται το έργο εξαγωγής του υλικού της καόδου $\phi=2,1eV$, η ταχύτητα του φωτός στο κενό $c=3 \cdot 10^8 m/s$, το φορτίο του ηλεκτρονίου $q_e=-e=-1,6 \cdot 10^{-19}C$ και η σταθερά του Plank $h=6,6 \cdot 10^{-34}J \cdot s$.



- Να υπολογίσετε την ενέργεια ενός φωτονίου της προσπίπτουσας ακτινοβολίας σε J και σε eV .
- Ποια η μέγιστη κινητική ενέργεια, την οποία μπορεί να έχει ένα ηλεκτρόνιο, την στιγμή της εξόδου του από την κάθοδο;
- Θεωρώντας αμελητέα την ένταση του ρεύματος που διαρρέει το μικροαμπερόμετρο (αμελητέα σε σχέση με την ένταση του ρεύματος που διαρρέει την πηγή), να βρεθεί η τάση μεταξύ ανόδου και καόδου.
- Ποια η μέγιστη κινητική ενέργεια που μπορεί να έχει ένα ηλεκτρόνιο τη στιγμή που φτάνει στην άνοδο;
- Να βρεθεί η ελάχιστη μετακίνηση του δρομέα δ , από την προηγούμενη θέση του, ώστε το μικροαμπερόμετρο να πάψει να διαρρέεται από ρεύμα;

Απάντηση:

- i) Η ενέργεια ενός προσπίπτοντος φωτονίου, είναι ίση:

$$E = hf \xrightarrow{c=\lambda f} E = h \frac{c}{\lambda} = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{375 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 5,28 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Το 1eV είναι το έργο που παράγεται κατά την μετακίνηση ενός ηλεκτρονίου μεταξύ δύο σημείων τα οποία παρουσιάζουν διαφορά δυναμικού 1Volt. Αλλά τότε:

$$1\text{eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1\text{V} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Και η παραπάνω ενέργεια του φωτονίου θα είναι σε eV:

$$E = 5,28 \cdot 10^{-19} \text{ J} = \frac{5,28 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{1,6 \cdot 10^{-19} \frac{\text{J}}{\text{eV}}} = 3,3\text{eV}$$

- ii) Ένα εξερχόμενο ηλεκτρόνιο έχει μέγιστη κινητική ενέργεια, όταν βρίσκεται στην επιφάνεια του μετάλλου, οπότε από την φωτοηλεκτρική εξίσωση του Einstein παίρνουμε:

$$K_{\max} = hf - \phi = 3,3\text{eV} - 2,1\text{eV} = 1,2\text{eV}$$

- iii) Θεωρώντας αμελητέα την ένταση του ρεύματος που διαρρέει το μικροαμπερόμετρο, τότε **όλο** το ποτενσιόμετρο διαρρέεται από την ίδια ένταση ρεύματος:

$$I = \frac{E}{R} = \frac{8\text{V}}{4\Omega} = 2\text{A}$$

Ενώ για τις τάσεις $V_{M\delta}$ και $V_{AB}=E$ ισχύει:

$$V_{M\delta} = I \cdot R_{M\delta} \text{ και } V_{AB} = E = I \cdot R_{AB}, \text{ οπότε:}$$

$$\frac{V_{M\delta}}{V_{AB}} = \frac{I R_{M\delta}}{I R_{AB}} = \frac{R_{M\delta}}{R_{AB}} = \frac{(M\delta)}{(AB)} \rightarrow$$

$$V_{M\delta} = E \cdot \frac{(M\delta)}{(AB)} = 8\text{V} \cdot \frac{5\text{cm}}{20\text{cm}} = 2\text{V}$$

Η παραπάνω τάση εφαρμόζεται και μεταξύ ανόδου και καθόδου, συνεπώς $V=2\text{V}$.

- iv) Το ηλεκτρόνιο κατά την επιτάχυνσή του από την κάθοδο μέχρι την άνοδο, δέχεται δύναμη από το ηλεκτρικό πεδίο, η οποία παράγει έργο:

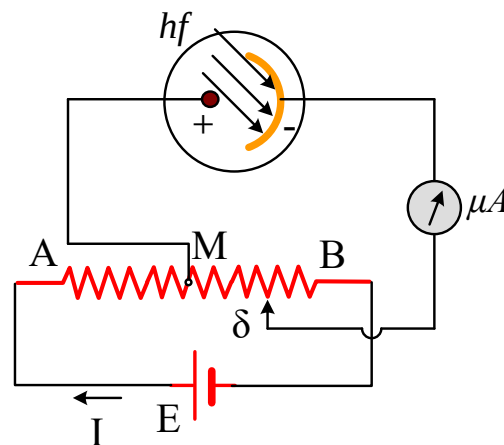
$$W_{\kappa,\alpha} = qV_{KA} = -e \cdot (-V_{M\delta}) = eV_{M\delta} = 2\text{eV}$$

Οπότε ένα ηλεκτρόνιο που ξεκινά από την κάθοδο με μέγιστη κινητική ενέργεια 1,2eV, κερδίζοντας ενέργεια 2eV, θα φτάσει στην άνοδο με κινητική ενέργεια:

$$K_{\alpha\nu} = K_{\max} + W_{\kappa,\alpha}(1) \rightarrow$$

$$K_{\alpha\nu} = 1,2\text{eV} + 2\text{eV} = 3,2\text{eV}$$

- v) Για την τάση ανακοπής θα έχουμε από την (1) θέτοντας $K_{\alpha\nu}=0$:



$$K_{\alpha\nu} = K_{\max} + W_{\kappa,\alpha} \rightarrow 0 = K_{\max} - eV_{\kappa,\alpha} \rightarrow 0 = 1,2eV - eV_{\kappa,\alpha} \rightarrow$$

$$V_{\kappa,\alpha} = 1,2eV \rightarrow V_{a,\kappa} = V_{M\delta} = -1,2eV$$

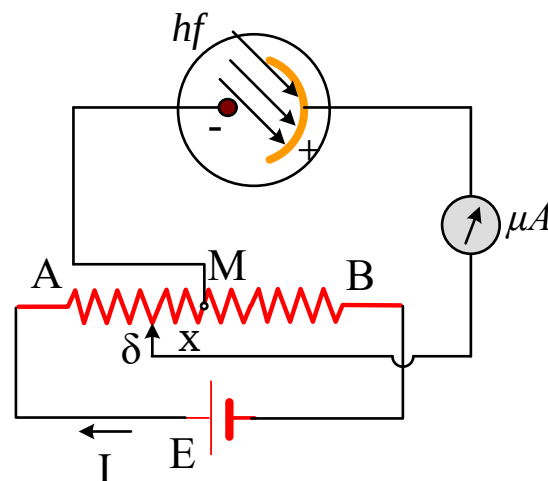
Η παραπάνω τιμή αρνητικής τάσης μας λέει ότι πλέον η κάθοδος συνδέεται με τον θετικό πόλο της πηγής και η άνοδος με τον αρνητικό (αν και θα έπρεπε εδώ να τους αλλάξουμε και ονόματα...) και αυτό μπορεί να συμβεί αν ο δρομέας δ, βρεθεί αριστερά του Μ, όπως στο σχήμα, σε απόσταση x από το μέσον Μ του ποτενσιόμετρου. Αλλά τότε δουλεύοντας όπως και στο ερώτημα iii) θα έχουμε:

$$\frac{V_{\delta'M}}{V_{AB}} = \frac{IR_{\delta'M}}{IR_{AB}} = \frac{R_{\delta'M}}{R_{AB}} = \frac{x}{(AB)} \rightarrow$$

$$x = (AB) \cdot \frac{V_{\delta'M}}{V_{AB}} = 20cm \cdot \frac{1,2V}{8V} = 3cm$$

Συνεπώς ο δρομέας θα πρέπει να μετακινηθεί προς τα αριστερά και απόσταση:

$$d = \delta'M + M\delta = 3cm + 5cm = 8cm.$$



7.3 Φαινόμενο Compton

7.3.1 Εισαγωγή-Ακτίνες X (Ακτίνες Röntgen)

Οι ακτίνες X είναι ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία με πολύ μικρά μήκη κύματος από 0,001 nm μέχρι 1nm. Ανακαλύφθηκαν το Νοέμβριο του 1895 από τον Wilhelm Röntgen, (Βίλχελμ Ρέντγκεν). Ο Röntgen, καθώς ασχολείτο με τη μελέτη των καθοδικών ακτίνων, παρατήρησε ότι μια φθορίζουσα επιφάνεια, η οποία βρισκόταν μακριά από τη συσκευή του στο σκοτεινό εργαστήριό του, φωτοβόλυνε, όταν ο σωλήνας Crookes των καθοδικών ακτίνων λειτουργούσε. Μετά από πολλές παρατηρήσεις, ο Röntgen κατέληξε στο συμπέρασμα ότι ο σωλήνας εκπέμπει μια νέα, άγνωστη μέχρι τότε αόρατη διεισδυτική ακτινοβολία. Την ακτινοβολία αυτήν ονόμασε ακτίνες x, επειδή δε γνώριζε τη φύση και την προέλευσή τους. Μετέπειτα οι ακτίνες ονομάστηκαν προς τιμήν του ακτίνες Röntgen.

Οι ακτίνες X βρίσκουν ευρύτατες εφαρμογές στις ακτινογραφίες, τόσο στην ιατρική όσο και στη βιομηχανία. Η παραγωγή των ακτίνων X είναι φαινόμενο αντίστροφο του φωτοηλεκτρικού φαινομένου. Στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο φωτόνια προσπίπτουν στη μεταλλική επιφάνεια και προκαλούν εξαγωγή ηλεκτρονίων. Στις ακτίνες X, ταχέως κινούμενα ηλεκτρόνια προσπίπτουν στη μεταλλική επιφάνεια και προκαλούν την εκπομπή των φωτονίων X.



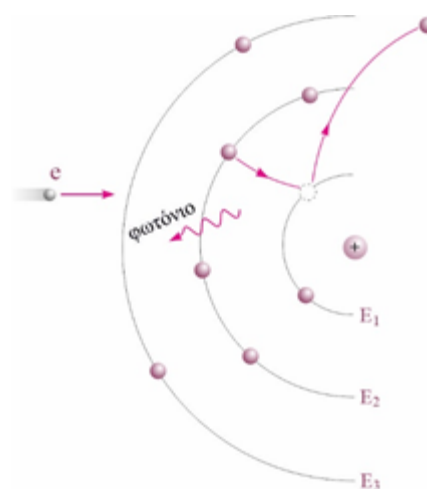
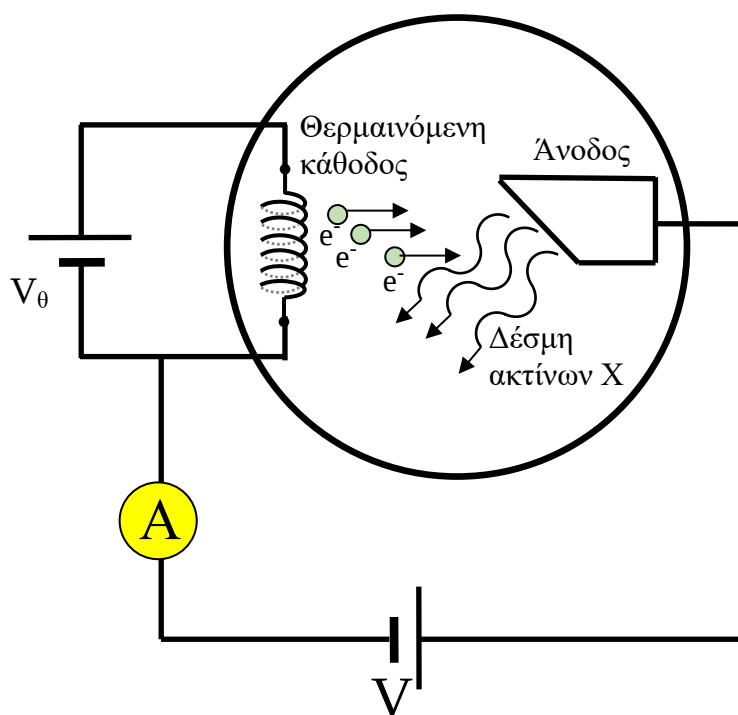
Η εικονιζόμενη ακτινογραφία ελήφθη στις 23 Ιανουαρίου 1896 και είναι μία από τις πρώτες. Απεικονίζει το χέρι της συζύγου του Wilhelm Röntgen.

Ο μηχανισμός παραγωγής των ακτίνων X είναι ακριβώς ο αντίστροφος του φωτοηλεκτρικού φαινομένου. Στο φωτοηλεκτρικό φαινόμενο μια μεταλλική επιφάνεια «βομβαρδίζεται» με ηλεκτρομαγνητικό κύμα και εκπέμπει ηλεκτρόνια. Στις ακτίνες X η μεταλλική επιφάνεια «βομβαρδίζεται» με ταχέως κινούμενα ηλεκτρόνια και εκπέμπεται ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία.

Οι παραγόμενες ακτίνες X οφείλουν τη δημιουργία τους σε δύο εντελώς ανεξάρτητους μηχανισμούς.

Στον πρώτο μηχανισμό, τα ταχέως κινούμενα ηλεκτρόνια, επιβραδύνονται απότομα λόγω της σύγκρουσής τους με το στόχο της ανόδου και η απότομη αυτή επιβράδυνση προκαλεί την παραγωγή φωτονίων (γεγονός που προβλέπει και η θεωρία του Maxwell). Επειδή κατά τις κρούσεις των ηλεκτρονίων με τα άτομα του στόχου τα ηλεκτρόνια μπορεί να χάσουν οποιοδήποτε μέρος της ενέργειάς τους, συμπεραίνουμε ότι τα φωτόνια που εκπέμπονται θα έχουν οποιαδήποτε τιμή ενέργειας, που θα είναι μικρότερη ή ίση της αρχικής ενέργειας του ηλεκτρονίου. Επομένως το φάσμα της ακτινοβολίας αυτής θα είναι συνεχές. Η ακτινοβολία αυτή ονομάζεται ακτινοβολία πέδησης.

Στον δεύτερο μηχανισμό, τα ταχέως κινούμενα ηλεκτρόνια μεταφέρουν την ενέργειά τους στα άτομα και προκαλούν τη διέγερσή τους, δηλαδή ηλεκτρόνια από τις εσωτερικές στιβάδες του ατόμου μεταπηδούν σε εξωτερικές. Η κενή θέση του ηλεκτρονίου μπορεί να συμπληρωθεί από ένα ηλεκτρόνιο του ατόμου που βρίσκεται στις εξωτερικές στιβάδες, με ταυτόχρονη εκπομπή ενός φωτονίου. Η ενέργεια αυτής της ακτινοβολίας, είναι ακριβώς ίση, με τη διαφορά των δύο ενεργειακών σταθμών του ατόμου. Αυτό εξηγεί το γραμμικό φάσμα εκπομπής των ακτίνων X.



7.3.2 Φαινόμενο Compton

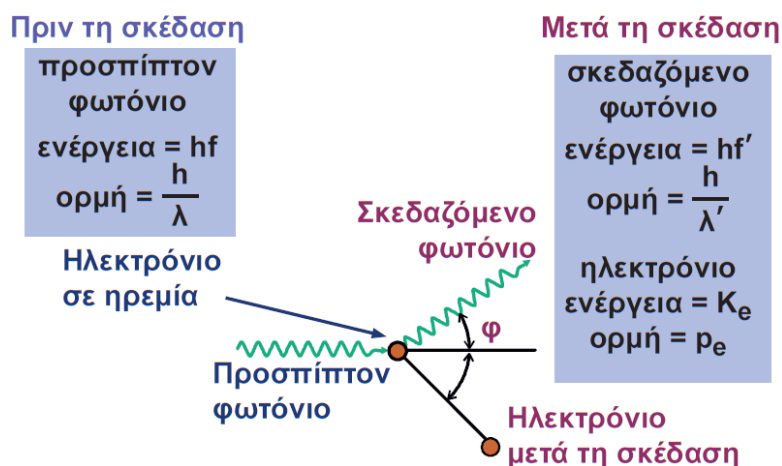
Στη Φυσική, το φαινόμενο Compton αναφέρεται στη σκέδαση, (αλλαγή κατεύθυνσης) ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας από φορτισμένα σωματίδια. Ήταν ένα από τα φαινόμενα που αδυνατούσε να εξηγήσει η κλασική φυσική και μία από τις πρώτες επιτυχίες της κβαντικής θεωρίας. Με το φαινόμενο Compton επιβεβαιώθηκε πειραματικά η σωματιδιακή φύση του φωτός, δηλαδή η ύπαρξη των φωτονίων.

Ο Arthur Compton, το 1924, παρατήρησε ότι όταν ακτίνες X με μήκος κύματος λ προσπίπτουν πάνω σε λεπτή υλική επιφάνεια, ένα τμήμα της δέσμης εκτρέπεται από την ευθύγραμμη πορεία του (σκεδάζεται). Ο Compton διαπίστωσε ότι το μήκος κύματος της σκεδαζόμενης ακτινοβολίας, λ' , ήταν μεγαλύτερο από αυτό της προσπίπτουσας ακτινοβολίας, λ . Μάλιστα η διαφορά των δύο μηκών κύματος, $\lambda' - \lambda$, εξαρτιόταν μόνο από τη γωνία, ϕ , που σχημάτιζαν οι δύο δέσμες μεταξύ τους.



Ο Άρθουρ Χόλι Κόμπτον (Arthur Holly Compton, 10 Σεπτεμβρίου 1892 – 15 Μαρτίου 1962)

Ήταν Αμερικανός φυσικός στον οποίο το 1927 απονεμήθηκε το βραβείο Νόμπελ Φυσικής για την ανακάλυψη του φαινομένου που φέρει το όνομα του. Ο Κόμπτον γεννήθηκε στο Wooster της πολιτείας Οχάιο το 1892 από τον Ελίας και την Οτέλια Κόμπτον. Ήταν μια ακαδημαϊκή οικογένεια. Ο πατέρας του ήταν πρύτανης του Πανεπιστημίου Wooster το οποίο παρακολούθησε ο Άρθουρ και επίσης έγινε μέλος της Άλφα Ωμέγα Ταυ αδελφότητας.



Πειραματικά αποδείχθηκε ότι η σχέση που συνδέει το μήκος κύματος λ του φωτονίου πριν την κρούση με το μήκος κύματος λ' , μετά είναι:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos(\phi)) \quad , 0^\circ \leq \phi \leq 180^\circ$$

Η μάζα m αναφέρεται στο σωματίδιο πάνω στο οποίο σκεδάζεται το φωτόνιο (ηλεκτρόνιο στο πείραμα του Compton). Η σχέση μπορεί να προκύψει² χωρίς μεγάλη δυσκολία από την διατήρηση της ορμής και την διατήρηση της ενέργειας για την (ελαστική) σκέδαση. Το γεγονός ότι διαπιστώθηκε πειραματικά ότι ισχύει ήταν μια ισχυρή ένδειξη της σωματιδιακής φύσης του φωτός.

Η ποσότητα $\frac{h}{mc}$ έχει μονάδες μήκους κύματος και ονομάζεται **μήκος κύματος Compton**, λ_c , οπότε η σχέση μπορεί να γραφεί ως:

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos(\phi)) \quad \text{ή} \quad \Delta\lambda = \lambda_c (1 - \cos(\phi))$$

² Η απόδειξη υπάρχει στο σχολικό βιβλίο, αλλά είναι εκτός ύλης.

Παρατηρήσεις

1) Μπορεί κάποιος να παρατηρήσει ότι η μεταβολή του μήκους κύματος θα εξαρτηθεί μόνο από την γωνία που θα σκεδαστεί η ακτινοβολία από την αρχική της διεύθυνση.

2) Εδώ πρέπει να τονιστεί ότι παρόλο που το μήκος κύματος Compton έχει μονάδες μήκους, δεν αντιπροσωπεύει κάποιο πραγματικό φυσικό μέγεθος. Μπορεί όμως να χρησιμοποιηθεί ως μια τάξη μεγέθους του μήκους κύματος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας έτσι ώστε να μπορεί να γίνει αντιληπτό το φαινόμενο. Αν διαιρέσουμε τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης με το μήκος κύματος λ της προσπίπτουσας ακτινοβολίας προκύπτει:

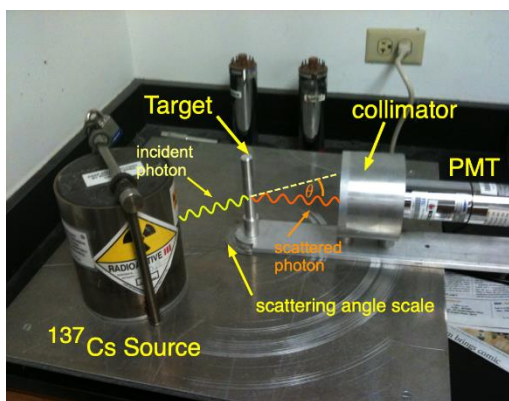
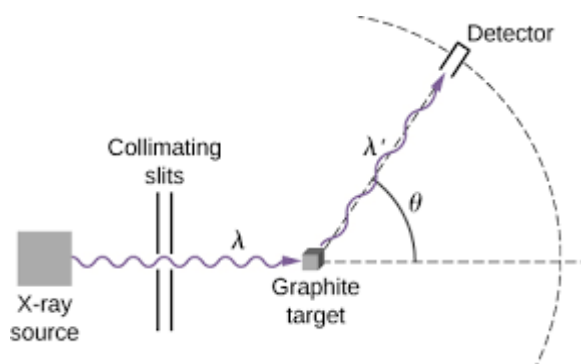
$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_c}{\lambda} (1 - \cos(\varphi))$$

Δηλαδή, η **ποσοστιαία μεταβολή** του μήκους κύματος εξαρτάται από το πηλίκο $\frac{\lambda_c}{\lambda}$. Αν το μήκος κύματος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας είναι αρκετά μεγαλύτερο από το αντίστοιχο μήκος κύματος Compton το φαινόμενο δεν μπορεί να είναι παρατηρήσιμο. Γι' αυτό για να παρατηρηθεί το φαινόμενο Compton η προσπίπτουσα ακτινοβολία πρέπει να έχει μεγάλη ενέργεια, (υψηλής συχνότητας). Για την περίπτωση που ο στόχος είναι ηλεκτρόνιο όπως στο πείραμα του Compton με αντικατάσταση προκύπτει ότι $\lambda_c = 0,243 \cdot 10^{-11} \text{ m}$. Η συγκεκριμένη τιμή είναι στην περιοχή των ακτίνων X, και έτσι η μεταβολή του μήκους κύματος είναι αισθητή. Για σκέδαση πάνω σε μεγαλύτερα σωματίδια το αντίστοιχο μήκος κύματος Compton θα ήταν μικρότερο, κάνοντας το πείραμα πιο δύσκολο ή αδύνατο.

3) Στο πείραμα Compton μια δέσμη συγκεκριμένης συχνότητας ακτίνων X ή γ βομβαρδίζει κάποιο στόχο και τα υψηλής ενέργειας φωτόνια αλληλεπιδρούν με τα ηλεκτρόνια του υλικού του στόχου, τα οποία μπορούν με πολύ καλή προσέγγιση να θεωρηθούν ακίνητα. Τα ηλεκτρόνια μπορούν να είναι είτε ελεύθερα είτε δέσμια, αφού ούτως ή άλλως οι ενέργειές τους (μερικά eV) σε σχέση με τις ενέργειες των ακτίνων X (εκατοντάδες keV) είναι αμελητέες.

4) Στην περίπτωση αλληλεπίδρασης φωτονίου με απολύτως ελεύθερα ηλεκτρόνια λαμβάνει χώρα μόνο το φαινόμενο Compton (για λόγους διατήρησης ορμής και ενέργειας). Όταν τα φωτόνια αλληλεπιδρούν με ηλεκτρόνια που βρίσκονται στην ύλη, μπορούν να προκαλέσουν είτε φωτοηλεκτρικό φαινόμενο είτε φαινόμενο Compton, ανάλογα με την ενέργειά τους. Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο είναι πιθανότερο για μικρές ενέργειες φωτονίων, ενώ το φαινόμενο Compton αρχίζει να κυριαρχεί για μεγαλύτερες ενέργειες φωτονίων.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται μια διάταξη για την πραγματοποίηση του πειράματος.



7.3.3 Ερμηνεία φαινομένου με βάση την κβαντική θεώρηση

Αποτυχία εξήγησης του φαινομένου με την κλασική θεωρία.

Σύμφωνα με την κλασική θεωρία ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα συχνότητας f αλληλεπιδρά με τα άτομα του στόχου θέτοντας τα ηλεκτρόνια του στόχου σε ταλάντωση με συχνότητα ίση με την συχνότητα του κύματος. Η ταλάντωση των ηλεκτρονίων με τη σειρά τους παράγουν ένα δεύτερο ηλεκτρομαγνητικό κύμα με συχνότητα ίση με την συχνότητα ταλάντωσης των ηλεκτρονίων. Δηλαδή τα άτομα διεγείρονται και κατόπιν αυτά κατά την αποδιέγερσή τους επανεκπέμπουν σαν μικρές κεραίες κύματα ίδιας συχνότητας με την συχνότητα των προσπίπτοντων. Συνεπώς σύμφωνα με την κλασική θεωρία θα έπρεπε τα σκεδαζόμενα φωτόνια να έχουν ίδια συχνότητα και άρα ίδιο μήκος κύματος με τα προσπίπτοντα.

Ερμηνεία του φαινομένου με κβαντομηχανική

Το φαινόμενο ερμηνεύεται πλήρως όταν η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία αντιμετωπιστεί ως ρεύμα φωτονίων, δηλαδή σωματιδίων με μηδενική μάζα ηρεμίας, που όμως έχουν ενέργεια και ορμή. Τότε το πρόβλημα σκέδασης της ακτινοβολίας μετατρέπεται σε ένα πρόβλημα κρούσης ανάμεσα σε ένα φωτόνιο και ένα σωματίδιο. Από την διατήρηση της ενέργειας για την κρούση προκύπτει:

$$E_{\text{φωτ}} = E'_{\text{φωτ}} + K_e \Rightarrow E_{\text{φωτ}} > E'_{\text{φωτ}} \Rightarrow hf > hf' \Rightarrow h \frac{c}{\lambda} > h \frac{c}{\lambda'} \Rightarrow \boxed{\lambda' > \lambda}$$

Επιπλέον εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ορμής για την κρούση δύο σωματιδίων συσχετίζεται η γωνία εκτροπής με την μεταβολή του μήκους κύματος και προκύπτει

Η εφαρμογή της αρχής διατήρησης της ορμής για την κρούση δύο σωματιδίων, ερμηνεύει τη σχέση της γωνίας εκτροπής ϕ με τη διαφορά των δύο μηκών κύματος και οδηγεί στη σχέση $\lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos(\phi))$.

7.3.4 Μαθηματική περιγραφή και χρήσιμες σχέσεις

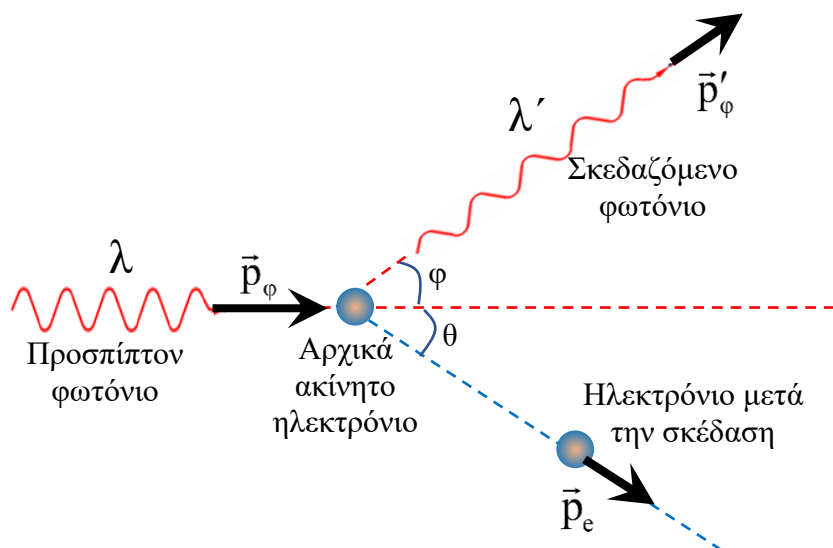
Αρχικά να θυμίσουμε κάποιες σχέσεις που μπορεί να φανούν χρήσιμες κατά την μελέτη του φαινομένου.

Ενέργεια φωτονίου: $E = h \cdot f$

Ορμή φωτονίου: $p = \frac{h}{\lambda}$

Σχέση ορμής και ενέργειας : $E = p \cdot c$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται μια σχηματική αναπαράσταση του φαινομένου.



Από την διατήρηση της ενέργειας προκύπτει:

$$E_{\text{φωτ}} = E'_{\text{φωτ}} + K_e \Rightarrow h \cdot f = h \cdot f' + \frac{1}{2}mv^2, \text{ για μη σχετικιστικές ταχύτητες}$$

Από την διατήρηση της ορμής προκύπτει:

$$\vec{p}_{\text{φωτ}} = \vec{p}'_{\text{φωτ}} + \vec{p}_e$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να εφαρμοστεί και σε άξονες κανονικά όπως σε περίπτωση διατήρησης ορμής σε σωματίδια.

Από τον συνδυασμό των παραπάνω προκύπτει:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos(\varphi)), \quad 0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$$

Τέλος χρήσιμες μπορεί να είναι και οι σχέσεις που προκύπτουν από την σχέση της μεταβολής του μήκους κύματος:

• ποσοστιαία μεταβολή μήκους κύματος:

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_c}{\lambda} (1 - \cos(\varphi))$$

- Μία ακόμα σχέση που συσχετίζει τις ενέργειες του φωτονίου πριν και μετά την σκέδαση είναι:

Από την σχέση της ενέργειας του φωτονίου $E=h \cdot f$ μπορούμε να γράψουμε:

$$E=h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{h \cdot c}{E}} . \text{ Ομοίως } \boxed{\lambda' = \frac{h \cdot c}{E'}} .$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις αυτές στην σχέση του Compton προκύπτει:

$$\frac{h \cdot c}{E'} - \frac{h \cdot c}{E} = \frac{h}{mc} (1 - \cos(\varphi)) \Rightarrow \boxed{\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{(1 - \cos(\varphi))}{mc^2}}$$

- **Διερεύνηση για διάφορες τιμές της γωνίας σκέδασης**



Από την διατήρηση της ενέργειας προκύπτει ότι όσο λιγότερη ενέργεια έχει το σκεδαζόμενο φωτόνιο τόσο μεγαλύτερη θα είναι η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου μετά την σκέδαση. Γράφοντας την ενέργεια του φωτονίου στη μορφή $E' = h \cdot \frac{c}{\lambda'}$ μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε ότι όσο μεγαλύτερο

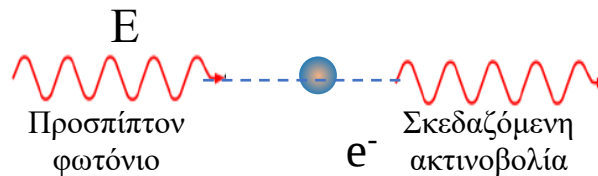
είναι το μήκος κύματος μετά την σκέδαση τόσο μικρότερη η ενέργειά του και συνεπώς τόσο μεγαλύτερη η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου. Όμως η μεταβολή του μήκους κύματος εξαρτάται αποκλειστικά από την γωνία σκέδασης:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos(\varphi)) , 0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$$

Παρατηρούμε ότι για γωνίες από 0° μέχρι 180° η τιμή της ποσότητας $(1 - \cos(\varphi))$ μεγαλώνει όσο μεγαλώνει η γωνία.

Συγκεκριμένα:

- $\varphi = 0$



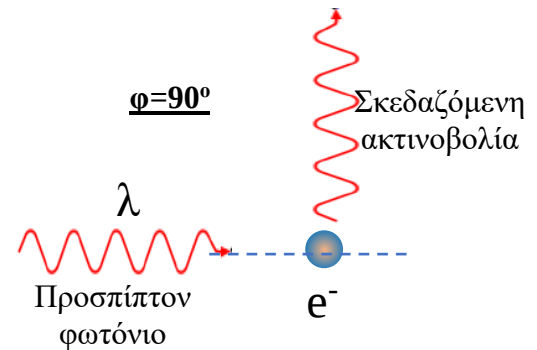
$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos(\varphi)) \xrightarrow{\varphi=0} \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - 1) \Rightarrow \boxed{\lambda' = \lambda}$$

Αυτό όμως σημαίνει ότι $E_{\text{φωτ}} = E'_{\text{φωτ}}$ και συνεπώς $K_e = 0$, δηλαδή το ηλεκτρόνιο παραμένει ακίνητο μετά την σκέδαση. Πρακτικά λοιπόν δεν υπήρξε καμία αλληλεπίδραση μεταξύ του φωτονίου και του ηλεκτρονίου.

- $\phi = 90^\circ$

Στην περίπτωση αυτή μηδενίζεται το συνημίτονο και προκύπτει

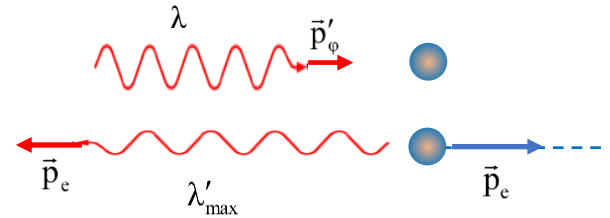
$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1}{mc^2}$$



- $\phi = 180^\circ$

Στην περίπτωση αυτή η ποσότητα $(1 - \cos(\phi))$ μεγιστοποιείται και γίνεται ίση με 2. Έτσι προκύπτει το μέγιστο μήκος κύματος του σκεδαζόμενου φωτονίου:

$$\lambda'_{\text{max}} = \lambda + \frac{2h}{mc}$$



Επομένως το σκεδαζόμενο φωτόνιο θα έχει την ελάχιστη συχνότητα f'_{min} και την ελάχιστη ενέργεια E'_{min} , με αποτέλεσμα το σκεδαζόμενο ηλεκτρόνιο να έχει την μέγιστη δυνατή κινητική ενέργεια:

$$K_{e,\text{max}} = E - E'_{\text{min}} \quad \text{ή} \quad K_{e,\text{max}} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'_{\text{max}}}$$

Τέλος η διατήρηση της ορμής μπορεί να γραφτεί ως εξής:

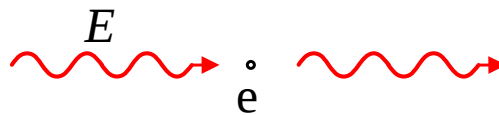
$$\vec{p} = \vec{p}' + \vec{p}_e \Rightarrow p = -|p'| + p_e \Rightarrow \frac{E}{c} = -\frac{E'}{c} + p_e \Rightarrow p_e = \frac{E + E'}{c}$$

7.3.5 Λυμένα παραδείγματα

Παράδειγμα 1.

A) Ένα φωτόνιο με ενέργεια $E=6.000\text{eV}$ προσπίπτει σε ακίνητο ελεύθερο ηλεκτρόνιο. Μετά την αλληλεπίδραση φωτονίου – ηλεκτρονίου, το φωτόνιο συνεχίζει διαδιδόμενο στην ίδια διεύθυνση.

Να υπολογιστούν η ενέργεια και η ορμή φωτονίου και ηλεκτρονίου, μετά την αλληλεπίδραση. Δίνεται $c=3\cdot 10^8\text{m/s}$.



Απάντηση:

Για το μήκος κύματος του σκεδαζόμενου φωτονίου ισχύει η εξίσωση:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\varphi) \quad (1)$$

Θέτοντας στην εξίσωση αυτή $\varphi=0$ οπότε $\cos\varphi=1$, βρίσκουμε ότι $\lambda'=\lambda$.

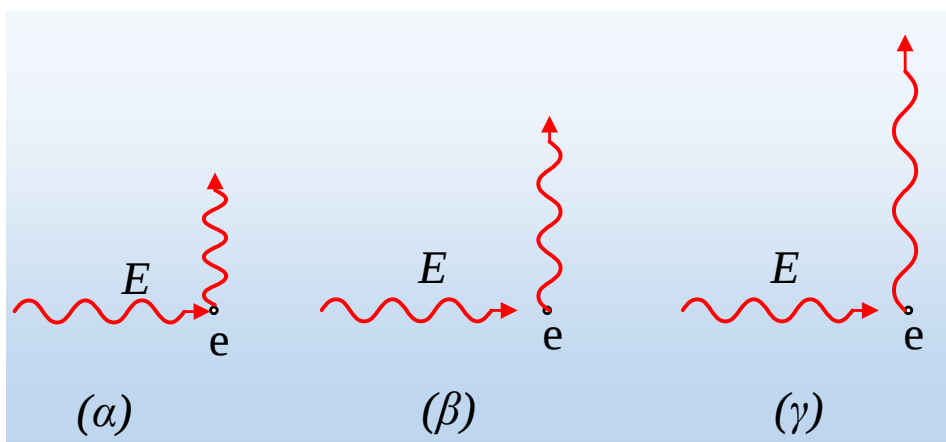
Δηλαδή από την στιγμή που δεν άλλαξε πορεία το φωτόνιο, δεν υπάρχει καμιά «αλληλεπίδραση» με το ηλεκτρόνιο, διατηρώντας ενέργεια και ορμή. Έτσι το φωτόνιο συνεχίζει να διαδίδεται με ενέργεια $E=6.000\text{eV}$, έχοντας ορμή:

$$p = \frac{E}{c} = \frac{6.000 \times 1,6 \times 10^{-19}}{3 \times 10^8} \text{kgm/s} = 3,2 \times 10^{-24} \text{kgm/s}$$

Αλλά τότε από την διατήρηση της ενέργειας προκύπτει ότι το ηλεκτρόνιο δεν θα αποκτήσει ενέργεια και θα παραμείνει ακίνητο.

B) Φωτόνια με ενέργεια $E=6.000\text{eV}$ προσπίπτουν σε ακίνητα και ελεύθερα ηλεκτρόνια.

i) Για την περίπτωση σκέδασης κατά 90° , ποιο από τα παρακάτω σχήματα, παριστάνει το ηλεκτρομαγνητικό κύμα, για τα σκεδαζόμενα φωτόνια;



ii) Να υπολογιστεί η ορμή που αποκτά το ηλεκτρόνιο, πάνω στο οποίο σκεδάστηκε το παραπάνω φωτόνιο, στην αρχική διεύθυνση διάδοσης του φωτονίου.

Δίνεται $c=3\cdot 10^8\text{m/s}$.

Απάντηση:

i) Στην περίπτωση της σκέδασης κατά 90° , όπου $\sin 90^\circ = 1$, το μήκος κύματος του σκεδαζόμενου φωτονίου είναι:

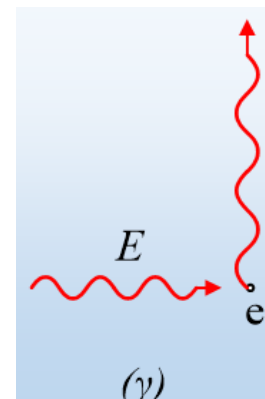
$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \sin 90^\circ) \rightarrow \lambda' = \lambda + \frac{h}{mc} > \lambda$$

Βλέπουμε δηλαδή η σκεδαζόμενη δέσμη να έχει μεγαλύτερο μήκος κύματος, οπότε σωστό είναι το (γ) σχήμα.

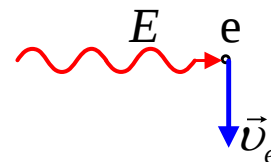
ii) Εφαρμόζουμε την διατήρηση της ορμής στην αρχική διεύθυνση διάδοσης του φωτονίου, παίρνοντας:

$$p_{\text{πριν},x} = p_{\text{μετ},x} \rightarrow p = p_{\phi x} + p_e \rightarrow$$

$$p_e = p = \frac{E}{c} = \frac{6.000 \times 1,6 \cdot 10^{-19}}{3 \cdot 10^8} \text{ kgm/s} = 3,2 \cdot 10^{-24} \text{ kgm/s}$$



Γ) Ένας συμμαθητής σας, στην παραπάνω αλληλεπίδραση μελέτησε, όχι την πορεία του σκεδαζόμενου φωτονίου, αλλά την διεύθυνση κίνησης του ηλεκτρονίου και σχεδίασε το διπλανό σχήμα, όπου η ταχύτητα $\vec{v}_e$ που αποκτά το ηλεκτρόνιο είναι κάθετη στην διεύθυνση διάδοσης του φωτονίου. Να εξετάσετε την ορθότητα ή μη του αποτελέσματος της μελέτης του.

**Απάντηση:**

Αν εφαρμόσουμε την διατήρηση της ορμής για το σύστημα, σε άξονες, θα πάρουμε:

$$p_{\text{πριν},x} = p_{\text{μετ},x} \rightarrow p = p_{\phi x} + p_e \rightarrow$$

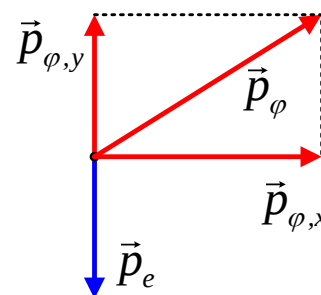
$$p_{\phi x} = p = 3,2 \cdot 10^{-24} \text{ kgm/s} \quad \text{και}$$

$$p_{\text{πριν},y} = p_{\text{μετ},y} \rightarrow 0 = p_{\phi y} + p_{e,y} \rightarrow p_{\phi y} = -p_{e,y}$$

Αλλά τότε η τελική ορμή του φωτονίου $\vec{p}_\phi$ έχει μεγαλύτερο μέτρο

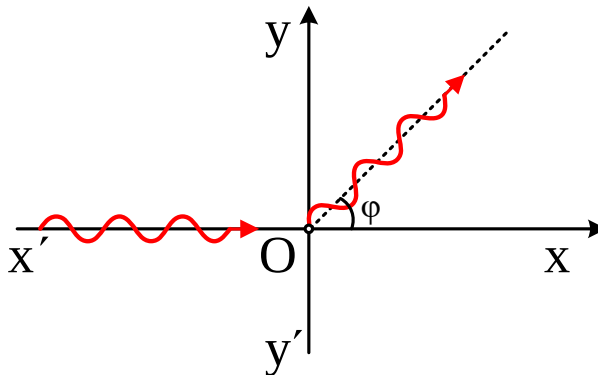
(βλέπε σχήμα) από την αρχική του ορμή, ίση με την συνιστώσα $p_{\phi x}$. Αλλά

η ορμή συνδέεται με την ενέργεια με την εξίσωση $E=pc$, οπότε αύξηση της ορμής σημαίνει και αύξηση της ενέργειας, πράγμα αδύνατον. Το ηλεκτρόνιο δηλαδή μπορεί να κινηθεί, αλλά όχι σε κάθετη διεύθυνση, ως προς το κινούμενο φωτόνιο.



Παράδειγμα 2.

Ένα ηλεκτρόνιο βρίσκεται ακίνητο στην αρχή Ο ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων. Ένα φωτόνιο με μήκος κύματος $\lambda=0,2\text{nm}$ διαδίδεται κατά μήκος του άξονα x' και μετά την αλληλεπίδρασή του με το ηλεκτρόνιο, διαπιστώνουμε ότι το φωτόνιο αποκτά μήκος κύματος λ' και διαδίδεται όπως στο σχήμα, σχηματίζοντας γωνία φ με τον x άξονα, όπου $\eta\mu\varphi=0,8$ και $\sigma\upsilon\nu\varphi=0,6$



Ζητούνται:

- Η ενέργεια και η ορμή του φωτονίου που προσπίπτει στο ηλεκτρόνιο.
- Η ενέργεια και η ορμή του σκεδαζόμενου φωτονίου.
- Η κινητική ενέργεια που αποκτά το ηλεκτρόνιο.
- Οι συνιστώσες της ορμής του ηλεκτρονίου στους δυο άξονες x και y .
- Η γωνία που σχηματίζει η διεύθυνση κίνησης του ηλεκτρονίου με τον άξονα x .

Δίνονται $c=3\cdot 10^8\text{m/s}$, $h=6,6\cdot 10^{-34}\text{J}\cdot\text{s}$, $q_e=-1,6\cdot 10^{-19}\text{C}$, $m_e=9\cdot 10^{-31}\text{kg}$, ενώ οι ενέργειες να υπολογιστούν σε eV . Δίνεται επίσης η εξίσωση για τα μήκη κύματος προσπίπτοντος και σκεδαζόμενου φωτονίου:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \sigma\upsilon\nu(\varphi))$$

Απάντηση:

- i)** Αρχικά το φωτόνιο έχει ενέργεια:

$$E = hf = h \frac{c}{\lambda} = 6,6 \cdot 10^{-34} \frac{3 \cdot 10^8}{0,2 \cdot 10^{-9}} \text{J} = 9,9 \cdot 10^{-16} \text{J} = \frac{9,9 \cdot 10^{-16} \text{J}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{J/eV}} = 6187 \text{eV}$$

Ενώ η ορμή του, με διεύθυνση πάνω στον άξονα x και φορά προς τα δεξιά, έχει μέτρο:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34}}{0,2 \cdot 10^{-9}} \text{kgm/s} = 3,3 \cdot 10^{-24} \text{kgm/s}$$

- ii)** Το μήκος κύματος του φωτονίου που σκεδάζεται είναι ίσο:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi) \rightarrow \lambda' = 0,2 \cdot 10^{-9} \text{m} + \frac{6,6 \cdot 10^{-34}}{9 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8}(1 - 0,6) \text{m} \rightarrow$$

$$\lambda' = 2 \cdot 10^{-10} \text{m} + 0,009 \cdot 10^{-10} \text{m} = 2,009 \cdot 10^{-10} \text{m}$$

Οπότε με την ίδια λογική, η ορμή του φωτονίου που σκεδάζεται θα σχηματίζει γωνία φ με τον άξονα x και θα έχουμε:

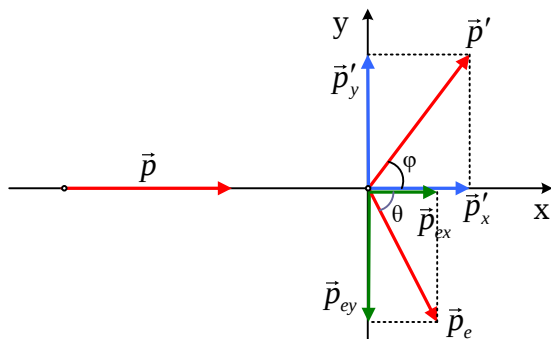
$$E' = hf' = h \frac{c}{\lambda'} = 6,6 \cdot 10^{-34} \frac{3 \cdot 10^8}{2,009 \cdot 10^{-10}} \text{J} = 9,85 \cdot 10^{-16} \text{J} = \frac{9,85 \cdot 10^{-16} \text{J}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{J/eV}} = 6160 \text{eV}$$

$$p' = \frac{h}{\lambda'} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34}}{2,009 \cdot 10^{-10}} \text{kgm/s} = 3,28 \cdot 10^{-24} \text{kgm/s}$$

iii) Από την διατήρηση της ενέργειας για την αλληλεπίδραση φωτονίου-ηλεκτρονίου παίρνουμε:

$$E = E' + K_e \rightarrow K_e = E - E' = 6187\text{eV} - 6160\text{eV} = 27\text{eV}$$

iv) Στο παρακάτω σχήμα έχουν σημειωθεί η ορμή $\vec{p}$ του προσπίπτοντος φωτονίου, η ορμή $\vec{p}'$ του σκεδαζόμενου και η τελική ορμή του ηλεκτρονίου $\vec{p}_e$, η οποία σχηματίζει γωνία θ με τον άξονα x. Έχουμε ακόμη αναλύσει τις δύο τελευταίες ορμές σε συνιστώσες στους άξονες x και y.



Από την αρχή διατήρηση της ορμής (την εφαρμόζουμε σε άξονες) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} p_{\text{πριν},x} &= p_{\text{μετά},x} \rightarrow p = p'_x + p_{ex} \rightarrow p_{ex} = p - p' \cos \varphi \rightarrow \\ p_{ex} &= 3,3 \cdot 10^{-24} \text{kgm/s} - 3,28 \cdot 10^{-24} \cdot 0,6 \text{kgm/s} = 1,33 \cdot 10^{-24} \text{kgm/s} \quad \text{και} \\ p_{\text{πριν},y} &= p_{\text{μετά},y} \rightarrow 0 = p'_y + p_{ey} \rightarrow p_{ey} = -p' \sin \varphi \rightarrow \\ p_{ey} &= -3,28 \cdot 10^{-24} \cdot 0,8 \text{kgm/s} = -2,62 \cdot 10^{-24} \text{kgm/s} \end{aligned}$$

Όπου το αρνητικό πρόσημο στην ορμή p_{ey} σημαίνει ότι έχει κατεύθυνση προς την αρνητική φορά του άξονα, όπως φαίνεται και στο σχήμα.

v) Για να προσδιορίσουμε την γωνία θ που σχηματίζει το κινούμενο ηλεκτρόνιο με την διεύθυνση x, υπολογίζουμε την εφθ:

$$\varepsilon \varphi \theta = \frac{|p_{ey}|}{|p_{ex}|} = \frac{2,62}{1,33} = 1,97$$

Παράδειγμα 3.

Μια δέσμη φωτονίων με ενέργεια 12keV σκεδάζεται από ελεύθερα ηλεκτρόνια ενός στόχου.

- i) Ποιο είναι το μήκος κύματος των φωτονίων της δέσμης, πριν την σκέδαση;
- ii) Ποιο είναι το μήκος κύματος των φωτονίων που σκεδάζονται κατά γωνία 90° , σε σχέση με την αρχική τους διεύθυνση;
- iii) Να υπολογισθεί η τελική κινητική ενέργεια ενός ηλεκτρονίου πάνω στο οποίο σκεδάστηκε ένα από τα παραπάνω φωτόνια.
- iv) Να βρεθεί η μέγιστη ενέργεια και η αντίστοιχη ορμή που μπορεί να αποκτήσει ένα ηλεκτρόνιο, μετά από την σκέδαση της παραπάνω δέσμης φωτονίων.

Δίνονται $c=3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, $h=6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$, $m_e=9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ και $1 \text{ eV}=1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

Απάντηση:

- i)** Η ενέργεια ενός φωτονίου της δέσμης, είναι ίση:

$$E = hf \xrightarrow{c=\lambda f} E = h \frac{c}{\lambda} \rightarrow \lambda = h \frac{c}{E} \rightarrow$$

$$\lambda = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{12 \cdot 10^3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = 1,03 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0,103 \text{ nm}$$

- ii)** Το μήκος κύματος του φωτονίου που σκεδάζεται κατά γωνία 90° είναι ίσο:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos 90^\circ) \rightarrow \lambda' = 0,103 \cdot 10^{-9} \text{ m} + \frac{6,6 \cdot 10^{-34}}{9 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8} (1 - 0) \text{ m} \rightarrow$$

$$\lambda' = 0,103 \cdot 10^{-9} \text{ m} + 0,024 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0,105 \text{ nm}$$

- iii)** Για την ενέργεια ενός φωτονίου, όπως το παραπάνω, θα έχουμε μετά την σκέδαση:

$$E' = hf' = h \frac{c}{\lambda'} = 6,6 \cdot 10^{-34} \frac{3 \cdot 10^8}{0,105 \cdot 10^{-9}} \text{ J} = 188 \cdot 10^{-17} \text{ J} = \frac{188 \cdot 10^{-17} \text{ J}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV}} \approx 11790 \text{ eV} = 11,79 \text{ keV}$$

Από την διατήρηση της ενέργειας για την αλληλεπίδραση φωτονίου-ηλεκτρονίου παίρνουμε:

$$E = E' + K_e \rightarrow K_e = E - E' = 12 \text{ keV} - 11,79 \text{ keV} = 0,21 \text{ keV}$$

- iv)** Το μήκος κύματος ενός φωτονίου που σκεδάζεται κατά γωνία φ , δίνεται από την εξίσωση:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \varphi)$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι η μεγαλύτερη αύξηση στο μήκος κύματος προκύπτει όταν $\varphi=180^\circ$, οπότε το φωτόνιο «ανακλάται» κατά την πρόσπτωσή του σε ένα ακίνητο ηλεκτρόνιο. Στην περίπτωση αυτή το φωτόνιο αποκτά το μέγιστο μήκος κύματος:

$$\lambda_{\max} - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos 180^\circ) \rightarrow \lambda_{\max} = \lambda + \frac{h}{mc}(1 - (-1)) \rightarrow$$

$$\lambda_{\max} = \lambda + 2 \frac{h}{mc} = 0,103 \cdot 10^{-9} \text{ m} + 2 \frac{6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{9 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} \rightarrow$$

$$\lambda_{\max} = 0,103 \cdot 10^{-9} \text{ m} + 0,048 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0,108 \text{ nm}$$

Αλλά τότε το φωτόνιο αυτό έχει (την ελάχιστη) ενέργεια:

$$E_{\min} = hf_{\min} = h \frac{c}{\lambda_{\max}} = 6,6 \cdot 10^{-34} \frac{3 \cdot 10^8}{0,108 \cdot 10^{-9}} \text{ J} \rightarrow$$

$$E_{\min} = 183 \cdot 10^{-17} \text{ J} = \frac{183 \cdot 10^{-17} \text{ J}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J/eV}} \approx 11460 \text{ eV} = 11,46 \text{ keV}$$

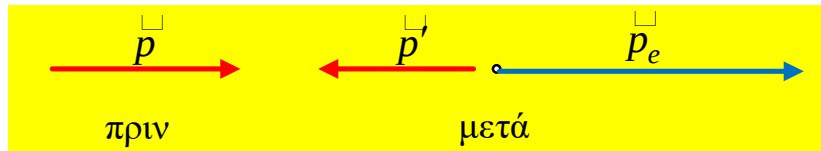
Ενώ έχει ορμή μέτρου:

$$p' = \frac{E_{\min}}{c} = \frac{183 \cdot 10^{-17} \text{ J}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 6,1 \cdot 10^{-24} \text{ kgm/s}$$

Ξανά από την διατήρηση της ενέργειας για την αλληλεπίδραση φωτονίου-ηλεκτρονίου παίρνουμε:

$$E = E_{\min} + K_{e,\max} \rightarrow K_{e,\max} = E - E_{\min} = 12 \text{ keV} - 11,46 \text{ keV} = 0,54 \text{ keV}$$

Ενώ λαμβάνοντας υπόψη ότι το φωτόνιο μετά την σκέδαση κινείται αντίθετα από την αρχική του διεύθυνση διάδοσης, θα έχουμε για τις ορμές το παρακάτω σχήμα, από όπου με βάση την αρχή διατήρησης της ορμής, θα έχουμε (η προς τα δεξιά κατεύθυνση θετική):



$$\vec{p} = \vec{p} + \vec{p}_e \rightarrow \frac{E}{c} = -|p'| + p_e \rightarrow$$

$$p_e = \frac{E}{c} + |p'| = \frac{12.000 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{3 \cdot 10^8} \text{ kgm/s} + 6,1 \cdot 10^{-24} \text{ kgm/s} = 12,5 \cdot 10^{-24} \text{ kgm/s}$$

Με διεύθυνση την αρχική διεύθυνση διάδοσης του φωτονίου της δέσμης.

7.4 Η κυματική φύση της ύλης

7.4.1 Κυματοσωματιδιακός δυϊσμός του φωτός

Κατά την κλασική φυσική το φως είναι κύμα που διαπιστώνεται από πλήθος πειραμάτων. Επομένως, μια κυματική εικόνα του φωτός δεν επιδέχεται αμφιβολία. Όμως με τη θεωρία των φωτονίων φαίνεται να διαπιστώνεται και μια σωματιδιακή εικόνα για το φως, εικόνα που αρχικώς προτάθηκε από τον Νεύτωνα για την εξήγηση της γεωμετρικής οπτικής. Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο και το φαινόμενο Compton επιβεβαίωσαν την αντίληψη μιας σωματιδιακής φύσης για το φως.

Το φως έχει σωματιδιακό και κυματικό χαρακτήρα, άρα είναι κάτι άλλο από το κλασικό σωματίδιο και κάτι άλλο από το κλασικό κύμα. Αυτός ο κυματοσωματιδιακός δυϊσμός του φωτός περιγράφει και εξηγεί πολύ καλά όλες τις ιδιότητές του. Οι δύο χαρακτήρες του φωτός δεν αλληλοσυγκρούονται, αλλά αλληλοσυμπληρώνονται (αυτό λέγεται αρχή της συμπληρωματικότητας). Συνήθως σε χαμηλές συχνότητες (και μεγάλες ροές φωτονίων) είναι έντονος ο κυματικός χαρακτήρας του φωτός. Π.χ. στις τηλεπικοινωνίες ουδόλως λαμβάνεται ο σωματιδιακός χαρακτήρας του φωτός. Σε υψηλότερες συχνότητες (και μικρές ροές φωτονίων) τόσο πιο έντονη κάνει την παρουσία του ο σωματιδιακός χαρακτήρας του φωτός. Π.χ. οι ακτίνες γ έχουν αποκλειστικά σωματιδιακή συμπεριφορά.

7.4.2 Υπόθεση de Broglie

Μετά την ερμηνεία του φαινομένου Compton και την πειραματική απόδειξη ότι τα φωτόνια έχουν και σωματιδιακό χαρακτήρα, ο Γάλλος Louis de Broglie, το 1924, στηριζόμενος στο ότι η φύση έχει συμμετρία οδηγήθηκε στο αξίωμα:

Σε κάθε κινούμενο σωματίδιο με ορμή p , αντιστοιχεί ένα κύμα με μήκος κύματος λ , το οποίο είναι ίσο με

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Όλα τα σωματίδια έχουν ταυτόχρονα και κυματική συμπεριφορά, με κυματικά χαρακτηριστικά συχνότητα f και μήκος κύματος λ , που συνδέονται με τα αντίστοιχα σωματιδιακά ενέργεια E και ορμή p μέσω των σχέσεων

$$f = \frac{E}{h} \quad \text{και} \quad \lambda = \frac{h}{p}$$

που είναι ταυτόσημες με εκείνες για τα φωτόνια.

Δηλαδή κάθε σωματίδιο ενέργειας E και ορμής p συμπεριφέρεται και σαν ένα κύμα μήκους κύματος

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (v \ll c) \quad \text{και} \quad \text{συχνότητας} \quad f = \frac{E}{h}.$$

Προκειμένου να ανιχνευτεί η κυματική συμπεριφορά ενός σωματιδίου, θα πρέπει να έχει μικρή μάζα. Για παράδειγμα ένα ηλεκτρόνιο εμφανίζει κυματική συμπεριφορά, ενώ για ένα αντικείμενο του μακρόκοσμου, λόγω της μεγάλης μάζας του, η κυματική του συμπεριφορά είναι μη ανιχνεύσιμη.

Η υπόθεση de Broglie επαληθεύτηκε το 1927, στην Αμερική από τους Davisson και Germer. Οι Davisson και Germer διαπίστωσαν ότι μία δέσμη ηλεκτρονίων που κινούνται με μεγάλη ταχύτητα περιθλάται με τρόπο ανάλογο με αυτόν που περιθλάται μια δέσμη ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Επιπλέον, πειράματα έδειξαν ότι κυματική συμπεριφορά παρουσιάζουν και δέσμες σωματιδίων α και δέσμες νετρονίων. Τα αποτελέσματα ήταν τέτοια που δεν άφηναν κανένα περιθώριο να αμφισβητηθεί ότι τα σωματίδια έχουν και κυματική φύση.

Αν και θεωρητικά μπορεί κανείς να «αποδώσει» μήκος κύματος σε οποιοδήποτε σώμα η κυματική φύση της ύλης μπορεί να εφαρμοστεί μόνο σε υποατομικά σωματίδια. Στο παράδειγμα 7.3 του σχολικού βιβλίου γίνεται υπολογισμός του μήκους κύματος για μια μπάλα μπάσκετ με μάζα $m_1=1 \text{ kg}$, κινούμενη με ταχύτητα $v_1=3 \text{ m/s}$, μια σφαίρα με μάζα $m_2=20 \text{ g}$, κινούμενη με ταχύτητα $v_2=300 \text{ m/s}$ και ένα ηλεκτρόνιο με μάζα $m_e=9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, κινούμενη με ταχύτητα $7 \cdot 10^6 \text{ m/s}$.

Οι αριθμητικοί υπολογισμοί δίνουν $\lambda_1 = 2,2 \cdot 10^{-34} \text{ m}$, $\lambda_2 = 1,1 \cdot 10^{-32} \text{ m}$ και $\lambda_e = 1,04 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.

Παρατηρούμε ότι δυο πρώτα μήκη κύματος είναι πολύ μικρά, πρακτικά μη ανιχνεύσιμα.



Λουί ντε Μπρόι (Louis De Broglie, 15 Αυγούστου 1892 – 19 Μαρτίου 1987)

Ήταν γόνος αριστοκρατικής γαλλικής οικογένειας. Ο Λουί ντε Μπρόι σπούδασε αρχικά ιστορία και αργότερα ασχολήθηκε με την θεωρητική φυσική. Η σημαντικότερη συνεισφορά του στη φυσική (η οποία του χάρισε και το βραβείο Νόμπελ το 1929) ήταν η πρόταση του ότι η διττή υπόσταση κύματος και σωματιδίου (κυματοσωματιδιακός δυϊσμός) δεν βρίσκει εφαρμογή μόνο στο φως αλλά και στην ύλη. Ανέπτυξε μια αλυσίδα συλλογισμών εκκινώντας από την ειδική θεωρία της σχετικότητας και κατέληξε στο συμπέρασμα ότι η ύλη πρέπει να διαθέτει την κυματική της μετενσάρκωση.

7.4.3 Λυμένα παραδείγματα

Παράδειγμα 1.

A. Γνωρίζουμε ότι η μάζα του πρωτονίου είναι $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ και η σταθερά του Planck είναι $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$. Να υπολογιστούν τα μήκη κύματος de Broglie που αντιστοιχούν:

α1. σε πρωτόνιο (1) που έχει ταχύτητα $v_1 = 13,26 \cdot 10^6 \text{ m/s}$,

α2. σε πρωτόνιο (2) του οποίου η ορμή p_2 και η κινητική ενέργεια K_2 συνδέονται με τη σχέση $\frac{p_2}{K_2} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}$.

B. Εάν η ορμή του πρωτονίου (1) μειωθεί κατά 25%, να υπολογιστεί το ποσοστό στα εκατό της μεταβολής του μήκους κύματος de Broglie του πρωτονίου (1).

Γ. Εάν η κινητική ενέργεια του πρωτονίου (2) αυξηθεί κατά 25%, να υπολογιστεί το ποσοστό στα εκατό της μεταβολής του μήκους κύματος de Broglie του πρωτονίου (2). Δίνεται: $\frac{2\sqrt{5}}{5} = 0,89$.

Απάντηση:

α1. Το μήκος κύματος de Broglie ενός σώματος δίνεται από τη σχέση $\lambda = \frac{h}{p}$. Επειδή η ταχύτητα v_1 του πρωτονίου (1) είναι πολύ μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $p = mv$ που δίνει την ορμή ενός σώματος. Επομένως:

$$\lambda_1 = \frac{h}{p_1} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{h}{m_p v_1} \Rightarrow \lambda_1 = 3 \cdot 10^{-14} \text{ m.}$$

α2. Από τις σχέσεις $p = mv$ και $K = \frac{1}{2}mv^2$, που δίνουν την ορμή και την κινητική ενέργεια ενός σώματος αντίστοιχα, έχουμε:

$$\frac{p_2}{K_2} = \frac{m_p v_2}{\frac{1}{2}m_p v_2^2} = \frac{2}{v_2} \Rightarrow v_2 = \frac{2K_2}{p_2} \Rightarrow v_2 = 10^6 \text{ m/s.}$$

$$\text{Επομένως: } \lambda_1 = \frac{h}{p_1} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{h}{m_p v_1} \Rightarrow \lambda_2 = 3,97 \cdot 10^{-13} \text{ m.}$$

Β. Όταν η ορμή του πρωτονίου (1) μειώνεται κατά 25%, γίνεται:

$$p'_1 = p_1 - 25\%p_1 = 0,75p_1$$

$$\lambda'_1 = \frac{h}{p'_1} \Rightarrow \lambda'_1 = \frac{h}{0,75p_1} = \frac{4}{3} \frac{h}{p_1} \Rightarrow \lambda'_1 = \frac{4}{3} \lambda_1$$

Το ποσοστό στα εκατό της μεταβολής του μήκους κύματος de Broglie του πρωτονίου (1) είναι:

$$\pi = \frac{\lambda'_1 - \lambda_1}{\lambda_1} \cdot 100\% = \frac{\frac{4}{3}\lambda_1 - \lambda_1}{\lambda_1} \cdot 100\% \Rightarrow \pi = 33,33\%$$

Γ. Όταν η κινητική ενέργεια του πρωτονίου (2) αυξάνεται κατά 25%, γίνεται:

$$K'_2 = K_2 + 25\%K_2 = 1,25K_2 \Rightarrow \frac{1}{2}m_p v'^2_2 = 1,25 \frac{1}{2}m_p v^2_2 \Rightarrow v'_2 = \frac{\sqrt{5}}{2} v_2$$

$$\lambda'_2 = \frac{h}{p'_2} \Rightarrow \lambda'_2 = \frac{h}{\frac{\sqrt{5}}{2} m_p v'_2} \Rightarrow \lambda'_2 = \frac{2\sqrt{5}}{2} \lambda_2 \Rightarrow \lambda'_2 = 0,89\lambda_2$$

Το ποσοστό στα εκατό της μεταβολής του μήκους κύματος de Broglie του πρωτονίου (2) είναι:

$$\pi = \frac{\lambda'_2 - \lambda_2}{\lambda_2} \cdot 100\% = \frac{0,89\lambda_2 - \lambda_2}{\lambda_2} \cdot 100\% \Rightarrow \pi = -11\%.$$

7.5 Η αρχή της αβεβαιότητας ή αρχή της απροσδιοριστίας

Η αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg είναι ένα από τα σημαντικότερα αποτελέσματα της φυσικής του εικοστού αιώνα. Έχει τόσο μεγάλη επιρροή, ώστε να έχει μεταφερθεί στην γενική ποπ κουλτούρα. Πολλές φορές, λανθασμένα, γενικεύεται και σε φαινόμενα της καθημερινής ζωής, στο σύνολο της ή σπανιότερα σε τμήματά της, από την κριτική λογοτεχνίας μέχρι την μετάδοση αθλητικών γεγονότων.

Σύμφωνα με την αρχή της απροσδιοριστίας είναι αδύνατο να μετρηθεί ταυτόχρονα και με ακρίβεια, ούτε πρακτικά, ούτε και θεωρητικά η θέση και η ταχύτητα, ή ορμή, ενός σωματίου. Εν αντιθέσει με την αρχή της αιτιοκρατίας, σύμφωνα με την αρχή της απροσδιοριστίας υπάρχουν γεγονότα των οποίων η εκδήλωση δεν υπαγορεύεται από κάποια αιτία. Η αρχή της απροσδιοριστίας, αναφέρεται σε φαινόμενα που συμβαίνουν σε επίπεδο μικρόκοσμου. Αυτό έχει ως συνέπεια η ισχύς της να περιορίζεται κατά πολύ μεγάλο βαθμό στην κλασική φυσική, η οποία και περιγράφει τα φαινόμενα που γίνονται αντιληπτά από εμάς καθημερινά

Η απροσδιοριστία αυτή δεν αναφέρεται στην ανικανότητα του ανθρώπου να παρατηρήσει ορισμένα φαινόμενα στον μικρόκοσμο (ούτε αποτελεί φιλοσοφική αγνωσία) αλλά σε μία πραγματική ιδιότητα του φυσικού κόσμου, η οποία εμφανίζεται και πειραματικά. Ο λόγος που δεν βλέπουμε αυτή την αβεβαιότητα στην καθημερινότητα είναι ότι εμφανίζεται σε πολύ μικρή κλίμακα και γίνεται κυρίως εμφανής στον μικρόκοσμο. Η αρχή της αβεβαιότητας δεν είναι ένα πρακτικό όριο στις μετρήσεις μας. Είναι όριο στο είδος των ιδιοτήτων που έχει ένα αντικείμενο συνυφασμένη με τη θεμελιώδη δομή αυτού καθαυτού του σύμπαντος.

Η κβαντική αβεβαιότητα εξηγεί τις κινήσεις και τις αλληλεπιδράσεις του μικρόκοσμου (συνεχείς κινήσεις, μεγάλες ταχύτητες), το μέγεθος και τη σταθερότητα των ατόμων, την εμβέλεια των δυνάμεων, τις ραδιενεργές διασπάσεις και τα βιολογικά φαινόμενα (σχηματισμός του DNA), παρέχοντας μας γνώσεις που μπορεί να έχουν αντίκτυπο και στον τεχνολογικό μας πολιτισμό μέσω και των κβαντικών υπολογιστών (Hobson 1996).



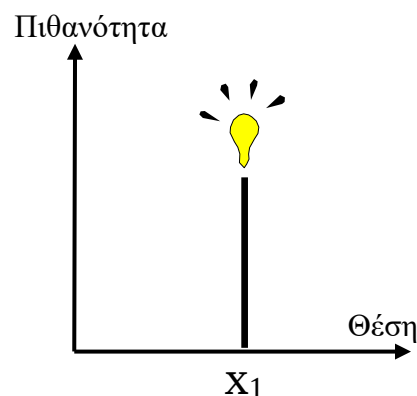
7.5.1 Μαθηματική έκφραση της αρχής της αβεβαιότητας

Στις προηγούμενες παραγράφους αναφέρθηκε ότι τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα έχουν διπλή φύση, δηλαδή ότι «συμπεριφέρονται» ως κύματα και ως σωματίδια. Ομοίως δέσμες κλασικών σωματιδίων, όπως τα ηλεκτρόνια, έχουν και κυματική συμπεριφορά. Τα παραπάνω συνιστούν μια γενικότερη αρχή της Φυσικής την **Αρχή του Κυματοσωματιδιακού δυϊσμού της ύλης**. (Με την ευρύτερη έννοια της ύλης συμπεριλαμβάνοντας και την ενέργεια)

Πώς μπορούμε να προσεγγίσουμε τις δύο αυτές «πραγματικότητες»;

Ένα σωματίδιο, όπως το αντιλαμβανόμαστε στην κλασική φυσική είναι κάτι του οποίου η θέση στο χώρο είναι αυστηρά προσδιορισμένη. Τα σωματίδια, εξ ορισμού, υπάρχουν σε μία μοναδική θέση κάθε χρονική στιγμή. Αυτό μπορούμε να το αναπαραστήσουμε σε ένα γράφημα πιθανότητας εύρεσης του αντικειμένου σε δεδομένη θέση, που μοιάζει με ακίδα και είναι 100% στη δεδομένη θέση και μηδενική οπουδήποτε αλλού.

Στην κβαντομηχανική, η ακριβής θέση και η ακριβής ταχύτητα ενός αντικειμένου δεν έχουν νόημα. Για να το καταλάβουμε αυτό πρέπει να αναλογιστούμε τι σημαίνει κυματική ή σωματιδιακή συμπεριφορά.



Αντίθετα, ένα κύμα εκτείνεται στο χώρο, όπως οι κυματισμοί στην επιφάνεια μιας λίμνης.

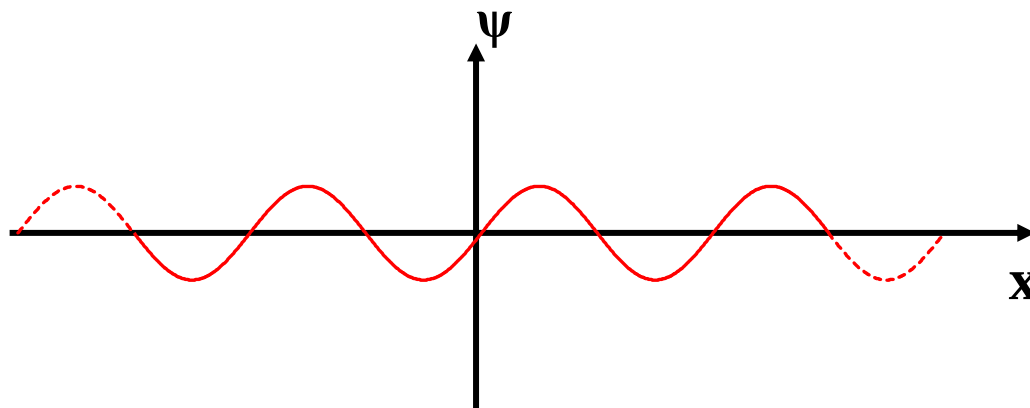
Ένα σωματίδιο με κυματική συμπεριφορά πού βρίσκεται;

Όταν αποδώσει κανείς κυματικές ιδιότητες, όπως για παράδειγμα το μήκος κύματος λ , σε ένα σωματίδιο αρχίζουν και δημιουργούνται κάποια ερωτήματα. Η απάντηση της κβαντικής θεωρίας, είναι:

«δεν μπορούμε να γνωρίζουμε πού ακριβώς βρίσκεται.»

Ας θεωρήσουμε ένα σωματίδιο που κινείται κατά μήκος του άξονα x . Αν κάποια χρονική στιγμή υποθέσουμε ότι **γνωρίζουμε ακριβώς το μέτρο της ορμής του p** , τότε σύμφωνα με την υπόθεση του **de Broglie γνωρίζουμε ακριβώς το μήκος κύματος λ** που αντιστοιχεί στο σωματίδιο και το οποίο δίνεται από τη σχέση $\lambda = \frac{h}{p}$. Η εξίσωση που περιγράφει το στιγμιότυπο ενός τέτοιου κύματος στο χώρο

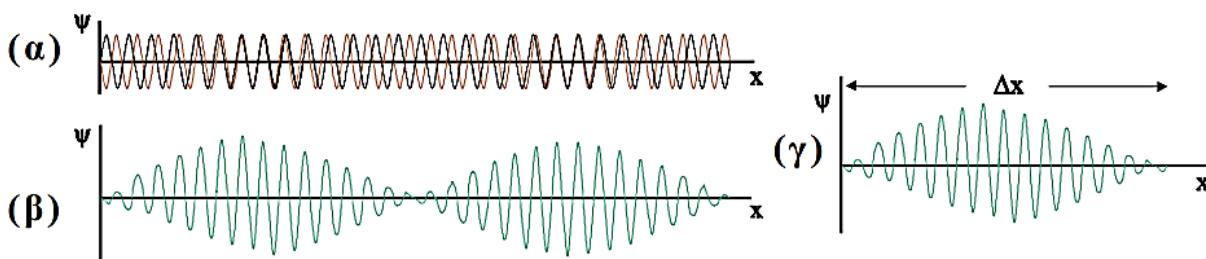
τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $y = A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$ και η γραφική της παράσταση είναι αυτή του σχήματος.



Παρατηρούμε ότι το στιγμιότυπο εκτείνεται στο χώρο από το $-\infty$ ως το $+\infty$. Έτσι το σωματίδιο αυτό που είναι συνδεδεμένο με αυτό το μήκος κύματος μπορεί να βρίσκεται οπουδήποτε και δεν μπορούμε να γνωρίζουμε την ακριβή του θέση. Διαθέτει καλή πιθανότητα ύπαρξης σε πληθώρα διαφορετικών θέσεων.

Κυματοπακέτο

Η μέχρι τώρα μελέτη μας αφορούσε κύματα ή ταλαντώσεις με μία μόνο συχνότητα ω . Για να μη καταστρέψουμε εντελώς τη σωματιδιακή εικόνα χρειαζόμαστε κύματα περιορισμένα στο χώρο. Αυτό μπορεί να γίνει με τη χρήση του «κυματοδέματος», δηλαδή την παραγωγή ενός κύματος εντοπισμένου χωρικά. Μπορούμε να φτιάξουμε και να περιγράψουμε μαθηματικά οποιαδήποτε κυματομορφή με τη μέθοδο της υπέρθεσης συνδυάζοντας κατάλληλα διάφορα κύματα με επιλεγμένα μήκη κύματος, πλάτη και φάσεις. Το συνιστάμενο κύμα είναι ένα οδεύον κύμα που θα αναφέρεται σαν **κυματοπακέτο** ή κυματοομάδα (wave packet). Υπάρχει όμως κάποιος περιορισμός. Όσο πιο εντοπισμένο στο χώρο (πιο σωματιδιακό) θέλουμε να είναι το κυματοπακέτο τόσο περισσότερα και πιο διασκορπισμένα μήκη κύματος πρέπει να χρησιμοποιήσουμε. Πληρώνουμε δηλαδή τον εντοπισμό της θέσης του σωματιδίου-κύματος (Δx) με απροσδιοριστία στο μήκος κύματος που του αντιστοιχίζουμε και - κατ' επέκταση - στην ορμή του (Δp), $\left(p = \frac{h}{\lambda} \right)$.



Αν χρησιμοποιήσουμε **αρκετά μεγάλο αριθμό** διαφορετικών κυμάτων μπορούμε να «συνθέσουμε» ένα κυματοπακέτο σαν αυτό του διπλανού σχήματος με περιορισμένη αβεβαιότητα Δx ως προς την θέση στο χώρο. Με τον τρόπο αυτό μειώνουμε την αβεβαιότητα ως προς την θέση του αντικειμένου. Από την άλλη όμως έχοντας προσθέσει πολλά διαφορετικά μήκη κύματος έχουμε αυξήσει την αβεβαιότητα ως προς την ορμή του αντικειμένου (αφού με κάθε διαφορετική τιμή του μήκους κύματος, είναι συνδεδεμένη και μια διαφορετική τιμή της ορμής)

Η αδυναμία μας να προσδιορίσουμε επακριβώς ταυτόχρονα τη θέση και την ορμή ενός σωματιδίου δεν οφείλεται σε πειραματικές ατέλειες. Είναι σύμφυτη με την ίδια την κβαντική δομή της ύλης.

Είναι αναπόφευκτη συνέπεια του κυματοσωματιδιακού δυϊσμού της ύλης.

Ο Heisenberg το 1927 κωδικοποίησε τα παραπάνω διατυπώνοντας την αρχή της αβεβαιότητας (ή απροσδιοριστίας) με τη σχέση:

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \frac{h}{2\pi} \quad \text{ή}$$

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq \hbar$$

Όπου $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ (h-bar) η ανηγμένη σταθερά του Planck.

Στην παραπάνω σχέση τα μεγέθη, $\Delta p_x, \Delta x$ δεν εκφράζουν μεταβολή αλλά το εύρος της αβεβαιότητας με την οποία γνωρίζουμε τα μεγέθη.

Η αρχή απροσδιοριστίας αφορά **ταυτόχρονη μέτρηση θέσης και ορμής στον ίδιο άξονα**. Ανάλογες σχέσεις ισχύουν και για τις άλλες διευθύνσεις:

$$\Delta p_y \cdot \Delta y \geq \frac{h}{2\pi} \quad \text{και} \quad \Delta p_z \cdot \Delta z \geq \frac{h}{2\pi}$$

Μία άλλη διατύπωση της αρχής της αβεβαιότητας του Heisenberg είναι η:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{2\pi}$$

Η αβεβαιότητα στη μέτρηση της ενέργειας μιας κατάστασης ενός συστήματος είναι αντίστροφα ανάλογη με τον χρόνο που το σύστημα παραμένει σ' αυτή την κατάσταση.

Δηλαδή όλες οι μετρήσεις ενέργειας περιέχουν μια αβεβαιότητα, εκτός αν διαθέτουμε για τη μέτρηση άπειρο χρόνο.

- Το Δt στην παραπάνω σχέση νοείται ως ο χρόνος εξέλιξης ενός κβαντικού συστήματος, δηλαδή το χρονικό διάστημα μέσα στο οποίο θα παρατηρηθεί μια μετρήσιμη αλλαγή στα χαρακτηριστικά του συστήματος.



Ο Βέρνερ Καρλ Χάιζενμπεργκ (Werner Karl Heisenberg, Βύρτσμπουργκ, 5 Δεκεμβρίου 1901 – Μόναχο, 1 Φεβρουαρίου 1976),

Γνωστός και ως «Ο Δολοφόνος του Μπορ», ήταν Γερμανός φυσικός, με σπουδαία συμβολή στη θεμελίωση της Κβαντομηχανικής, για την οποία τιμήθηκε με το Βραβείο Νόμπελ Φυσικής του 1932.

Ο Χάιζενμπεργκ σπούδασε από το 1920 Θεωρητική Φυσική στο Πανεπιστήμιο του Μονάχου. Μπήκε στο πνεύμα της Κβαντικής Φυσικής τόσο γρήγορα, ώστε μετά από μερικούς μήνες έδωσε λύσεις σε σημαντικά προβλήματα (π.χ. Φαινόμενο Ζέεμαν). Επειδή απαιτείτο μία ελάχιστη σπουδή έξι εξαμήνων, μόλις το 1923 μπόρεσε ο Χάιζενμπεργκ να ανακηρυχθεί διδάκτορας. Το 1924 έγινε βοηθός του Μαξ Μπορν στο Γκέτινγκεν. Το 1927 διατύπωσε ο ίδιος ο Χάιζενμπεργκ την «Αρχή της απροσδιοριστίας», μετά από στενή συνεργασία με τον Νίλς Μπορ. Η αρχή της απροσδιοριστίας έδινε μια τελείως νέα ερμηνεία για τον φυσικό κόσμο, όπως ότι κύμα και σωματίδιο είναι διαφορετικές θεωρήσεις του ίδιου πράγματος, καθώς και την ουσιαστική εξήγηση της σταθερότητας της ύλης. Στη θέση της αιτιότητας της Κλασικής Φυσικής, μπήκε η τυχαιότητα των γεγονότων.

Σε ένα διεγερμένο άτομο ένα ή περισσότερα ηλεκτρόνια δε βρίσκονται στη θεμελιώδη τους κατάσταση, αλλά σε κατάσταση μεγαλύτερης ενέργειας. Όταν ένα τέτοιο ηλεκτρόνιο μεταπηδήσει στη θεμελιώδη του κατάσταση, εκπέμπει ένα φωτόνιο ενέργειας hf ίσης με τη διαφορά ενέργειας των δύο καταστάσεων στις οποίες βρέθηκε.

Ένα διεγερμένο άτομο εκπέμπει ακτινοβολία όταν ένα ή περισσότερα ηλεκτρόνια που δεν βρίσκονται στη θεμελιώδη κατάσταση επιστρέψουν σ' αυτή. Σε κάθε τέτοιο «κβαντικό άλμα» εκπέμπεται ένα φωτόνιο. Η μελέτη των φασμάτων εκπομπής δείχνει ότι οι φασματικές γραμμές δεν είναι αυστηρά καθορισμένες αλλά η κάθε μια εμφανίζει ένα φυσικό εύρος. Το εύρος των φασματικών γραμμών μπορεί να εξηγηθεί με την αρχή της αβεβαιότητας.

Ένα διεγερμένο άτομο μπορεί να εκπέμπει ένα φωτόνιο οποιαδήποτε στιγμή στο χρονικό διάστημα από μηδέν μέχρι άπειρο. Ο μέσος χρόνος στον οποίο ένας μεγάλος αριθμός διεγερμένων ατόμων εκπέμπει ακτινοβολία είναι της τάξης του 10^{-8} s.

Από τη σχέση $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{2\pi}$ και επειδή $\Delta E = h \cdot \Delta f$ προκύπτει $h\Delta f \geq \frac{h}{2\pi \cdot \Delta t}$ και $\Delta f \geq \frac{1}{2\pi \cdot \Delta t}$ θέτοντας όπου $\Delta t = 10^{-8}$ s έχουμε $\Delta f \geq 1,6 \cdot 10^7$ Hz όπου $1,6 \cdot 10^7$ Hz είναι το ελάχιστο εύρος της φασματικής γραμμής.

Παρατηρήσεις

1) Σε κάθε πείραμα όταν μετράμε ένα μέγεθος (A) η αβεβαιότητα στη μέτρηση (ΔA) είναι αποτέλεσμα της ίδιας της πειραματικής διαδικασίας. Μπορεί να οφείλεται σε μικρή ακρίβεια των οργάνων μέτρησης, σε ατελή διαδικασία και διάφορους άλλους λόγους. Έτσι η τιμή του μεγέθους A μπορεί να είναι οποιαδήποτε στο διάστημα από (A- ΔA) μέχρι (A+ ΔA). Η γνώση της τιμής της αβεβαιότητας (συνήθως ως ποσοστό της μέσης τιμής του μετρούμενου μεγέθους) είναι πολύ χρήσιμη για την εκτίμηση της αξιοπιστίας του αποτελέσματος.

Η αβεβαιότητα όμως στην οποία αναφέρθηκε ο Heisenberg είναι κάτι διαφορετικό: Οι αναπόφευκτες αβεβαιότητες Δx και Δp δεν προέρχονται από ατέλειες των μετρητικών συσκευών αλλά από αυτή καθ' εαυτή την κβαντική συμπεριφορά της ύλης. Ο Heisenberg το απέδειξε αυτό προτείνοντας μια σειρά από ευφυή νοητικά πειράματα, στα οποία ανέλυσε διαφορετικές πιθανές συσκευές μετρήσεων της θέσης και της ορμής ενός σωματίου.

Εδώ αναδεικνύεται και ο ρόλος της παρατήρησης στα φαινόμενα του μικρόκοσμου:

Για να προσδιορίσουμε τη θέση ενός ηλεκτρονίου, πρέπει να αλληλεπιδράσουμε με αυτό στέλνοντάς του ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία (φωτόνια). Αν το μήκος κύματος της ακτινοβολίας είναι μικρό, τότε η απροσδιοριστία στη μέτρηση θέσης θα είναι μικρή (η ακρίβεια στη μέτρηση της θέσης του ηλεκτρονίου θα είναι μεγάλη), όμως η μεταβολή της ορμής του λόγω της αλληλεπίδρασής με την ακτινοβολία θα είναι μεγάλη ($p = \frac{h}{\lambda}$), άρα θα έχουμε μεγάλη αβεβαιότητα στη μέτρηση ορμής. Αν ρίχναμε στο ηλεκτρόνιο

φως μεγαλύτερου μήκους κύματος, θα χάναμε σε ακρίβεια προσδιορισμού θέσης (μεγαλύτερη απροσδιοριστία στη μέτρηση θέσης), θα κερδίζαμε σε ακρίβεια μέτρησης ορμής (μικρότερη απροσδιοριστία στη μέτρηση ορμής), αφού η ορμή του ηλεκτρονίου θα είχε μεταβληθεί λιγότερο.

2) Η αρχή της απροσδιοριστίας δεν έχει νόημα να εφαρμοστεί σε φαινόμενα της καθημερινής ζωής στον μακρόκοσμο.

Έστω δυο σώματα, ένα ηλεκτρόνιο κινούμενο με ταχύτητα $v_1 = 3 \cdot 10^5$ m/s και ένα μπαλάκι του γκολφ μάζας 45g που κινείται με ταχύτητα 20 m/s. Θεωρούμε και για τα δυο αντικείμενα ότι η μέτρηση της ταχύτητας (και κατά συνέπεια της ορμής) έχει γίνει με ακρίβεια 0.1%. Εφαρμόζοντας την αρχή της απροσδιοριστίας για τα δυο αντικείμενα καταλήγουμε ότι η αβεβαιότητα στην θέση για το μπαλάκι είναι περίπου $\Delta x \approx 1,16 \cdot 10^{-27}$ m. Πράγμα που σημαίνει ότι πρακτικά γνωρίζουμε με ακρίβεια την θέση του.

Από την άλλη για το ηλεκτρόνιο η αβεβαιότητα στη θέση είναι κατ' ελάχιστο $\Delta x \approx 0,38 \cdot 10^{-4}$ m. Αν αναλογιστεί κανείς ότι αν το ηλεκτρόνιο θεωρηθεί σφαίρα η ακτίνα του είναι της τάξης του 10^{-19} m, ενώ ακόμα και μια μέση ατομική ακτίνα είναι της τάξης του 10^{-12} m, το συμπέρασμα που καταλήγουμε είναι το εξής: *δεν έχουμε την παραμικρή ιδέα που βρίσκεται το ηλεκτρόνιο!*

3) Η αρχή απροσδιοριστίας θέτει και το τέλος στην ύπαρξη τροχιάς ενός σωματιδίου: αφού η τροχιά προϋποθέτει ταυτόχρονη γνώση θέσης και ταχύτητας ενώ κάτι τέτοιο είναι αδιανόητο υπό το πρίσμα της εν λόγω αρχής, δεν νοείται να μιλάμε για τροχιές σωματιδίων. Τα ερωτήματα που επιτρέπεται να θέτουμε για ένα κβαντικό σύστημα, πρέπει να σχετίζονται μόνο με μεγέθη που είναι παρατηρήσιμα.

4) Ίσως κανείς νομίζει, ότι η αρχή της απροσδιοριστίας είναι ένα εμπόδιο στην επιστημονική γνώση. Τουναντίον η αρχή αυτή είναι η βάση της σύγχρονης κβαντομηχανικής και ερμηνεύει τη συμπεριφορά των συστημάτων σε μικροσκοπικό επίπεδο, καθώς και τη σταθερότητα των ατόμων.

Ο Άλμπερτ Αϊνστάιν πίστευε ότι αυτή η κβαντική θεωρία θα μπορούσε να μας δώσει μόνο μια μερική περιγραφή της φύσης, αλλά πίστευε επίσης ότι δεν υπάρχει "αβεβαιότητα" στη φύση και ότι η αβεβαιότητα υπάρχει μόνο στη γνώση μας γι' αυτήν.



Η «διαμάχη» Einstein – Bohr. Η αντιπαράθεσή τους ήταν καθαρά σε επίπεδο ιδεών και οι δυο τους ήταν πολύ καλοί φίλοι. Οι υπέρμαχοι της αιτιοκρατίας αμφισβητούν τις θέσεις της «αρχής της αβεβαιότητας» και με εκπρόσωπο τον Αϊνστάιν θεωρούν πως η αβεβαιότητα του Χάιζενμπεργκ ήταν σημάδι ανικανότητας του ανθρώπου να συλλάβει ολοκληρωτικά τον φυσικό κόσμο, και όχι απόδειξη ότι ο ίδιος ο κόσμος χαρακτηριζόταν από κάτι ανεξιχνίαστο και απροσπέλαστο. Η απόλυτη έκφραση της διαφωνίας των αιτιοκρατών και του Αϊνστάιν είναι η περίφημη έκφραση «Ο θεός δεν παίζει ζάρια».

7.5.2 Λυμένα παραδείγματα

Παράδειγμα 1.

Η αβεβαιότητα Δx της θέσης ενός ηλεκτρονίου που κινείται με ταχύτητα πολύ μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός είναι $\Delta x = 10^{-3} \text{ m}$. Δίνονται η μάζα του ηλεκτρονίου $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ και η σταθερά του Planck $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$. Να υπολογιστούν:

- η ελάχιστη αβεβαιότητα Δp_x της ορμής,
- η ελάχιστη αβεβαιότητα Δv_x της ταχύτητας του ηλεκτρονίου,
- η ταχύτητα v_x του ηλεκτρονίου, αν γνωρίζουμε ότι η ελάχιστη αβεβαιότητα Δv_x της ταχύτητας είναι ίση με το 0,1% της ταχύτητας v_x .

Απάντηση:

α. Εφαρμόζοντας την αρχή της αβεβαιότητας, έχουμε: $\Delta p_x \Delta x \geq \frac{h}{2\pi} \Rightarrow \Delta p_x \geq \frac{h}{2\pi \Delta x}$

Επομένως, η ελάχιστη αβεβαιότητα για την ορμή του ηλεκτρονίου είναι:

$$\Delta p_{x,\min} = \frac{h}{2\pi \Delta x} \Rightarrow \Delta p_{x,\min} = 1,055 \cdot 10^{-31} \text{ kg}\cdot\text{m/s}$$

β. Επειδή γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα του ηλεκτρονίου είναι πολύ μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $p = mv$. Επομένως:

$$p_x = m_e v_x \Rightarrow \Delta p_x = m_e \Delta v_x \Rightarrow \Delta p_{x,\min} = m_e \Delta v_{x,\min} \Rightarrow \Delta v_{x,\min} = \frac{\Delta p_{x,\min}}{m_e} \Rightarrow \Delta v_{x,\min} = 0,12 \text{ m/s}.$$

γ. $\Delta v_{x,\min} = 0,1\% v_x \Rightarrow v_x = 1000 \Delta v_{x,\min} \Rightarrow v_x = 120 \text{ m/s}.$

Παράδειγμα 2

Ένα διεγερμένο άτομο εκπέμπει ένα φωτόνιο, καθώς το ηλεκτρόνιο μεταβαίνει από κατάσταση ενέργειας E_a στην σταθερή κατάσταση στην οποία έχει ενέργεια E_r . το φωτόνιο έχει συχνότητα που

υπολογίζεται από τη σχέση $f = \frac{E_a - E_r}{h}$. Παρατηρείται όμως κάποιο εύρος Δf στην συχνότητα των

εκπεμπόμενων φωτονίων που οφείλεται στο χρόνο αποδιέγερσης του ατόμου. Αν ο μέσος χρόνος ζωής των διεγερμένων καταστάσεων (μέσος χρόνος αποδιέγερσης) είναι $\tau = 10 \cdot 10^{-8} \text{ s}$, να υπολογιστεί το ελάχιστο εύρος Δf των συχνοτήτων.

Απάντηση:

Από την αρχή της αβεβαιότητας έχουμε

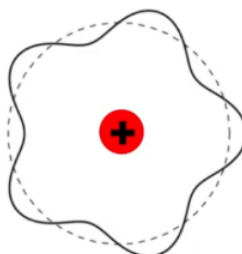
$$\Delta E \cdot \Delta \tau = \frac{h}{2\pi} \rightarrow h \Delta f \cdot \Delta \tau = \frac{h}{2\pi} \rightarrow \Delta f = \frac{1}{2\pi \cdot \Delta \tau}$$

$$\rightarrow \Delta f = 1,6 \cdot 10^7 \text{ Hz}$$

7.6 Κυματοσυνάρτηση και εξίσωση Schrodinger, (Σρέντινγκερ)

Στην προηγούμενη παράγραφο εξηγήθηκε γιατί ένα υποατομικό σωματίδιο, δε μπορεί να περιγραφεί σαν υλικό σημείο, με καθορισμένη θέση στο χώρο. Υπό ορισμένες συνθήκες συμπεριφέρεται σαν κύμα.

Για παράδειγμα, στην περίπτωση του ηλεκτρονίου σε ένα άτομο, αντί για την εικόνα της κλασικής φυσικής (σωματίδιο που περιφέρεται σε κυκλική τροχιά γύρω από τον πυρήνα) η περιγραφή με όρους κβαντομηχανικής θα ήταν αυτή ενός κυκλικού στάσιμου κύματος όπως φαίνεται στην διπλανή εικόνα. Ένα τέτοιο κύμα αποτελείται πάντα από ακεραία πολλαπλάσια μηκών κυμάτων κάτι που εξηγεί την κβάντωση των ενεργειακών του καταστάσεων.



Ο Έρβιν Σρέντινγκερ (Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger, 12 Αυγούστου 1887 – 4 Ιανουαρίου 1961)

Ήταν Αυστριακός φυσικός. Ασχολήθηκε με τη Στατιστική φυσική, τη Θερμοδυναμική, την Ηλεκτροδυναμική, την Κοσμολογία, τη Βιολογία, τη Φιλοσοφία, αλλά κυρίως με την Κβαντική φυσική, ανακαλύπτοντας την περίφημη κυματική εξίσωση που φέρει το όνομά του. Τιμήθηκε μαζί με τον Πολ Ντιράκ (Paul Dirac, 1902-1984) με το βραβείο Νόμπελ Φυσικής για τις εργασίες του πάνω στην ατομική θεωρία.

Για την περιγραφή του χρειαζόμαστε μία **κυματοσυνάρτηση** σε αναλογία με την εξίσωση κύματος που χρησιμοποιούμε για την περιγραφή ενός μηχανικού ή ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος. Ο Erwin Schrödinger το 1925 ανέπτυξε μια κυματοσυνάρτηση τέτοιας μορφής. Τη συνάρτηση αυτή τη συμβολίζουμε με Ψ . Η κυματοσυνάρτηση είναι μία συνάρτηση της θέσης και του χρόνου $\Psi = \Psi(x, y, z, t)$. Θα μπορούσε κάποιος να πει ότι η εξίσωση του Schrödinger για την κβαντομηχανική είναι όσο σημαντικός είναι ο δεύτερος νόμος του Newton για την κλασική φυσική.

Στα μηχανικά κύματα η εξίσωση κύματος μάς δίνει για κάθε χρονική στιγμή τη θέση κάθε σημείου του υλικού μέσου στο οποίο διαδίδεται το κύμα. Στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα οι εξισώσεις του κύματος μας δίνουν για κάθε χρονική στιγμή την τιμή της έντασης του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου σε κάθε σημείο του χώρου στον οποίο διαδίδεται το κύμα. Η κυματοσυνάρτηση Ψ όμως που περιγράφει ένα σωματίδιο-κύμα δεν σχετίζεται με κάποιο μέσον διάδοσης ούτε με κάποιες ιδιότητες του χώρου. Είναι δύσκολο να της αποδώσουμε κάποια φυσική σημασία. Μπορούμε μόνο να περιγράψουμε πώς σχετίζεται με τα φυσικά παρατηρούμενα φαινόμενα.

Για κάποιο συγκεκριμένο σημείο, ορισμένη χρονική στιγμή η κυματοσυνάρτηση θα έχει μια συγκεκριμένη τιμή. Ο Max Born πρότεινε να ερμηνεύσουμε το τετράγωνο του μέτρου της κυματοσυνάρτησης σαν την πιθανότητα θέσης ανά μονάδα όγκου (πυκνότητα πιθανότητας). Δηλαδή, αν

ορίσουμε έναν στοιχειώδη όγκο dV γύρω από ένα συγκεκριμένο σημείο (x, y, z) το γινόμενο $|\Psi|^2 \cdot dV$

δίνει την πιθανότητα να βρίσκεται το σωματίδιο μέσα στον όγκο dV στη δεδομένη χρονική στιγμή.

Αν χωρίσουμε το σύνολο του χώρου σε στοιχειώδεις όγκους dV και σε κάθε σημείο του χώρου βρούμε την τιμή της Ψ για κάποια χρονική στιγμή το άθροισμα των γινομένων πρέπει να είναι ίσο με τη μονάδα. Δηλαδή η πιθανότητα να βρίσκεται το σωματίδιο κάπου στο χώρο είναι ίση με τη μονάδα. Με απλά λόγια κάθε χρονική στιγμή το σωματίδιο σίγουρα βρίσκεται κάπου. Η παραπάνω σχέση προκύπτει από την

διάσταση που έδωσε ο Born στο και ονομάζεται **συνθήκη κανονικοποίησης**. Εάν η κυματοσυνάρτηση είναι σωστή πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη κανονικοποίησης.

Μπορούμε λοιπόν να συμπεράνουμε ότι με την κυματοσυνάρτηση δεν μπορούμε υπολογίσουμε που βρίσκεται το σωματίδιο αλλά την *πιθανότητα που έχει* να βρίσκεται στα διάφορα σημεία του χώρου. Τα υλικά κύματα είναι κύματα πιθανότητας και η κυματοσυνάρτηση Ψ , που τα περιγράφει, συνδέεται με την πιθανότητα να βρεθεί το σωματίο σε κάποια περιοχή του χώρου.

Βιβλιογραφία

1. Κβαντομηχανική 1. Στέφανος Τραχανάς. Θεμελιώδεις αρχές – Απλά συστήματα – Δομή της ύλης. Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, 2011.
2. Halliday – Resnick , Πανεπιστημιακή φυσική, Τεύχος II, έκδοση Γ.Α. Πνευματικό ελληνική έκδοση μετάφραση από τους Γ. Πνευματικό και Γ. Πεπονίδη
3. Hugh D. Young, (1994) «University Physics(8rd Edition)», Addison-Wesley Co. ελληνική έκδοση
4. Thinking Physics Practical Lessons in Critical Thinking- Lewis C. Epstein, second edition
5. Φυσική Θετικής & Τεχνολογικής Κατεύθυνσης, σχολικό βιβλίο Γ' τάξης Γενικού Λυκείου, Β' τεύχος. Συγγραφείς: Αλέκος Ιωάννου, Γιάννης Ντάνος, Άγγελος Πήττας, Σταύρος Ράπτης
<http://ebooks.edu.gr/ebooks/v2/books-pdf.jsp?handle=8547/2357>
6. Φυσική Θετικής & Τεχνολογικής Κατεύθυνσης, σχολικό βιβλίο Γ' τάξης Γενικού Λυκείου, Γ' τεύχος. Συγγραφείς: Αλέκος Ιωάννου, Γιάννης Ντάνος, Άγγελος Πήττας, Σταύρος Ράπτης
http://ebooks.edu.gr/ebooks/v/html/8547/2728/Fysiki-G-Lykeiou-ThSp_html-apli/index.html
7. Φυσική Θετικής & Τεχνολογικής Κατεύθυνσης, σχολικό βιβλίο Γ' τάξης Γενικού Λυκείου, ομάδας Δρυ. Ανδρακάκος Κων/νος, Βελέντζας Αθανάσιος, Γάτσιος Ιωάννης, Διαμαντής Νικόλαος, Δρης Εμμανουήλ, Κρίκος Κων/νος, Πιερράκος Νικόλαος βελτιωμένη έκδοση 2008, 1^η έκδοση 2000
http://www.physics.ntua.gr/~dris/fysikh_lykeiou.html
8. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου, Ειδικευση Β, τόμος 2., σχολικό βιβλίο Κύπρου. Συγγραφείς: Χρίστος Κρασιάς, Ανδρέας Παπαστυλιανού, Κυριακή Σαββίδου
9. Φυσική Γ' Λυκείου,(Σ2), τόμος 2., σχολικό βιβλίο Κύπρου. Συγγραφείς: Γιώργος Χατζηκωνσταντίνου Β.Δ, Τρύφων Στράτης Β.Δ, Λευκωσία 1998
10. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου, Ειδικευση Α, τόμος 2., σχολικό βιβλίο Κύπρου. Συγγραφείς: Στέλιος Βασιλειάδης, Πανίκος Δωρίτης, Λευκωσία 2004
11. Φυσική Γ' Λυκείου, Κύματα - Στοιχεία Κβαντομηχανικής Γ. Μαθιουδάκης και Γ. Παναγιωτόπουλος, εκδόσεις Σαββάλας
12. Φυσική Κβαντομηχανική Γ' Λυκείου, Α. Κεχαγιάς, Σ. Τσώνης, εκδόσεις Ροπή.
13. Φυσική Γ' Λυκείου - Κύματα & Στοιχεία Κβαντομηχανικής, Παπαθεοδώρου, Εκδόσεις Πατάκη
14. Φυσική Γ' Λυκείου, Στοιχεία Κβαντομηχανικής, Σωτήρης Χρονόπουλος, εκδόσεις Χρονόπουλος.
15. Φυσική Γ' Λυκείου, Εισαγωγή στην Κβαντομηχανική-Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα, Νίκος Κοσμόπουλος, εκδόσεις Κόσμος.
16. Ιστοσελίδα <https://mathesis.cup.gr/> Χρησιμοποιήθηκε μεγάλο υλικό θεωρίας.

-
17. Ιστοσελίδα www.ylikonet.gr. Χρησιμοποιήθηκε μεγάλο πλήθος ασκήσεων και υλικό θεωρίας
18. Ιστοσελίδα <https://physicsgg.me/>
19. Σημειώσεις καθηγητού, Π. Κουνάβη.
<http://www.des.upatras.gr/physics/kounavis/Lectures/Sem1/%CE%9A%CE%B5%CF%86%CE%AC%CE%BB%CE%B1%CE%B9%CE%BF5%CE%A3.pdf>
20. Ιστοσελίδα Υπουργείου Ψηφιακών Εκπαιδευτικών Βοηθημάτων, study4exams, <http://www.study4exams.gr/>. Χρησιμοποιήθηκε μεγάλο πλήθος ασκήσεων
21. Ιστοσελίδα <https://www.wikipedia.org/>
22. Σημειώσεις Κβαντομηχανικής, Π. Μουρούζης.
https://ekfe.ker.sch.gr/docs/83_introduction_to_quantum_theory.pdf
23. Στοιχεία κβαντομηχανικής, Σημειώσεις. Α. Παπάζογλου.
<https://ylikonet.gr/2022/12/20/%cf%83%cf%84%ce%bf%ce%b9%cf%87%ce%b5%ce%af%ce%b1-%ce%ba%ce%b2%ce%b1%ce%bd%cf%84%ce%bf%ce%bc%ce%b7%cf%87%ce%b1%ce%bd%ce%b9%ce%ba%ce%ae%cf%82-2/>
24. Σημειώσεις Κβαντομηχανικής, Μ. Μιχαήλ.
https://drive.google.com/file/d/1Rn2vOnAGN_VIajqQwqZ0POQRE1Rvlo1k/view
25. Ιστοσελίδα <http://www.physics4u.gr/articles/quantum100.html>
26. Ιστοσελίδα <https://www.hellenicaworld.com/>
27. Ιστοσελίδα http://esperia.iesl.forth.gr/~kafesaki/Modern-Physics/lectures/modern_physics2.html
28. Ιστοσελίδα https://www.ted.com/talks/chad_orzel_what_is_the_heisenberg_uncertainty_principle?language=el
Τι είναι η Αρχή της Αβεβαιότητας του Χάιζενμπεργκ; - Τσαντ Όρζελ.
29. Ιστοσελίδα <https://www.youtube.com/watch?v=ZaXm6wau-jc&t=8s>
Λειτουργία κεραίας