

SB2 Λυμένα Β Θέματα στη Συμβολή

SB2.1 Δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων παράγουν πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια του νερού κύματα που διαδίδονται με μήκος κύματος $\lambda=0,02\text{m}$. Σημεία Α, Β, Γ απέχουν από τις πηγές αποστάσεις, το Α, $r_1=8\text{cm}$ και $r_2=2,5\text{cm}$, το Β, $r_1=15\text{cm}$ και $r_2=5\text{cm}$ και το Γ, $r_1=20\text{cm}$ και $r_2=9\text{cm}$. Το σημείο που παραμένει ακίνητο είναι το:

α. Α

β. Β

γ. Γ

Απάντηση : (γ)

Το μήκος κύματος είναι $\lambda=0,02\text{m}=2\text{cm}$

Στα ακίνητα σημεία πρέπει η διαφορά των αποστάσεων από τις πηγές να είναι:

$$|r_1-r_2|=(2k+1)\frac{\lambda}{2}=(2k+1)\text{ cm, δηλαδή περιττός αριθμός, (όπου }k=0,1,2,3\ldots)$$

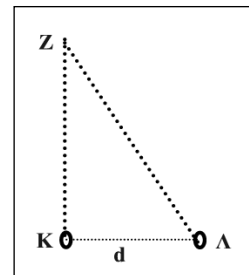
Στο Α η διαφορά είναι $r_1-r_2=5,5\text{cm}$

Στο Β η διαφορά είναι: $r_1-r_2=10\text{cm}$

Στο Γ η διαφορά είναι $r_1-r_2=11\text{cm}$

Άρα ακίνητο είναι το σημείο Γ. Άρα το σωστό είναι το (γ).

SB2.2 Στα σημεία Κ και Λ βρίσκονται δυο σημειακές πηγές αρμονικών κυμάτων που ταλαντώνονται με εξισώσεις $y_1=y_2=A\eta\mu\omega t$ και παράγουν κύματα που διαδίδονται στο ίδιο μέσο με ταχύτητα $v=320\text{m/s}$ και οι συχνότητές τους μπορούν να κυμαίνονται από 300Hz έως 500Hz. Οι πηγές απέχουν απόσταση $d=6\text{m}$. Σημείο Ζ του μέσου απέχει από την πηγή Κ απόσταση $KZ=8\text{m}$. Για ποιες τιμές της συχνότητας f έχουμε στο σημείο Ζ, αποσβετική συμβολή.

α. $f=320\text{Hz}$,β. $f=480\text{Hz}$ γ. $f=400\text{Hz}$

Απάντηση: (γ)

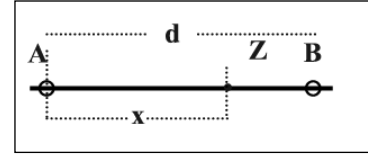
Για αρχή: Από το Πυθαγόρειο: $(Z\Lambda)=\sqrt{(ZK)^2+(K\Lambda)^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10\text{m} \rightarrow r_1=10\text{m}$ και $r_2=(KZ)=8\text{m}$

Για την ακυρωτική συμβολή ισχύει:

$$r_1-r_2=(2k+1)\frac{\lambda}{2} \rightarrow 2=(2k+1)\frac{\lambda}{2} \rightarrow 4=(2k+1)\frac{v}{f} \rightarrow f=\frac{v(2k+1)}{4} \rightarrow f=80(2k+1)$$

Η συχνότητα f παίρνει τιμές από 300Hz έως 500Hz συνεπώς θέτουμε στην εξίσωση (3) $k=2$ και έχουμε **$f=400\text{Hz}$** .

SB2.3 Δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων βρίσκονται στα σημεία A και B μιας ευθείας $x'x$ πάνω στην επιφάνεια υγρού και εκπέμπουν κύματα με μήκος κύματος $\lambda=2\text{m}$. Η απόσταση των δύο πηγών είναι $AB=d=6,2\text{m}$. Οι απομακρύνσεις των πηγών από τη θέση ισορροπίας τους δίνονται από τη σχέση $y=A\eta\mu\omega t$.



I. Το πλήθος των σημείων του ευθυγράμμου τμήματος AB που ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος είναι:

α. 8 σημεία

β. 7 σημεία

γ. 9 σημεία

II. Το πλήθος των σημείων του ευθυγράμμου τμήματος AB που παραμένουν ακίνητα, είναι:

α. 8 σημεία

β. 7 σημεία

γ. 6 σημεία

Απάντηση: (β),(γ)

I. Έστω Z ένα τέτοιο σημείο του AB που απέχει απόσταση $x_1=x$ από την πηγή, A και $x_2=d-x$ από την πηγή B. Αφού στο Z έχουμε ενισχυτική συμβολή ($A'=2A$) πρέπει να ισχύει: $x_1-x_2=k\lambda \rightarrow$

$$(ZA)-(ZB)=k\lambda \rightarrow x-(d-x)=k\lambda \rightarrow 2x-d=k\lambda \rightarrow x=\frac{k\lambda+d}{2} \rightarrow x=\frac{2k+6,2}{2} \rightarrow x=(k+3,1)\text{ m} \quad (1)$$

Η σχέση (1) δίνει την τιμή της απόσταση x , από την πηγή A, του κάθε σημείου ενισχυτικής συμβολής του τμήματος AB. Η τιμή του x κυμαίνεται από 0 έως $d=6,2\text{m}$ που είναι και το μήκος του τμήματος AB. Άρα

$$0 \leq x \leq 6,2\text{m} \rightarrow 0 \leq (k+3,1)\text{m} \leq 6,2\text{m} \rightarrow -3,1 \leq k \leq 3,1 \rightarrow \text{Άρα το } k \text{ παίρνει τιμές } k=-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3.$$

Άρα υπάρχουν 7 σημεία πάνω στο τμήμα AB στα οποία συμβαίνει ενισχυτική συμβολή.

II. Έστω P ένα τέτοιο σημείο του AB που απέχει απόσταση $y_1=y$ από την πηγή, A και $y_2=d-y$ από την πηγή B. Αφού στο P έχουμε αποσβετική συμβολή ($A'=0$) πρέπει να ισχύει:

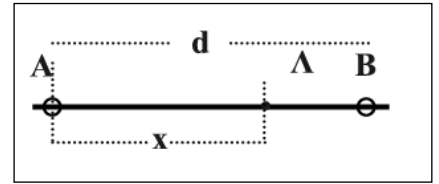
$$y_1-y_2=\frac{(2k+1)\lambda}{2} \rightarrow y-(d-y)=\frac{(2k+1)\lambda}{2} \rightarrow 2y=d+\frac{(2k+1)\lambda}{2} \rightarrow y=\frac{d}{2}+\frac{(2k+1)\lambda}{4} \rightarrow y=3,1+(2k+1)0,5\text{m} \rightarrow y=(3,6+k)\text{m} \quad (2)$$

Η σχέση (2) δίνει την τιμή της απόσταση y , από την πηγή A, του κάθε ακίνητου σημείου δηλαδή της αποσβετικής συμβολής του τμήματος AB. Η τιμή του y κυμαίνεται από 0 έως $d=6,2\text{m}$ που είναι και το μήκος του τμήματος AB. Άρα

$$0 \leq y \leq 6,2\text{m} \rightarrow 0 \leq (k+3,6)\text{m} \leq 6,2\text{m} \rightarrow -3,6 \leq k \leq 2,6 \rightarrow \text{Άρα το } k \text{ παίρνει τιμές } k=-3, -2, -1, 0, +1, +2.$$

Άρα υπάρχουν 6 σημεία πάνω στο τμήμα AB στα οποία συμβαίνει αποσβετική συμβολή.

SB2.3 Δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων βρίσκονται στα σημεία A και B μιας ευθείας x'x πάνω στην επιφάνεια υγρού ταλαντώνονται με συχνότητα, f. Η απόσταση των δύο πηγών είναι $d=2\lambda_1$. Μεταξύ των σημείων A και B δημιουργούνται γραμμές ενισχυτικής και αποσβετικής συμβολής.



I. Το πλήθος των γραμμών ενισχυτικής συμβολής που εμφανίζονται μεταξύ των A και B (χωρίς τα A και B) είναι, N. Αν διπλασιαστεί η συχνότητα ταλάντωσης των πηγών, τότε το πλήθος των γραμμών, N' θα γίνει:

- α. $N'=N$. β. $N'=2N$ γ. $N'=2N+1$

II. Δύο διαδοχικά σημεία ενισχυτικής ή δύο διαδοχικά σημεία ακυρωτικής συμβολής πάνω στο AB απέχουν μεταξύ τους απόσταση

- α. $\lambda/2$ β. $\lambda/6$ γ. $\lambda/4$

Απάντηση: (γ),(α)

I. Έστω Λ ένα σημείο ενισχυτικής συμβολής πάνω στο τμήμα AB που απέχει απόσταση $(\Lambda)=x_1=x$ από την πηγή, A και $B\Lambda=x_2=d-x$ από την πηγή B. Ισχύει:

$$x_1-x_2=k\lambda_1 \rightarrow (A\Lambda)-(B\Lambda)=k\lambda_1 \rightarrow x-(d-x)=k\lambda_1 \rightarrow 2x-d=k\lambda_1 \rightarrow 2x=d+k\lambda_1 \rightarrow x=\frac{d+k\lambda_1}{2}$$

$$0 < x < d \rightarrow 0 < \frac{d+k\lambda_1}{2} < d \rightarrow 0 < d+k\lambda_1 < 2d \rightarrow -d < k\lambda_1 < d \rightarrow \frac{-d}{\lambda_1} < k < \frac{d}{\lambda_1} \rightarrow -2 < k < +2,$$

Το πλήθος των ακέραιων τιμών του k δίνει και τον αριθμό των γραμμών ενισχυτικής συμβολής που τέμνουν την ευθεία x'x' ανάμεσα από τα A και B, χωρίς τα A και B. Αυτές οι τιμές του k είναι $k=-1,0,1$. Οι τιμές $k=-2$ και $k=2$ δίνουν $x=0$ και $x=2\lambda_1=d$ δηλαδή τα σημεία A και B που είναι οι πηγές και εξαιρούνται σύμφωνα με την εκφώνηση. **Συνεπώς το $N=3$.**

Έστω ότι η συχνότητα διπλασιάζεται. Επειδή $\lambda_1=v/f$ και η ταχύτητα v μένει σταθερή, θα υποδιπλασιαστεί το μήκος κύματος, δηλαδή $\lambda_2=v/2f=\lambda_1/2$ και η οι τιμές του k θα κυμαίνονται τώρα μεταξύ των τιμών:

$$\frac{-d}{\lambda_2} < k < \frac{d}{\lambda_2} \rightarrow \frac{-2d}{\lambda_1} < k < \frac{2d}{\lambda_1} \rightarrow -4 < k < 4,$$

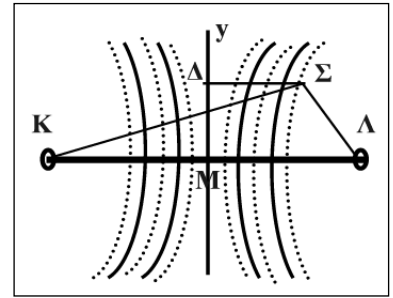
Το k παίρνει τώρα τις τιμές $k=-3,-2,-1,0,1,2,3$. Συνεπώς το πλήθος των γραμμών ενισχυτικής συμβολής **αυξάνεται** και γίνεται $N'=7 \rightarrow N'=2N+1$.

II. Η σχέση που δίνει τις αποστάσεις x των σημείων ενισχυτικής συμβολής από το A είναι η $x=\frac{d+k\lambda}{2}$. Για $k=N$ η απόσταση είναι $x_N=\frac{d+N\lambda}{2}$ και για $k=N+1$ είναι $x_{N+1}=\frac{d+(N+1)\lambda}{2}$

$$\text{Η μεταξύ τους απόσταση είναι } \Delta x=x_{N+1}-x_N=\frac{d+(N+1)\lambda}{2}-\frac{d+N\lambda}{2} \rightarrow \Delta x=\lambda/2.$$

Το ίδιο συμβαίνει και με την απόσταση 2 διαδοχικών ακίνητων σημείων, είναι $\lambda/2$

SB2.4 Δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων Π_1, Π_2 δημιουργούν όμοια αρμονικά κύματα στην επιφάνεια υγρού. Έστω ένα σημείο Σ που είναι μόνιμα ακίνητο. Το (Σ) απέχει από τις πηγές αποστάσεις $r_1=12\text{m}$ και $r_2=5\text{m}$, Φέρουμε από το Σ την κάθετο $\Sigma\Delta$ προς τη μεσοκάθετο, γ , του τμήματος $ΚΛ$ και διαπιστώνουμε ότι μεταξύ του Σ και της μεσοκαθέτου, υπάρχουν δύο σημεία που ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος και δύο μονίμως ακίνητα. Το μήκος κύματος των κυμάτων είναι:



α. $\lambda=2,4\text{m}$

β. $\lambda=2,2\text{m}$

γ. $\lambda=2,8\text{m}$

Απάντηση: (γ)

Για το σημείο Σ που βρίσκεται σε γραμμή αποσβετικής συμβολής ισχύει:

$$r_1 - r_2 = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \text{ με } k=0,1,2,3... \quad \text{με } r_1=(\Sigma K)=12\text{m} \text{ και } r_2=(\Sigma \Lambda)=5\text{m}.$$

Αφού όμως ανάμεσα από το Σ και τη μεσοκάθετο, γ , υπάρχουν δύο γραμμές αποσβετικής συμβολής αυτό σημαίνει ότι η υπερβολή στην οποία βρίσκεται το Σ είναι η τρίτη υπερβολή αποσβετικής συμβολής και το $k=2$. ($k=0,1,2$) Άρα:

$$r_1 - r_2 = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \rightarrow 12\text{m} - 5\text{m} = (2 \cdot 2 + 1)\frac{\lambda}{2} \rightarrow \lambda = \frac{14}{5}\text{m} \rightarrow \lambda = 2,8\text{m}.$$

SB2.5 Δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων K και Λ ταλαντώνονται σύμφωνα με την εξίσωση απομάκρυνσης $y=A\sin 200\pi t$, (SI) και απέχουν μεταξύ τους απόσταση $ΚΛ=20\text{cm}$. Ανάμεσα στα K και Λ και πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $ΚΛ$ παρουσιάζονται σημεία που παραμένουν συνεχώς ακίνητα. Το τρίτο τέτοιο ακίνητο σημείο Z μετά το μέσο της $ΚΛ$ και προς τη μεριά του Λ απέχει από το K , $(KZ)=12,5\text{cm}$.

I. Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων είναι: α. 5m/s β. 10m/s γ. 2m/s

II. Το πλήθος των ακίνητων σημείων του $ΚΛ$ είναι: α. 18 β. 20 γ. 22

Απάντηση: (γ), (β)

I. Αφού το Z είναι ακίνητο ισχύει $x_1 - x_2 = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$

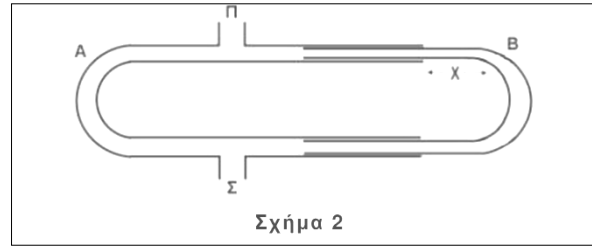
με $x_1=KZ=12,5\text{cm}$ και $x_2=\Lambda Z=20\text{cm}-12,5\text{cm}=7,5\text{cm}$. Αφού είναι το 3^ο μετά τη μεσοκάθετο προς τη μεριά του Λ η τιμή του k είναι $k=2$.

$$\text{Άρα: } 12,5\text{cm} - 7,5\text{cm} = 5\frac{\lambda}{2} \rightarrow \lambda = 2\text{cm}$$

Η συχνότητα είναι: $f = \frac{\omega}{2\pi} \rightarrow f = 100\text{Hz}$. Άρα η ταχύτητα είναι $v = \lambda \cdot f = 0,02 \cdot 100\text{m/s} \rightarrow v = 2\text{m/s}$

II. Δύο διαδοχικά ακίνητα σημεία απέχουν μεταξύ τους $\lambda/2 = 1\text{cm}$. Άρα σε κάθε μισό τμήμα του $ΚΛ$ που είναι 10cm θα εμπεριέχονται 10 σημεία. Το μέσον είναι πάντοτε μεγίστου πλάτους με συμφασικές πηγές. Συνεπώς τα ακίνητα σημεία είναι συνολικά **20**.

► **SB2.6** Η διάταξη του σχήματος 2 αποτελείται από δύο σωλήνες Α και Β. Ο σωλήνας Β μπορεί να μετακινείται. Με τον τρόπο αυτό μεταβάλλεται το μήκος x . Μια πηγή δημιουργεί ηχητικά κύματα μήκους κύματος λ , στο ανοικτό άκρο Π του σωλήνα. Στο άλλο άκρο Σ του σωλήνα φτάνουν ταυτόχρονα δύο ηχητικά κύματα. Τα κύματα δημιουργούνται από την πηγή και διαδίδονται μέσω του αέρα στους σωλήνες Α και Β. Όταν μετακινούμε το σωλήνα Β (μεταβάλλοντας την απόσταση x) παρατηρούμε ότι η ένταση του ήχου στο σημείο Σ αυξομειώνεται. Για $x=x_1$ στο σημείο Σ τα δύο ηχητικά κύματα συμβάλλουν ενισχυτικά. Καθώς αυξάνουμε το x , στο σημείο Σ παρατηρείται για πρώτη φορά αποσβεστική συμβολή, όταν γίνει $x=x_2=x_1+4\text{cm}$. Για το μήκος κύματος λ ισχύει:



α. $\lambda=12\text{cm}$

β. $\lambda=16\text{cm}$

γ. $\lambda=4\text{cm}$

(θέμα Πανελληνίων)

Απάντηση: (β)

Ονομάζω τη διαδρομή $(\Pi\Lambda\Sigma)=r_1$, την $(\Pi\text{B}\Sigma)=r_2$ και την $(\Pi\text{B}'\Sigma)=r_2'$ στην μετακίνηση του Β. Όταν είναι $x=x_1$ ενισχυτική: $(\Pi\text{B}\Sigma)-(\Pi\Lambda\Sigma)=k\lambda \rightarrow r_2-r_1=k\lambda$ (1)

Όταν είναι $x=x_2$ ακυρωτική: $(\Pi\text{B}'\Sigma)-(\Pi\Lambda\Sigma)=(2k+1)\frac{\lambda}{2} \rightarrow r_2'-r_1=k\lambda+\lambda/2$ (2)

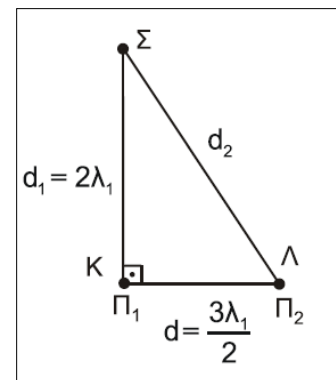
Βάζω ίδιο k διότι είναι η αμέσως επόμενη ακυρωτική συμβολή.

Σύμφωνα με τα δεδομένα: η διαφορά των διαδρομών $r_2-r_1=2x_1$ και η $r_2'-r_1=2x_2=2(x_1+4)=2x_1+8$

Αρα οι (1)(2) γίνονται: $2x_1=k\lambda$ (3) και $2x_1+8=k\lambda+\lambda/2$ (4)

Από (3)(4) $\rightarrow \lambda/2=8 \rightarrow \lambda=16\text{cm}$

• **SB2.7** Στην ελεύθερη επιφάνεια νερού που ηρεμεί, στις θέσεις Κ και Λ βρίσκονται δύο όμοιες και σύγχρονες κυματικές πηγές απλών αρμονικών κυμάτων Π_1 και Π_2 , που απέχουν μεταξύ τους απόσταση $d=3\lambda_1/2$. Οι πηγές ταλαντώνονται χωρίς αρχική φάση, με συχνότητα f_1 , πλάτος ταλάντωσης Α και παράγουν κύματα μήκους κύματος λ_1 , που διαδίδονται στην επιφάνεια του νερού με σταθερή ταχύτητα v . Ένα σημείο Σ της επιφάνειας του νερού απέχει από την πηγή Π_1 απόσταση d_1 και από την πηγή Π_2 απόσταση d_2 , όπως στο σχήμα. Το ευθύγραμμο τμήμα ΣΚ είναι κάθετο στο ΚΛ. Διπλασιάζουμε τη συχνότητα ταλάντωσης των δύο πηγών διατηρώντας σταθερό το πλάτος Α της ταλάντωσης τους. Το Σ μετά τον διπλασιασμό της συχνότητας ταλάντωσης των πηγών θα είναι:



α. σημείο ενίσχυσης β. σημείο απόσβεσης γ. σημείο που ταλαντώνεται με πλάτος Α.

(θέμα πανελληνίων)

Απάντηση: (α)

Βρίσκω το $d_2=\sqrt{d^2+d_1^2}=\sqrt{25\lambda_1^2/4}=5\lambda_1/2$. Άρα αρχικά στο Σ έχουμε: $d_2-d_1=5\lambda_1/2-2\lambda_1=\lambda_1/2$ (1)

Άρα η διαφορά είναι της μορφής: $d_2-d_1=(2k+1)\frac{\lambda_1}{2}$ με $k=1$ οπότε η συμβολή στο Σ είναι αρχικά ακυρωτική.

Όταν η συχνότητα διπλασιαστεί το μήκος κύματος θα υποδιπλασιαστεί δηλαδή θα γίνει $\lambda_2=\lambda_1/2$.

Από την σχέση (1) $\rightarrow d_2-d_1=\lambda_1/2=\lambda_2 \rightarrow d_2-d_1=\lambda_2=1\cdot\lambda_2$.

Δηλαδή με το νέο μήκος κύματος λ_2 παρατηρώ ότι η διαφορά των αποστάσεων γίνεται ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος συνεπώς η συμβολή τώρα στο σημείο Σ είναι ενισχυτική.

ΣΓ2 Λυμένα Γ Θέματα στη Συμβολή

ΣΓ2.1 Δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων Κ και Λ ταλαντώνονται με εξίσωση απομάκρυνσης $y=0,05\mu 10\pi t$ (SI). Θεωρούμε ως $t_0=0$ τη στιγμή που οι πηγές αρχίζουν να ταλαντώνονται. Οι δύο πηγές απέχουν μεταξύ τους απόσταση $d=KL=0,4m$ και τα κύματα που παράγουν διαδίδονται στην ελεύθερη επιφάνεια υγρού και διανύουν απόσταση $\Delta x=0,1m$ στη διάρκεια μιας ταλάντωσης της πηγής. Σε σημείο Ζ της επιφάνειας του υγρού που απέχει από τα Κ και Λ αποστάσεις r_1, r_2 με $r_1 > r_2$ τα κύματα φτάνουν με διαφορά φάσης $\Delta\phi=7\pi$ rad.

A. Να βρείτε το μήκος κύματος του κάθε κύματος.

B. Να εξετάσετε αν η συμβολή των κυμάτων στο Ζ είναι ενισχυτική ή ακυρωτική.

Γ. Να υπολογιστεί η χρονική στιγμή που το μέσον Μ του τμήματος ΚΛ φτάνει για πρώτη φορά στη θέση απομάκρυνσης $y=+0,1m$.

Δ. Να βρείτε τον αριθμό των σημείων του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ, που βρίσκονται μεταξύ των Κ και Λ (χωρίς τα Κ, Λ) και ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος.

Λύση

A. Από τα δεδομένα: $A=0,05m, \omega=10\pi rad/s \rightarrow T=2\pi/\omega \rightarrow T=0,2s$. Άρα $f=1/T=5Hz$.

Η ταχύτητα διάδοσης είναι $v=\frac{\Delta x}{T} \rightarrow v=0,5m/s$.

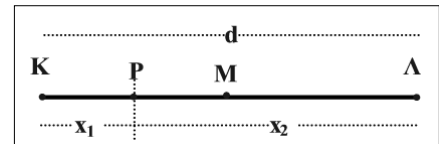
Άρα $v=\lambda \cdot f \rightarrow \lambda=0,1m$.

B. Βρίσκω το πλάτος στο σημείο Ζ. Από τη $\Delta\phi=7\pi rad$ έχουμε:

$\phi_1=2\pi(t/T-x_1/\lambda)$ και $\phi_2=2\pi(t/T-x_2/\lambda)$. Άρα $\Delta\phi=\phi_1-\phi_2=7\pi rad \rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}(x_1-x_2)=7\pi \rightarrow x_1-x_2=0,35m$.

Δηλαδή $x_1-x_2=3,5\lambda$, περιττό πολλαπλάσιο του $\lambda/2$, άρα στο Ζ έχουμε ακυρωτική συμβολή.

Γ. Το Μ είναι το μέσον της ΚΛ και τα δύο κύματα φτάνουν σε αυτό την ίδια χρονική στιγμή $t_1=\frac{d}{2v}=0,4s$, αφού το καθένα διανύσει την απόσταση $\frac{1}{2}d$. Το σημείο Μ θα φτάσει στη μέγιστη θετική απομάκρυνση σε χρόνο, $T/4=0,05s$ μετά από την αρχή των ταλαντώσεών του. Άρα $t=t_1+T/4 \rightarrow t=0,45s$.

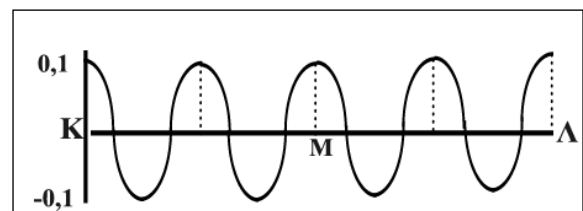


Δ. Έστω Ρ σημείο της ΚΛ που ταλαντώνεται με μέγιστο πλάτος. Τότε:

$$x_2-x_1=k\lambda \rightarrow d-2x_1=k\lambda \rightarrow x_1=\frac{d-k\lambda}{2} \rightarrow x_1=\frac{0,4-0,1k}{2} \text{ με } 0 < x_1 < d \rightarrow 0 < \frac{0,4-0,1k}{2} < 0,4 \rightarrow 0 < 0,4-0,1k < 0,8 \rightarrow \dots$$

$-4 < k < 4$. Άρα είναι 7 σημεία και οι αποστάσεις τους από την πηγή Κ προκύπτουν από τη σχέση $x_1=\frac{0,4-0,1k}{2}$ για τιμές $k=-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

Στο στιγμιότυπο του σχήματος μπορούμε να δούμε τα 7 σημεία μέγιστου πλάτους μεταξύ των Κ και Λ.



ΣΓ2.2 Δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων Π_1, Π_2 βρίσκονται στα σημεία Κ και Λ της επιφάνειας του υγρού και απέχουν απόσταση $d=6\text{m}$. Οι πηγές κάνουν ΑΑΤ με εξίσωση $y=0,2\eta\mu\omega t$ (SI) και δημιουργούν κύματα με μήκος κύματος $\lambda=1\text{m}$ τα οποία διαδίδονται στην επιφάνεια του υγρού. Σημείο Ζ της επιφάνειας που απέχει r_1 από το Κ και r_2 από το Λ με $r_2>r_1$ ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t_1=1,75\text{s}$ και αφού κάνει 2,5 ταλαντώσεις σταματάει. Τη στιγμή που το Ζ ακινητοποιείται το κύμα από τη πηγή Π_2 φτάνει στην πηγή Π_1 .

Α. Να βρείτε τις αποστάσεις r_1, r_2 .

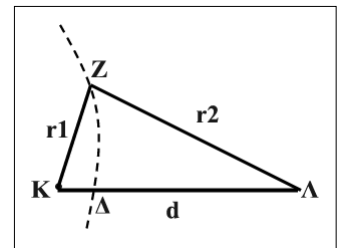
Β. Να βρείτε τον αριθμό των σημείων του τμήματος ΚΖ τα οποία τη χρονική στιγμή t_1 βρίσκονται σε ακραία θέση ταλάντωσης αν υποτεθεί ότι τα σημεία αυτά ταλαντώνονται μόνο εξ αιτίας του κύματος που προέρχεται από την πηγή Π_1 .

Γ. Να γράψετε την εξίσωση ταλάντωσης του Ζ από τη στιγμή που άρχισε να ταλαντώνεται μέχρι τη στιγμή που ακινητοποιήθηκε.

Δ. Να βρείτε τον αριθμό και τη θέση των σημείων ακυρωτικής συμβολής μεταξύ των Κ και Ζ και πάνω στο τμήμα ΚΖ (χωρίς τα Κ και Ζ).

Λύση

Α. Το σημείο Ζ αρχίζει να ταλαντώνεται όταν το κύμα από την πλησιέστερη πηγή Κ φτάνει σε αυτό, δηλαδή σε χρόνο $t_1=1,75\text{s}$. Άρα η απόσταση r_1 είναι $r_1=vt_1$. Το Ζ σταματάει να ταλαντώνεται όταν και το 2^ο κύμα από την πηγή Λ φτάνει σε αυτό, συμβάλλει και δίνει ακυρωτική συμβολή. Σύμφωνα με τα δεδομένα το κύμα από την πηγή Λ κάνει τον ίδιο χρόνο για να φτάσει στο Ζ και στην άλλη πηγή Κ. Άρα οι αποστάσεις αυτές είναι ίσες, οπότε: **$r_2=d=6\text{m}$.**



Ο χρόνος για να διανύσει το κύμα την απόσταση r_2 είναι $t_2=t_1+2,5T$. Άρα:

$$r_2=vt_2 \rightarrow r_2=v(t_1+2,5T) \rightarrow r_2=vt_1+2,5vT \rightarrow r_2=vt_1+2,5\lambda \rightarrow r_2=r_1+2,5\lambda \rightarrow r_1=r_2-2,5\lambda \rightarrow r_1=6\text{m}-2,5\text{m} \rightarrow r_1=3,5\text{m}.$$

Β. Η απόσταση $KZ=r_1=3,5\text{m}$ και το $\lambda=1\text{m}$. Άρα στην απόσταση ΚΖ χωράνε 3,5 μήκη κύματος. Το κάθε μήκος κύματος έχει δύο σημεία με μέγιστο πλάτος, ένα θετικό και ένα αρνητικό οπότε στα 3,5 μήκη κύματος θα υπάρχουν συνολικά **7 σημεία μέγιστου πλάτους**.

Γ. Από τη στιγμή που άρχισε να ταλαντώνεται (t_1) μέχρι να σταματήσει, το Ζ κάνει απλή αρμονική ταλάντωση λόγω του κύματος που προέρχεται από την πηγή, Κ. Η εξίσωση είναι $y=A\eta\mu(2\pi t/T-2\pi r_1/\lambda)$. Το πλάτος είναι: $A=0,2\text{m}$.

Η ταχύτητα διάδοσης είναι: $r_1=vt_1 \rightarrow v=3,5\text{m}/1,75\text{s} \rightarrow v=2\text{m/s}$.

Από την εξίσωση: $v=\lambda f=\lambda/T \rightarrow T=\lambda/v \rightarrow T=0,5\text{s}$.

Ο χρόνος: $t_2=t_1+2,5T=1,75\text{s}+2,5\cdot 0,5\text{s} \rightarrow t_2=3\text{s}$. Άρα

$y_Z=0,2\eta\mu(4\pi t-7\pi)$ (SI) στο χρονικό διάστημα $1,75\text{s} \leq t < 3\text{s}$.

Δ. Το Ζ είναι πάνω σε κροσσό ακυρωτικής συμβολής. Το αντίστοιχο σημείο του ίδιου κροσσού πάνω στο τμήμα ΚΛ είναι έστω το Δ. Πρέπει και για το Δ να ισχύει

$$\Delta\Lambda-\Delta\text{K}=r_2-r_1=2,5\text{m} \quad (1) \quad \text{Αλλά } \Delta\Lambda+\Delta\text{K}=d=6\text{m} \quad (2)$$

$$\text{Από } (1) \quad (2) \rightarrow (\text{K}\Delta)=1,75\text{m}.$$

Όσα ακίνητα σημεία βρίσκονται στην απόσταση ΚΖ, βρίσκονται και στην ΚΔ. Το πλήθος των σημείων υπολογίζεται με το γνωστό τρόπο:

Για ένα τυχαίο ακίνητο σημείο P της ΚΛ που απέχει αποστάσεις x_1, x_2 από τα Κ και Λ ισχύει

$$x_1 - x_2 = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \rightarrow 2x_1 - d = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \rightarrow x_1 = \frac{d}{2} + \frac{(2k+1)\lambda}{4} \rightarrow x_1 = 3,25 + 0,5k \text{ με } 0 < x_1 < (ΚΛ) \quad \text{ή}$$

$$x_1 = 3,25 + 0,5k \text{ με } 0 < x_1 < 1,75\text{m}$$

Άρα $0 < 3,25 + 0,5k < 1,75 \rightarrow \dots \rightarrow -7 < k < -3 \rightarrow$ Άρα $k = -6, -5, -4$, δηλαδή μεταξύ των Κ και Δ, άρα και μεταξύ των Κ και Ζ υπάρχουν συνολικά **3 σημεία** ακυρωτικής συμβολής. Αυτά είναι

$$x_1 = 3,25 + 0,5k \quad (\text{και για } k = -6) \quad x_1 = 0,25\text{m}$$

$$x_1 = 3,25 + 0,5k \quad (\text{και για } k = -5) \quad x_1' = 0,75\text{m}$$

$$x_1 = 3,25 + 0,5k \quad (\text{και για } k = -4) \quad x_1'' = 1,25\text{m}$$

ΣΓ2.3 Δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων Κ και Λ με $ΚΛ = d = 5\text{m}$, που βρίσκονται στην επιφάνεια υγρού αρχίζουν, τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, να παράγουν εγκάρσια αρμονικά κύματα με πλάτος $A = 0,1\text{m}$. Η κάθε πηγή περνάει 10 φορές από τη θέση ισορροπίας της σε 5s. Τα κύματα διαδίδονται στην επιφάνεια του υγρού με ταχύτητα $v = 1\text{m/s}$. Σημείο Ν της επιφάνειας του υγρού απέχει από τις πηγές των κυμάτων Κ και Λ αποστάσεις $(ΚΝ) = r_1 = 3\text{m}$ και $(ΛΝ) = r_2 = 4\text{m}$ αντιστοίχως.

Α. Να υπολογιστεί το μήκος κύματος, λ

Β. Ποια χρονική στιγμή περνάει το σημείο Ν για πρώτη φορά από τη θέση $y = +0,1\text{m}$ και ποια χρονική στιγμή η ταχύτητά του Ν μηδενίζεται για πρώτη φορά κάνοντας σύνθετη ταλάντωση;

Γ. Σε ποιας τάξης και τι είδους υπερβολή βρίσκεται το σημείο Ν;

Δ. Σε πόση απόσταση από την πηγή Κ τέμνει η υπερβολή του Ν, το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ;

Ε. Πόσα σημεία μεταξύ των Κ και Λ ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος;

ΣΤ. Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης y του σημείου Ν σε σχέση με το χρόνο από $t_0 = 0$ έως $t_1 = 5\text{s}$.

Λύση

Α. Η συχνότητα ταλάντωσης των πηγών είναι $f = \frac{N}{\Delta t} = \frac{5\text{ταλ}}{5\text{s}} \rightarrow f = 1\text{Hz}$ άρα και $T = 1\text{s}$. Το μήκος κύματος είναι $\lambda = v/f \rightarrow \lambda = 1\text{m}$.

Β. Για πρώτη φορά το Ν φτάνει στη θέση $y = 0,1\text{m} = +A$, κάνοντας απλή ΑΑΤ και $\Delta t = T/4 = 0,25\text{s}$ αφότου άρχισε να ταλαντώνεται. Άρα συνολικά τη χρονική στιγμή $t = t_1 + \Delta t = 3\text{s} + 0,25\text{s} \rightarrow t = 3,25\text{s}$.

Η σύνθετη ταλάντωση αρχίζει στα $t_2 = 4\text{s}$ και η ταχύτητα του Ν μηδενίζεται για πρώτη φορά μετά από $\Delta t = T/4 = 0,25\text{s}$. Άρα $t' = t_2 + \Delta t = 4\text{s} + 0,25\text{s} \rightarrow t' = 4,25\text{s}$.

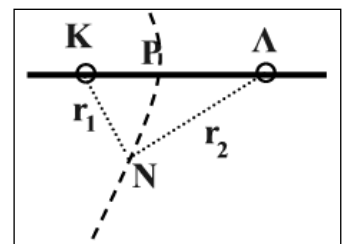
Γ. Το πλάτος του σημείου Ν είναι $A_N = 0,2\text{m} = 2A$. Συνεπώς είναι σε υπερβολή ενισχυτικής συμβολής: $r_1 - r_2 = k\lambda \rightarrow -1\text{m} = k \cdot 1 \rightarrow k = -1$. Άρα βρίσκεται στην πρώτη υπερβολή ενισχυτικής συμβολής αριστερά από τη μεσοκάθετο, δηλαδή προς την πλευρά της πηγής Κ.

Δ. Έστω ότι η εν λόγω υπερβολή τέμνει το τμήμα ΚΛ στο σημείο Ρ. Οι αποστάσεις του Ρ από τα Κ και Λ ικανοποιούν την ίδια σχέση με $k = -1$.

$$(ΚΡ) - (ΛΡ) = k\lambda \rightarrow (ΚΡ) - (ΛΡ) = -1\text{m} \quad (1)$$

$$(ΚΡ) + (ΛΡ) = d = 5\text{m} \quad (2)$$

$$\text{Από } (1) + (2) \rightarrow 2(ΚΡ) = 4\text{m} \rightarrow (ΚΡ) = 2\text{m}$$



Ε. Έστω Ζ ένα τέτοιο σημείο του ΚΛ που απέχει απόσταση $x_1=x$ από την πηγή, Κ και $x_2=d-x$ από την πηγή Λ. Αφού στο Ζ έχουμε ενισχυτική συμβολή ($A'=2A$) πρέπει να ισχύει:

$$x_1 - x_2 = k\lambda \rightarrow x - (d - x) = k\lambda \rightarrow 2x - d = k\lambda \rightarrow x = \frac{k\lambda + d}{2} \rightarrow x = \frac{k+5}{2} \rightarrow x = (0,5k + 2,5) \text{ m} \quad (1)$$

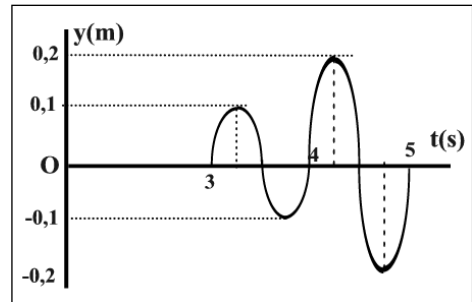
Η σχέση (1) δίνει την τιμή της απόστασης x , από την πηγή Κ, του κάθε σημείου ενισχυτικής συμβολής του τμήματος ΚΛ. Η τιμή του x κυμαίνεται από 0 έως $d=5\text{m}$ που είναι και το μήκος του τμήματος ΚΛ. Άρα

$$0 \leq x \leq 5\text{m} \rightarrow 0 \leq (0,5k + 2,5)\text{m} \leq 5\text{m} \rightarrow -5 \leq k \leq 5$$

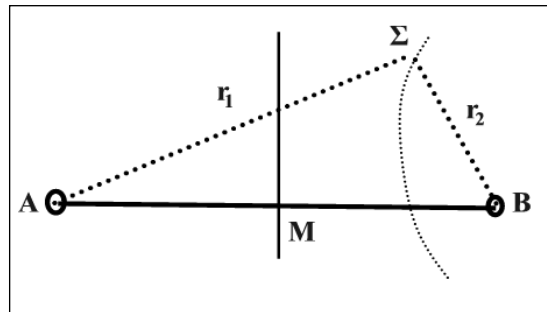
Άρα το k παίρνει τιμές $k=-5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5$.

Οι τιμές $k=-5$ και $k=+5$ δίνουν τα σημεία Κ με $x=0$ και Λ με $x=5\text{m}$, στα οποία βρίσκονται οι πηγές. Τα υπόλοιπα σημεία είναι για τιμές του k στο διάστημα $-4 \leq k \leq 4$, δηλαδή **9 συνολικά σημεία**.

ΣΤ. Από 0 έως 3s το Ν είναι ακίνητο από 3 έως 4s κάνει μια απλή ΑΑΤ με πλάτος 0,1m και από 4s έως 5s μια σύνθετη με πλάτος 0,2m.



► **ΣΓ2.4** Δύο σύγχρονες πηγές κυμάτων βρίσκονται στα σημεία Α και Β της ελεύθερης επιφάνειας υγρού και προκαλούν όμοια εγκάρσια κύματα που διαδίδονται στην επιφάνεια του υγρού με ταχύτητα $v=0,4\text{m/s}$ και συμβάλλουν. Η εξίσωση ταλάντωσης των πηγών είναι $y=0,2\eta\mu 4\pi t$, (SI). Σε ένα σημείο, Σ το κύμα από την πηγή Α φτάνει μετά από χρόνο $\Delta t=1\text{s}$ από τη στιγμή που έφτασε το κύμα από την πηγή Β. Οι αποστάσεις του Σ από τα Α και Β είναι r_1, r_2 αντιστοίχως και ισχύει ότι $r_1 + r_2 = 4\lambda$, όπου λ το μήκος κύματος των κυμάτων που συμβάλλουν.



Α. Να βρείτε τις αποστάσεις r_1, r_2 .

Β. Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που άρχισε η απλή και σύνθετη ταλάντωση του σημείου Σ και να κάνετε τη γραφική παράσταση $y=f(t)$ για το Σ από 0 έως 3s.

Γ. Πόσοι λόφοι του κύματος που προέρχεται από την πηγή Α χωράνε μέσα στην απόσταση ΑΣ;

Δ. Να υπολογιστεί η απόσταση d των δύο πηγών αν είναι γνωστό ότι στο τμήμα ΑΒ παρατηρείται ακυρωτική συμβολή σε 6 σημεία και το πλησιέστερο προς την πηγή Α απέχει από αυτή $x_1=0,05\text{m}$.

Λύση

Α. Στα στοιχεία των κυμάτων είναι $\omega=4\pi\text{rad/s} \rightarrow f=2\text{Hz}, T=0,5\text{s}$

Το μήκος κύματος $\lambda=v/f \rightarrow \lambda=0,2\text{m}$ και το πλάτος $A=0,2\text{m}$.

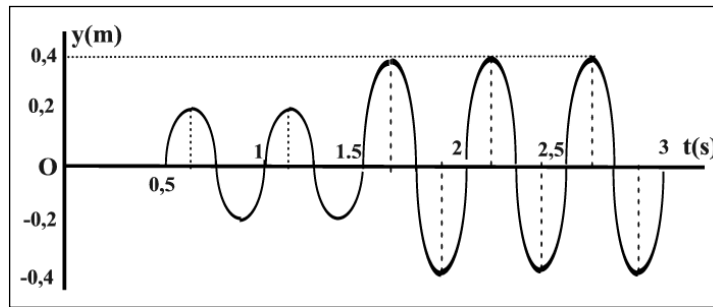
Τα κύματα στο Σ φτάνουν με χρονική διαφορά $\Delta t=t_1-t_2=1\text{s}$.

Άρα $r_1 - r_2 = v \cdot t_1 - v \cdot t_2 = v \cdot \Delta t = 0,4\text{m}$

Από το σύστημα: $r_1 + r_2 = 4\lambda = 0,8\text{m} \quad (1)$ και $r_1 - r_2 = 0,4\text{m} \quad (2)$

προθέτω τις (1)(2) και έχω, $2r_1 = 1,2\text{m} \rightarrow r_1 = 0,6\text{m}$ και $r_2 = 0,2\text{m}$

Β. Η απλή ταλάντωση του Σ ξεκινάει όταν φτάνει το κύμα από την πλησιέστερη πηγή δηλαδή τη πηγή Β, άρα $t_2=r_2/v \rightarrow t_2=0,5\text{s}$. Η σύνθετη ταλάντωση αρχίζει μόλις φτάσει και το κύμα από την πηγή Α, δηλαδή $t_1=r_1/v \rightarrow t_1=1,5\text{s}$



Γ. Για να βρω τα κύματα που χωράνε στην απόσταση ΑΣ διαιρώ την απόσταση με το λ δηλαδή

$$N = \frac{AS}{\lambda} = \frac{0,6m}{0,2m} \rightarrow N=3 \text{ κύματα άρα και } \mathbf{3 \text{ λόφοι.}}$$

Δ. Δύο διαδοχικά σημεία ακυρωτικής συμβολής απέχουν απόσταση $\lambda/2=0,1m$. Άφου τα σημεία είναι 6, υπάρχουν 5 μεταξύ τους αποστάσεις συνεπώς μεταξύ των δύο ακραίων σημείων η απόσταση είναι $5(\lambda/2)=5 \cdot 0,2=1m$. Τα σημεία όμως είναι συμμετρικά τοποθετημένα ως προς τη μεσοκάθετο στην ΑΒ. Αφού το πρώτο απέχει από την πηγή Α απόσταση 0,05m, θα απέχει την ίδια απόσταση και το τελευταίο συνεπώς $AB=d=0,005 + 1m + 0,05m \rightarrow \mathbf{d=0,6m}$

• Η απόδειξη για $\Delta x = \lambda/2$

Από τις σχέσεις $x_1 + x_2 = (AB) = d$ και $x_1 - x_2 = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$ που ισχύει για τα ακίνητα σημεία

$$\rightarrow 2x_1 - d = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \rightarrow x_1 = \frac{d}{2} + \frac{(2k+1)\lambda}{4}$$

Το επόμενο σημείο για $k'=k+1$ θα δώσει απόσταση $x_1' = \frac{d}{2} + \frac{(2(k+1)+1)\lambda}{4} \rightarrow x_1' = \frac{d}{2} + \frac{(2k+3)\lambda}{4}$

$$\text{Αν αφαιρέσω } \Delta x = x_1' - x_1 = \frac{3\lambda}{4} - \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{2}$$

ΣΓ2.5 Δύο μεγάφωνα Π_1, Π_2 που τροφοδοτούνται από την ίδια γεννήτρια συχνοτήτων αποτελούν σύγχρονες πηγές κυμάτων με εξίσωση $y=A\eta\mu 2\pi(t/T-x/\lambda)$. Τα μεγάφωνα τοποθετούνται στις θέσεις $O(0,0)$ και $A(4m,0)$ αντίστοιχα ενός ορθογωνίου συστήματος αξόνων xOy . Ανιχνευτής ήχου τοποθετείται στη θέση $\Sigma(0,3m)$. Καθώς η συχνότητα της γεννήτριας μεταβάλλεται από την τιμή $f_1=200\text{Hz}$ στην τιμή $f_2=1000\text{Hz}$, ο ανιχνευτής καταγράφει μια σειρά μεγίστων και ελαχίστων του ήχου. Δίνεται ταχύτητα ήχου $v=300\text{m/s}$. Να υπολογιστούν:

A. Η διαφορά φάσης των ηχητικών κυμάτων που φτάνουν στο Σ και έχουν συχνότητα $f=300\text{Hz}$.

B. Η συχνότητα της γεννήτριας όταν ο ανιχνευτής, Σ καταγράφει το πρώτο μέγιστο ήχου.

Γ. Ο αριθμός των ελαχίστων του ήχου που μπορεί να καταγράψει ο ανιχνευτής.

Δ. Η συχνότητα της γεννήτριας όταν ο ανιχνευτής καταγράφει το τελευταίο ελάχιστο ήχου.

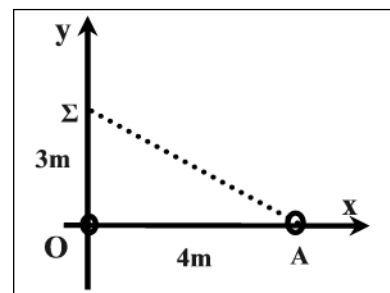
Λύση

A. Οι πηγές είναι στα σημεία O και A και εκπέμπουν κύματα ίδιας συχνότητας που στο ίδιο ελαστικό μέσο έχουν ίδια ταχύτητα $v=300\text{m/s}$ και διαδίδονται με το ίδιο μήκος κύματος αλλά με διαφορετικές συχνότητες f_1 και f_2 αντίστοιχως. Οι φάσεις των κυμάτων που συμβάλουν στο σημείο Σ που είναι οαπό τη Π_1 $\phi_1=(\omega t - 2\pi x_1/\lambda)$ και από την Π_2 η $\phi=(\omega t - 2\pi x_2/\lambda)$.

Άρα η διαφορά φάσης με την οποία φτάνουν τα δύο κύματα στο σημείο Σ είναι

$$\Delta\phi=2\pi\frac{(A\Sigma)-(O\Sigma)}{\lambda} \quad (1)$$

όπου $A\Sigma=\sqrt{3^2+4^2}=5\text{m}$, $(O\Sigma)=3\text{m}$ και $\lambda=v/f=300/300=1\text{m}$ (2)



Από (1) και (2) $\rightarrow \Delta\phi=4\pi \text{ rad}$

B. Όταν καταγράφει ο ανιχνευτής το πρώτο μέγιστο ($\kappa=1$) ισχύει:

$$(A\Sigma)-(O\Sigma)=\kappa\lambda \rightarrow (A\Sigma)-(O\Sigma)=\kappa \cdot \frac{v}{f} \rightarrow f=300\text{Hz}$$

Γ. Για τα ελάχιστα που καταγράφει ισχύει:

$$(A\Sigma)-(O\Sigma)=(2\kappa+1)\lambda \rightarrow (A\Sigma)-(O\Sigma)=(2\kappa+1)\frac{v}{f} \rightarrow f=\frac{(2\kappa+1)v}{4} \rightarrow f=(2\kappa+1) \cdot 75 \text{ Hz}$$

Αφού η συχνότητα των πηγών κυμαίνεται από $f_1=200\text{Hz}$ στην τιμή $f_2=1000\text{Hz}$ θα ισχύει

$$200\text{Hz} < (2\kappa+1) \cdot 75 < 1000\text{Hz} \rightarrow 125 \leq 150\kappa \leq 925 \rightarrow 0,83 < \kappa < 6,16 \rightarrow \text{το } \kappa \text{ παίρνει τις τιμές } 1,2,3,4,5,6.$$

Άρα συνολικά 6 ελάχιστα.

Δ. Το τελευταίο ελάχιστο προκύπτει για τιμή $\kappa=6$ και είναι $f=(2 \cdot 6+1)75=935\text{Hz}$.