

SB3. Λυμένα Β Θέματα στα Στάσιμα Κύματα

SB3.1 Σε χορδή που είναι στερεωμένη μόνο στο ένα άκρο της συμβάλλουν δύο κύματα με μήκος κύματος $\lambda=2\text{m}$ και παράγεται στάσιμο κύμα. Στο ελεύθερο άκρο της χορδής δημιουργείται κοιλία. Το ελάχιστο μήκος της χορδής για να είναι δυνατή η δημιουργία στάσιμου κύματος είναι:

α. $L=1\text{m}$

β. $L=2\text{m}$

γ. $L=0,5\text{m}$

Απάντηση: (γ)

Το μήκος L της χορδής ισούται με την απόσταση του τελευταίου δεσμού από το ελεύθερο άκρο της.
Άρα: $L=x_{\delta}=(2k+1)\lambda/4$

$$L=(2k+1)\lambda/4 \xrightarrow{k=0} L_{\min}=\lambda/4=2\text{m}/4=0,5\text{m} \rightarrow L_{\min}=0,5\text{m}.$$

SB3.2 Σε χορδή που είναι στερεωμένη μόνο στο ένα άκρο της συμβάλλουν δύο κύματα και παράγεται στάσιμο κύμα. Στο ελεύθερο άκρο της χορδής ($x=0$) δημιουργείται κοιλία. Η εξίσωση του στάσιμου είναι της μορφής: $y=2A\sin(2\pi x)\eta\mu(\omega t)$, (SI). Αν η χορδή έχει μήκος $d=8,5\text{m}$

I. σχηματίζονται συνολικά:

α. 8 δεσμοί

β. 7 δεσμοί

γ. 9 δεσμοί

δ. 10 δεσμοί

II. Μεταξύ των θέσεων $x_1=1,90\text{m}$ και $x_2=6,25\text{m}$ σχηματίζονται:

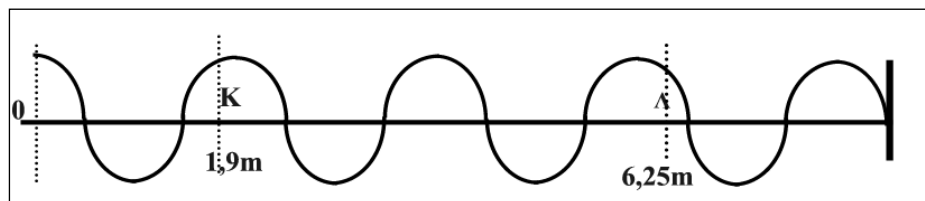
α. 4 δεσμοί & 5 κοιλίες

β. 5 δεσμοί & 4 κοιλίες

γ. 4 δεσμοί & 4 κοιλίες

Απάντηση: (γ),(α)

I. Το πλάτος του στάσιμου κύματος που περιγράφεται από τη δεδομένη εξίσωση έχει



τη γενική μορφή $A'=2A\sin(2\pi x/\lambda)$. Συγκρίνοντας με το πλάτος που δίνεται $A'=2A\sin 2\pi x$ (SI) φαίνεται ότι το μήκος κύματος των κυμάτων που δημιούργησαν το στάσιμο είναι $\lambda=2\text{m}$.

Το μήκος d της χορδής ισούται με την απόσταση του τελευταίου δεσμού από το ελεύθερο άκρο της.

$$\text{Άρα: } d=x_{\delta}=(2k+1)\frac{\lambda}{4} \rightarrow 2k+1=\frac{4d}{\lambda} \rightarrow 2k+1=17 \rightarrow k=8 \text{ άρα σχηματίζονται δεσμοί για}$$

$k=0,1,2,3,4,5,6,7,8$, δηλαδή **9 δεσμοί** (προσοχή όχι 8). Επειδή στην περίπτωση αυτή στασίμου είναι ίδιος και ο αριθμός των κοιλιών έχουμε και 9 κοιλίες (βλέπε στιγμιότυπο στάσιμου)

$$\text{II. Για τους δεσμούς: } x_1 \leq x_{\delta} \leq x_2 \rightarrow 1,9\text{m} \leq (2k+1)\frac{\lambda}{4} \leq 6,25\text{m} \rightarrow 3,8 \leq 2k+1 \leq 12,5 \rightarrow 1,4 \leq k \leq 5,75$$

άρα οι ακέραιες τιμές τους k που περιέχονται στο διάστημα αυτό είναι $k=2, 3, 4, 5$. Συνεπώς σχηματίζονται **4 δεσμοί**.

$$\text{Για τις κοιλίες: } x_1 \leq x_k \leq x_2 \rightarrow 1,90\text{m} \leq \frac{k\lambda}{2} \leq 6,25\text{m} \rightarrow 1,90 \leq k \leq 6,25$$

άρα οι ακέραιες τιμές τους k που περιέχονται στο διάστημα αυτό είναι $k=2, 3, 4, 5, 6$ Συνεπώς σχηματίζονται **5 κοιλίες**.

SB3.3 Τα κύματα που διαδίδονται σε ένα ελαστικό μέσο έχουν ταχύτητα $v=1000\text{m/s}$ και η συχνότητά τους κυμαίνεται από 1200Hz έως 1800Hz και δημιουργούν στάσιμο κύμα. Αν δύο σημεία του μέσου είναι δεσμοί και απέχουν μεταξύ τους απόσταση, $d=1\text{m}$, τότε, η ακριβής συχνότητα του κύματος είναι:

α. 1400Hz β. **1500Hz** γ. 1600Hz δ. 1000Hz

Απάντηση: (β)

Δύο δεσμοί απέχουν μεταξύ τους ακέραιο πολλαπλάσιο του $\lambda/2$, αφού δύο διαδοχικοί δεσμοί απέχουν $\lambda/2$.

$$\text{Αρα: } d=k\frac{\lambda}{2} \rightarrow \delta=k\frac{v}{2f} \rightarrow f=\frac{kv}{2\lambda} \rightarrow f=500k, k=1,2,3,\dots \quad (1)$$

Επειδή η συχνότητα κυμαίνεται από 1200Hz έως 1800Hz :

$$1200\text{Hz} \leq f \leq 1800 \rightarrow 1200 \leq 500k \leq 1800 \rightarrow 12 \leq 5k \leq 18 \rightarrow 2,4 \leq k \leq 3,6 \rightarrow k=3$$

$$(1) \rightarrow f=500k=500 \cdot 3 \rightarrow \mathbf{f=1500\text{Hz}}.$$

SB3.4 Κατά μήκος μιας ελαστικής χορδής συμβάλλουν δύο τρέχοντα κύματα περιόδου T , πλάτους A και μήκους κύματος λ που κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις με εξισώσεις $y_1=A\sin(\omega t-2\pi x/\lambda)$ και $y_2=A\sin(\omega t+2\pi x/\lambda)$. Από τη συμβολή προκύπτει στάσιμο κύμα. Μετά την αποκατάσταση του στάσιμου, τη χρονική στιγμή $t=0$, το σημείο $x=0$ έχει $y=0$ και $v>0$.

Τη χρονική στιγμή $t_1=3T/8$, το σημείο με θέση $x=(\lambda/8)$ έχει ταχύτητα ταλάντωσης

α. $v=2A\omega$ β. $v=-2A\omega$ γ. $v=A\omega$ δ. $v=-A\omega$

Απάντηση : (δ)

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι της μορφής: $y=2A\sin\frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \eta\mu\frac{2\pi t}{T}$ και η εξίσωση της

$$\text{ταχύτητας } v=(2A\omega)\sin\frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \sin\frac{2\pi t}{T} = 2A\omega\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{3\pi}{4} = 2A\omega(\sqrt{2}/2)(-\sqrt{2}/2) \rightarrow \mathbf{v=-A\omega}$$

SB3.5 Στάσιμο κύμα περιγράφεται από τη σχέση $y=2A\sin(2\pi x/\lambda)\eta\mu(2\pi t/T)$. Το πλάτος ταλάντωσης ενός σημείου H του ελαστικού μέσου που βρίσκεται δεξιά του 3^{ου} δεσμού από το $x=0$ και απέχει από αυτόν απόσταση $\lambda/12$ είναι

α. $A'=A\sqrt{3}$ β. $A'=A/2$ γ. $A'=A$ δ. $2A$

Απάντηση: (γ)

Η θέση του 3^{ου} δεσμού, (Δ_3) όπως μπορούμε να δούμε και από ένα τυχαίο στιγμιότυπο του στάσιμου, είναι

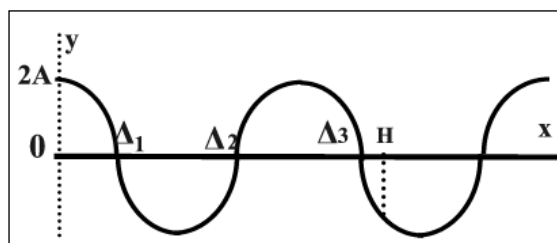
$$x_{\Delta_3}=\lambda+\lambda/4=5\lambda/4. \text{ Αρα: η θέση του σημείου } H \text{ είναι}$$

$$x=\frac{5\lambda}{4}+\frac{\lambda}{12}=\frac{16\lambda}{12} \rightarrow x=\frac{4\lambda}{3}$$

Το πλάτος ταλάντωσης του σημείου H είναι:

$$A'=2A\sin\frac{2\pi x}{\lambda}=2A\sin(8\pi/3)=2A\sin(2\pi+2\pi/3)=2A\sin(2\pi/3) \rightarrow \mathbf{A'=-A}.$$

Άρα το πλάτος ταλάντωσης είναι $|A'|=A$.



SB3.6 Σε γραμμικό ελαστικό μέσο που ταυτίζεται με τον άξονα Ox έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα λόγω συμβολής δύο πανομοιότυπων κυμάτων μήκους κύματος λ που διαδίδονται με αντίθετες φορές. Η εξίσωση του στάσιμου είναι $y=2A\sin(2\pi x/\lambda)\cdot\eta\mu(2\pi t/T)$. Αν v_0 είναι η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης σημείου M με $x_M=2,5\lambda$, τότε η ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου N με $x_N=\lambda/6$, τη στιγμή που το M περνάει από τη θέση ισορροπίας με θετική ταχύτητα, θα είναι:

α. $v_N=-v_0$

β. $v_N=+v_0$

γ. $v_N= v_0/2$

δ. $v_N=-v_0/2$

Απάντηση: (δ)

Υπολογίζω αρχικά τα πλάτη ταλάντωσης των δύο σημείων.

$$A_M=2A\sin\frac{2\pi x_M}{\lambda}=2A\sin 5\pi\rightarrow A_M=-2A$$

$$A_N=2A\sin\frac{2\pi x_N}{\lambda}=2A\sin(\pi/3)\rightarrow A_N=A$$

Οι εξισώσεις απομάκρυνσης των δύο σημείων είναι:

$$y_M=-2A\cdot\eta\mu(\omega t)=2A\eta\mu(\omega t+\pi) \text{ και } y_N=A\cdot\eta\mu(\omega t)$$

Οι εξισώσεις των ταχυτήτων τους είναι:

$$v_M=2A\omega\sin(\omega t+\pi)=v_0\sin(\omega t+\pi)$$

$$v_N=A\omega\sin(\omega t)\rightarrow v_N=\frac{v_0}{2}\sin(\omega t)$$

Το M θα περνάει από τη θέση ισορροπίας με θετική ταχύτητα $v_M=+2A\omega=v_0$, τη χρονική στιγμή, t :
 $v_M=v_0\rightarrow v_0\sin(\omega t+\pi)=v_0\rightarrow\sin(\omega t+\pi)=1\rightarrow\omega t+\pi=2k\pi\rightarrow\omega t=2k\pi-\pi \text{ rad}$

Το σημείο N την ίδια χρονική στιγμή θα έχει ταχύτητα:

$$v_N=\frac{v_0}{2}\sin(\omega t)=\frac{v_0}{2}\sin(2k\pi-\pi)=\frac{v_0}{2}\sin(-\pi)=\frac{v_0}{2}\sin\pi\rightarrow v_N=-\frac{v_0}{2}$$

SB3.7 Κατά μήκος μιας χορδής συμβάλλουν δύο κύματα μήκους λ , πλάτους, A και δημιουργείται στάσιμο κύμα. Σημείο X της χορδής έχει πλάτος ταλάντωσης $|A'|=A$ και απέχει από τον πλησιέστερο προς αυτό δεσμό απόσταση:

α. $\lambda/6$

β. $\lambda/3$

γ. $\lambda/24$

δ. $\lambda/12$

Απάντηση: (δ)

Η θέση του κάθε δεσμού δίνεται από τη σχέση:

$$x_\delta=(2k+1)\lambda/4 \quad (1)$$

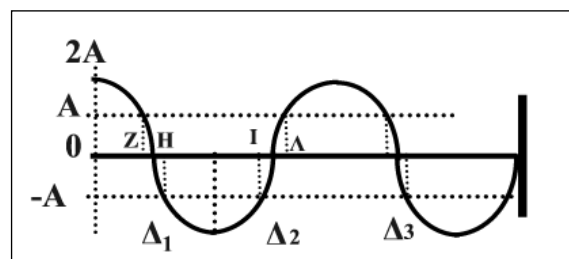
Η θέση x των σημείων που έχουν πλάτος ταλάντωσης,

$|A'|=A$, θα είναι:

$$|A'|=A\rightarrow|2A\sin(2\pi x/\lambda)|=A\rightarrow|\sin(2\pi x/\lambda)|=\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow|\sin(2\pi x/\lambda)|=\sin(\pi/3)\rightarrow 2\pi x/\lambda=k\pi\pm\pi/3\rightarrow$$

$$x=(3k\pm1)\frac{\lambda}{6} \quad (2)$$



Η μεταξύ τους απόσταση είναι: $\Delta x = x_\delta - x = (2\kappa + 1)\frac{\lambda}{4} - (3\kappa \pm 1)\frac{\lambda}{6} = \frac{\kappa\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} - \frac{\kappa\lambda}{2} \pm \frac{\lambda}{6} \rightarrow \Delta x = \frac{\lambda}{4} \pm \frac{\lambda}{6}$ (3)

Θέτοντας (+) στη σχέση (3) έχουμε $\Delta x = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{6} = \frac{5\lambda}{12} > \frac{\lambda}{4}$ άτοπον, διότι τότε δεν θα είναι η απόσταση από τον πλησιέστερο δεσμό, αλλά από κάποιον άλλο μακρύτερο.

Θέτοντας (-) στη σχέση (3) έχουμε $\Delta x = \frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{6} \rightarrow \Delta x = \frac{\lambda}{12}$

Σημ: Τέτοια σημεία βλέπουμε στο σχήμα. Τα Z και H που απέχουν ίσες αποστάσεις $\lambda/12$ από τον δεσμό Δ_1 , τα I και Λ που αντίστοιχα απέχουν $\lambda/12$ από το δεσμό Δ_2 κοκ.

SB3.8 Κατά μήκος μιας χορδής συμβάλλουν δύο σύγχρονα κύματα μήκους λ , και δημιουργείται στάσιμο κύμα. Δύο σημεία της χορδής τα Κ και Λ είναι τα πλησιέστερα μεταξύ τους που ταλαντώνονται με το ίδιο πλάτος, έχουν διαφορά φάσης $\Delta\phi = \pi$ rad, βρίσκονται προς την ίδια πλευρά ενός δεσμού, Δ από τον οποίο απέχουν τις ελάχιστες δυνατές αποστάσεις για τέτοια σημεία, $(\Delta K) = 0,5\text{m}$ και $(\Delta \Lambda) = 1,1\text{m}$. Το μήκος κύματος των κυμάτων που συμβάλλουν είναι:

α. $\lambda = 1,6\text{ m}$

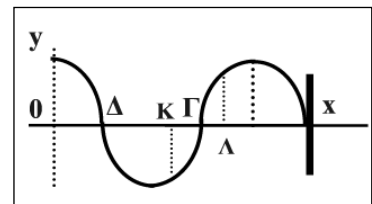
β. $\lambda = 1,2\text{m}$

γ. $\lambda = 0,8\text{m}$

δ. 1m

Απάντηση: (α)

Τα σημεία Κ, Λ έχουν $\Delta\phi = \pi$ rad, συνεπώς βρίσκονται εκατέρωθεν ενός δεσμού, Γ και αφού έχουν το ίδιο πλάτος θα απέχουν ίσες αποστάσεις από αυτόν, $(\Gamma K) = (\Gamma \Lambda)$. Από το σχήμα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:



$$(\Delta \Lambda) = (\Delta \Gamma) + (\Gamma \Lambda) = \frac{\lambda}{2} + (\Gamma \Lambda) \quad (1) \text{ και}$$

$$(\Delta K) = (\Delta \Gamma) - (\Gamma K) = \frac{\lambda}{2} - (\Gamma \Lambda) \quad (2)$$

$$\text{Από (1) + (2)} \rightarrow (\Delta K) + (\Delta \Lambda) = \lambda \rightarrow \lambda = 1,6\text{m}$$

SB3.9 Κατά μήκος μιας χορδής συμβάλλουν δύο σύγχρονα κύματα μήκους λ , και δημιουργείται στάσιμο κύμα. Μεταξύ δύο σημείων του ελαστικού μέσου Κ και Λ εκ των οποίων το Κ είναι δεσμός και το Λ κοιλία υπάρχουν πέντε σημεία που ταλαντώνονται με πλάτος $A' = A$ όπου A το πλάτος του κάθε κύματος που συμβάλλει. Μεταξύ των Κ και Λ ο αριθμός των κοιλιών είναι:

α. 2

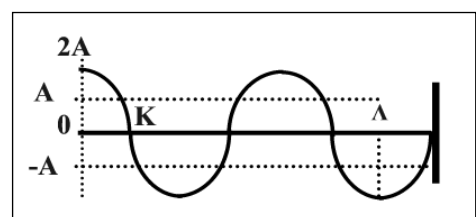
β. 4

γ. 5

δ. 3

Απάντηση: (α)

Σχεδιάζουμε στάσιμο κύμα φροντίζοντας μεταξύ ενός δεσμού Κ και μιας κοιλίας Λ να υπάρχουν 5 συνολικά σημεία που ταλαντώνονται με πλάτος A , δηλαδή το μισό του $2A$ που είναι το μέγιστο πλάτος ταλάντωσης στο στάσιμο. Οι οριζόντιες διακεκομμένες γραμμές δείχνουν τα σημεία αυτά. Από το σχήμα φαίνεται ότι μεταξύ των Κ και Λ υπάρχουν 2 κοιλίες.



B3.10 Σε μια χορδή στην οποία σχηματίζονται στάσιμα κύματα, τα τρέχοντα κύματα που συμβάλλουν έχουν πλάτος A και μήκος κύματος λ . Δύο σημεία K και Λ απέχουν από τον ίδιο δεσμό αποστάσεις $\lambda/3$ και $\lambda/6$ αντιστοίχως. Τα K και Λ ταλαντώνονται με διαφορά φάσης:

α. 0

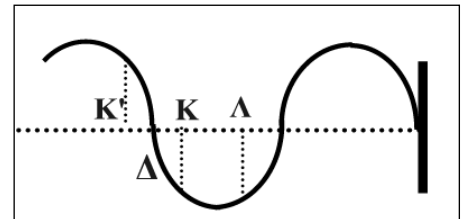
β. π rad

γ. 0 ή π rad

δ. 0 ή $\pi/2$ rad

Απάντηση: (γ)

Με τις αποστάσεις αυτές $\lambda/3$ και $\lambda/6$ από το δεσμό Δ τα σημεία μπορούν να είναι ανάμεσα από δύο διαδοχικούς δεσμούς όπως είναι τα K και Λ στο σχήμα, με $K\Delta=\lambda/6$ και $\Lambda\Delta=\lambda/3$ και να έχουν $\Delta\phi=0$. Μπορούν όμως να είναι και εκατέρωθεν ενός δεσμού όπως τα K' και Λ , όπου $K'\Delta=\lambda/6$ και $\Delta\Lambda=\lambda/3$ και να έχουν διαφορά φάσης $\Delta\phi=\pi$ rad.



i. Θα αποδείξουμε ότι τα K και Λ έχουν $\Delta\phi=0$.

Για ένα τυχαίο σημείο K η θέση του είναι το άθροισμα της απόστασης του προηγούμενου δεσμού, αυξημένη κατά $\lambda/6$, δηλαδή:

$$x_K = (2\kappa+1)\frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{6} = \frac{\kappa\lambda}{2} + \frac{5\lambda}{12} \quad (1)$$

$$\text{Για το αντίστοιχο τυχαίο σημείο } \Lambda \text{ η θέση είναι: } x_\Lambda = (2\kappa+1)\frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{3} = \frac{\kappa\lambda}{2} + \frac{7\lambda}{12} \quad (2)$$

Έχοντας τις θέσεις υπολογίζω τα πλάτη:

$$A_K = 2A \sin \frac{2\pi x_K}{\lambda} \xrightarrow{(1)} A_K = 2A \sin(\kappa\pi + 5\pi/6) = 2A \sin(\kappa\pi + \pi - \pi/6) \quad (3)$$

$$A_\Lambda = 2A \sin \frac{2\pi x_\Lambda}{\lambda} \xrightarrow{(2)} A_\Lambda = 2A \sin(\kappa\pi + 7\pi/6) = 2A \sin(\kappa\pi + \pi + \pi/6) \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) φαίνεται ότι $A_K = A_\Lambda$. Άρα τα σημεία K και Λ είναι συμφασικά δηλαδή, $\Delta\phi=0$.

ii. Θα αποδείξουμε ότι τα K' και Λ έχουν $\Delta\phi=\pi$ rad

$$\text{Για ένα τυχαίο σημείο } K' \text{ η θέση του είναι: } x_{K'} = (2\kappa+1)\frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{6} = \frac{\kappa\lambda}{2} + \frac{\lambda}{12} \quad (5)$$

$$\text{Για το αντίστοιχο τυχαίο σημείο } \Lambda \text{ η θέση είναι: } x_\Lambda = (2\kappa+1)\frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{3} = \frac{\kappa\lambda}{2} + \frac{7\lambda}{12} \quad (6)$$

$$A_{K'} = 2A \sin \frac{2\pi x_{K'}}{\lambda} \xrightarrow{(5)} A_{K'} = 2A \sin(\kappa\pi + \pi/6) \quad (7)$$

$$A_\Lambda = 2A \sin \frac{2\pi x_\Lambda}{\lambda} \xrightarrow{(6)} A_\Lambda = 2A \sin(\kappa\pi + 7\pi/6) = 2A \sin(\kappa\pi + \pi + \pi/6) \quad (8)$$

Από (7) και (8) φαίνεται ότι $A_{K'} = -A_\Lambda \rightarrow$ Τα K' και Λ έχουν αντίθετα πλάτη, άρα έχουν $\Delta\phi=\pi$ rad.

●**SB3.11** Μια χορδή έχει το ένα άκρο της στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο και το άλλο ελεύθερο και κατά μήκος της δημιουργείται στάσιμο κύμα με εξίσωση $y=2A\sin(2\pi x/\lambda \cdot \eta\mu(\omega t))$. Στη χορδή σχηματίζονται N το πλήθος κοιλίες. Στο ελεύθερο άκρο της χορδής ($x=0$) σχηματίζεται κοιλία.

I. Το μήκος της χορδής είναι:

α. $L = N\lambda/2$ β. $L = (2N+1)\lambda/4$ γ. $L = N\lambda$ δ. $L = (2N-1)\lambda/4$

II. Αν τριπλασιάσουμε τη συχνότητα των κυμάτων που συμβάλλουν στην ίδια χορδή και σχηματιστεί και πάλι στάσιμο και στο ελεύθερο άκρο κοιλία, ο αριθμός των δεσμών θα γίνει :

α. $3N$ β. $3N+1$ γ. $3N-1$ δ. $N+3$

Απάντηση: (δ), (γ)

I. Από τη θεωρία ξέρουμε ότι τη θέση των κοιλιών και των δεσμών στην περίπτωση αυτού του στάσιμου δίνεται από τις σχέσεις: $x_k = k\lambda/2$, και $x_\delta = (2k+1)\lambda/4$, όπου $k=0,1,2,3,\dots$

Επειδή όμως στο ακλόνητο άκρο της χορδής σχηματίζεται πάντοτε δεσμός, το μήκος της ισοδυναμεί με τη θέση του τελευταίου δεσμού που σχηματίζεται στη χορδή.

$$L = (2k+1) \frac{\lambda}{4} \quad k=0,1,2,3,\dots$$

Επειδή ο 1^{ος} δεσμός αντιστοιχεί στην τιμή $k=0$, ο N -οστός θα αντιστοιχεί σε τιμή $k=N-1$.

Άρα στη σχέση που δίνει δεσμούς ή κοιλίες μπορούμε να αντικαταστήσουμε το k με το $N-1$, όπου N το πλήθος των δεσμών

$$L = (2k+1) \frac{\lambda}{4} \rightarrow L = [2(N-1)+1] \frac{\lambda}{4} \rightarrow L = (2N-1) \frac{\lambda}{4}$$

Σημ. Αντίστοιχα η σχέση που δίνει τις κοιλίες γίνεται $x_k = \frac{k\lambda}{2} = \frac{(N-1)\lambda}{2}$

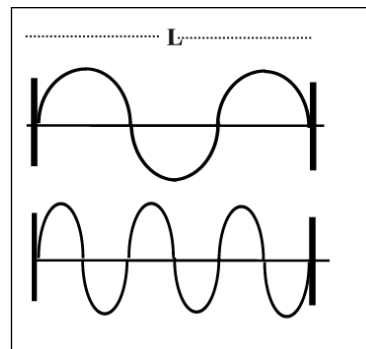
II. Αν η συχνότητα τριπλασιαστεί τότε θα γίνει: $f' = 3f \rightarrow \frac{v}{\lambda'} = \frac{3v}{\lambda} \rightarrow \lambda' = \frac{\lambda}{3}$ (1)

$$L = (2N-1) \frac{\lambda}{4} \quad (2) \quad \text{και} \quad L = (2N'-1) \frac{\lambda'}{4} \quad (3)$$

$$\text{Από (1)(2)(3)} \rightarrow 2N-1 = (2N'-1) \frac{1}{3} \rightarrow \dots N' = 3N-1$$

SB3.12 Στη χορδή κιθάρας μήκους L δημιουργείται στάσιμο κύμα συχνότητας f_1 . Το στάσιμο κύμα έχει τέσσερις δεσμούς, δύο στα άκρα της χορδής και δύο μεταξύ αυτών. Στην ίδια χορδή, με άλλη διέγερση, δημιουργείται άλλο στάσιμο κύμα συχνότητας f_2 , που έχει επτά συνολικά δεσμούς, δύο στα άκρα της χορδής και 5 μεταξύ αυτών. Η συχνότητα f_2 είναι ίση με:

α. $f_2 = 4f_1/3$ β. $f_2 = 2f_1/3$ γ. $f_2 = 2f_1$ δ. $f_2 = f_1$



Απάντηση: (γ)

Η απόσταση δύο διαδοχικών δεσμών είναι σε κάθε περίπτωση ίση με $\lambda/2$.

Όταν η συχνότητα είναι f_1 και υπάρχουν 4 δεσμοί από το σχήμα φαίνεται: $L = 3 \frac{\lambda}{2} = \frac{3v}{2f_1}$ (1)

Όταν η συχνότητα είναι f_2 και υπάρχουν 7 δεσμοί και το μήκος είναι $L=6 \frac{\lambda}{2} = \frac{3v}{f_2}$ (2)

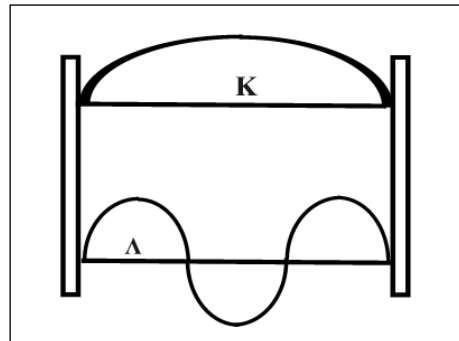
$$\text{Από (1) και (2)} \rightarrow \frac{3v}{2f_1} = \frac{3v}{f_2} \rightarrow f_2 = 2f_1.$$

SB3.13 Σε μια χορδή μήκος L που είναι στερεωμένη και στα δύο της άκρα παράγονται με κατάλληλες δονήσεις στάσιμα κύματα ίδιου μέγιστου πλάτους. Στην πρώτη περίπτωση η συχνότητα ταλάντωσης είναι f_1 και παράγονται δύο δεσμοί (στα σταθερά σημεία) ενώ στη δεύτερη περίπτωση η συχνότητα είναι f_2 και παράγονται 4 δεσμοί. Δύο υλικά σημεία K και Λ ίδιας μάζας εκτελούν ταλάντωση με μέγιστο πλάτος και έχουν ενέργειες E_1 και E_2 αντίστοιχα. Ο λόγος των ενεργειών E_1/E_2 είναι:

α. $E_1/E_2=1$

β. $E_1/E_2=1/3$

γ. $E_1/E_2=1/9$



Απάντηση: (γ)

Στην πρώτη περίπτωση: $L = \frac{\lambda_1}{2} = \frac{v}{2f_1} \rightarrow f_1 = \frac{v}{2L}$

Στη δεύτερη περίπτωση: $L = 3 \frac{\lambda_2}{2} = 3 \frac{v}{2f_2} \rightarrow f_2 = 3 \frac{v}{2L}$

Έστω ότι το μέγιστο πλάτος του στάσιμου είναι A' . Ο λόγος των ενεργειών είναι:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{1}{2} m \omega_1^2 A'^2}{\frac{1}{2} m \omega_2^2 A'^2} = \frac{f_1^2}{f_2^2} = \frac{\frac{v^2}{4L^2}}{\frac{9v^2}{4L^2}} \rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{9}$$

SB3.14 Δύο διαφορετικές χορδές ίδιου μήκους d είναι τεντωμένες και στερεωμένες σε ακλόνητα σημεία και με τα δύο τους άκρα. Δονούμε τις χορδές με την ίδια συχνότητα και παρατηρούμε ότι στη χορδή (1) παράγονται συνολικά 6 δεσμοί στάσιμου κύματος (μαζί με τα άκρα) ενώ στη χορδή (2) παράγονται αντίστοιχα 9 τέτοιοι δεσμοί. Ο λόγος των ταχυτήτων με τις οποίες τρέχουν τα τρέχοντα κύματα στις δύο χορδές είναι:

α. $v_1/v_2 = 8/5$

β. $v_1/v_2 = 2/5$

γ. $v_1/v_2 = 3/8$

δ. $v_1/v_2 = 2/3$

Απάντηση: (α)

Στη χορδή (1) οι 6 δεσμοί δημιουργούν συνολικά 5 «στάσιμα κύματα» που το καθένα έχει μήκος

$\lambda_1/2$, άρα $d = 5 \frac{\lambda_1}{2} \rightarrow d = 5 \frac{v_1}{2f}$ (1)

Στη χορδή (2) οι 9 δεσμοί δημιουργούν συνολικά 8 «στάσιμα κύματα» που το καθένα έχει μήκος

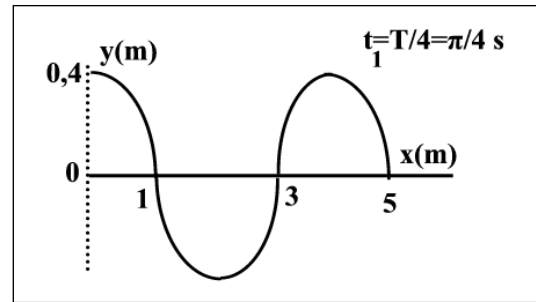
$\lambda_2/2$, άρα $d = 8 \frac{\lambda_2}{2} \rightarrow d = 4 \frac{v_2}{f}$ (2)

Από (1)(2) $\rightarrow 5 \frac{v_1}{2f} = 4 \frac{v_2}{f} \rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{8}{5}$

► **SB3.15** Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα στιγμιότυπο στάσιμου κύματος τη χρονική στιγμή $t_1 = T/4 = \pi/4$ s πάνω σε μια χορδή μήκους $L=5$ m, ($0 \leq x \leq 5$ m). Όλα τα σημεία βρίσκονται σε μέγιστη απομάκρυνση.

I. Το μήκος κύματος των κυμάτων που συμβάλλουν είναι:

- α. 4 m β. 5 m γ. 3 m δ. 2 m



II. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις, απομάκρυνσης, επιτάχυνσης, ταχύτητας, κινητικής και δυναμικής ενέργειας των υλικών σημείων της χορδής σε σχέση με την απόσταση, x τις χρονικές στιγμές t_1 και $t_2 = t_1 + T/4$. Κάθε υλικό σημείο έχει μάζα $m = 10^{-6}$ kg.

Απάντηση

I. Το μήκος της χορδής είναι $L=5$ m και ισοδυναμεί με $L = \lambda + (\lambda/4) = 5\lambda/4$

Άρα: $\frac{5\lambda}{4} = 5 \text{ m} \rightarrow \lambda = 4 \text{ m}$.

Σωστό είναι το (α).

II. Για τη χρονική στιγμή t_1 .
Όλα τα σημεία της χορδής που ταλαντώνονται βρίσκονται στη μέγιστη απομάκρυνση και θα έχουν και μέγιστη επιτάχυνση απόλυτης τιμής $|a_0|$

Η περίοδος ταλάντωσης είναι $T = \pi$ s και η γωνιακή συχνότητα $\omega = 2 \text{ rad/s}$ και το μέγιστο πλάτος δηλαδή το πλάτος της κάθε κοιλίας, $A' = 0,4 \text{ m}$. Άρα η επιτάχυνση της κάθε κοιλίας θα έχει μέτρο

$$|a_0| = A' \omega^2 = 1,6 \text{ m/s}^2.$$

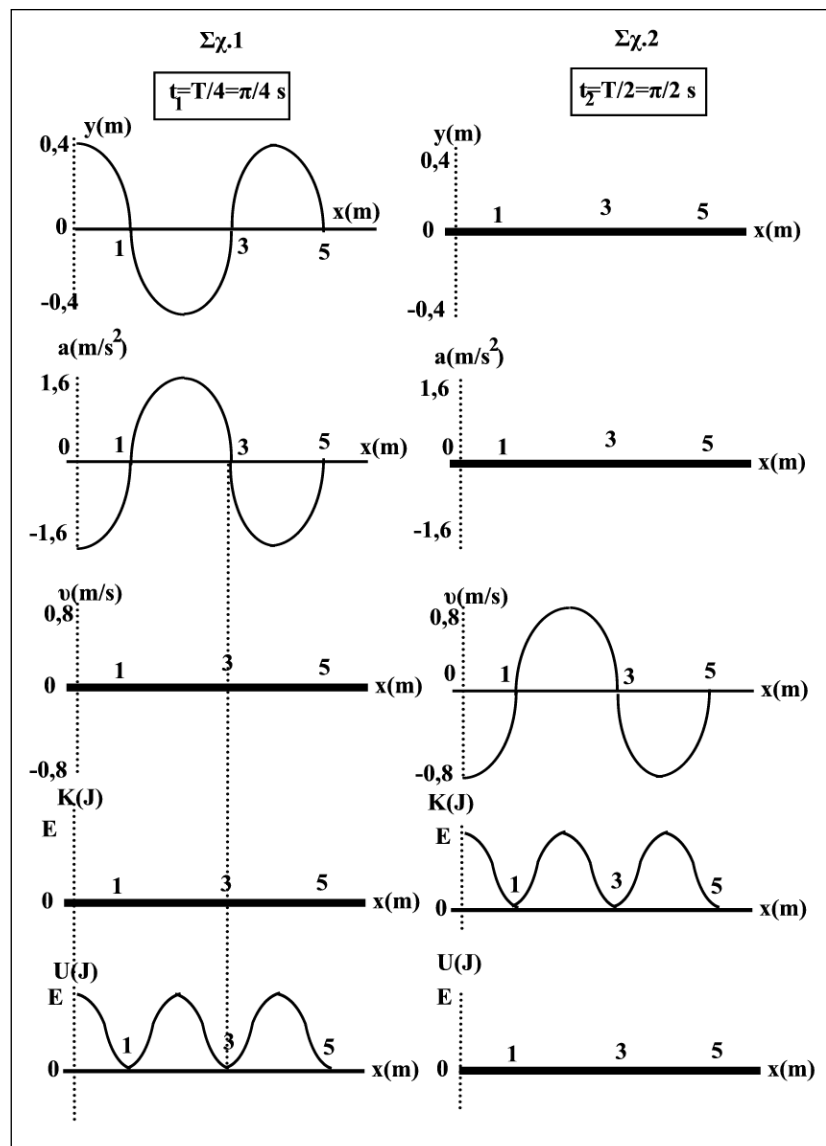
Το σημείο με $x=0$ που βρίσκεται σε απομάκρυνση $y = +A'$ θα έχει επιτάχυνση

$$a = -\omega^2 x \rightarrow a_0 = -\omega^2 A' = -1,6 \text{ m/s}^2.$$

Αντίθετα το σημείο $x=2$ m που βρίσκεται σε απομάκρυνση $y = -A'$ θα έχει $a_0 = +1,6 \text{ m/s}^2$.

Η ταχύτητα και η κινητική ενέργεια όλων των σημείων της χορδής είναι μηδενική αφού όλα βρίσκονται στη μέγιστη απομάκρυνσή τους. Η δυναμική ενέργεια $U = \frac{1}{2} D y^2$ με $D = m \omega^2$, όλων σημείων κινούνται (δηλαδή εκτός των δεσμών) είναι μέγιστη αφού αυτά βρίσκονται σε μέγιστη απομάκρυνση. Η δυναμική ενέργεια των κοιλιών είναι $U_{\max} = E = \frac{1}{2} m \omega^2 (A')^2 = 32 \cdot 10^{-8} \text{ J}$.

Οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται στο σχήμα (1).

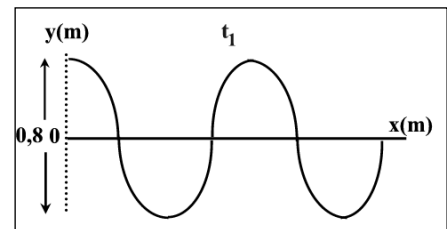


Για τη χρονική στιγμή $t_2=t_1+T/4=T/2=\pi/2$ s: Δηλαδή $T/4$ μετά από τη στιγμή t_1 , όλα τα σημεία της χορδής που ταλαντώνονται περνάνε από τη θέση ισορροπίας με τη μέγιστη ταχύτητά τους. Το σημείο $x=0$ που βρισκότανε τη στιγμή t_1 στη θέση $y=+A'$ τώρα θα περνάει από τη θέση ισορροπίας

κατευθυνόμενο προς την αρνητική φορά, άρα $v=-v_0=-A'\omega=-0,8\text{m/s}$. Αντιθέτως το σημείο με $x=2\text{m}$ θα έχει $v=v_0=+0,8\text{m/s}$. Η επιτάχυνση όλων των σημείων είναι μηδενική, $a=-\omega^2 y$.

Μηδενική είναι και η δυναμική ενέργεια αφού η απομάκρυνση όλων των σημείων είναι $y=0$. Αντιθέτως οι κινητικές ενέργειες των ταλαντούμενων σημείων θα είναι μέγιστες, αφού όλα περνούν ταυτόχρονα από τη θέση ισορροπίας τους. Οι κοιλίες θα έχουν την μέγιστη δυνατή κινητική ενέργεια $K_{\max}=E=\frac{1}{2}D(2A)^2=32\cdot 10^{-8}\text{J}$. Οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται στο 2^ο σχήμα.

●B3.16 Στάσιμο κύμα περιγράφεται από την εξίσωση $y=0,4\sin(2\pi x/\lambda)\eta\mu 4\pi t$, (SI). Στο σχήμα φαίνεται στιγμιότυπο του κύματος χρονική στιγμή t_1 . Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ και ενώ έχει σχηματιστεί το στάσιμο κύμα, το σημείο $x=0$ είναι στη θέση $y=0$ με θετική ταχύτητα (προς τα πάνω). Η χρονική στιγμή t_1 , είναι η στιγμή που όλα τα σημεία που ταλαντώνονται βρίσκονται για πρώτη φορά στις θέσεις που φαίνονται στο στιγμιότυπο.



Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο $y=f(x)$ και τις γραφικές $v=f(x)$ και $a=f(x)$ τη χρονική στιγμή $t_2=(t_1+1/6)$ s.

Απάντηση

Από την εξίσωση του στασίμου φαίνεται ότι το πλάτος του είναι $A'=2A=0,4\text{m}$. Από τη γραφική παράσταση φαίνεται ότι το πλάτος κάθε κοιλίας είναι $0,4\text{m}$, δηλαδή $2A$, πράγμα που σημαίνει ότι όλα τα σημεία που ταλαντώνονται τη στιγμή t_1 , βρίσκονται για πρώτη φορά, σε μέγιστη απομάκρυνση. Άρα $t_1=T/4$.

$$\text{Η περίοδος είναι } T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{4\pi}=\frac{1}{2}\text{s. Άρα } t_2=\frac{T}{4}+\frac{1}{6}\text{s}=\frac{1}{8}\text{s}+\frac{1}{6}\text{s}=\frac{14}{48}\text{s}=\frac{7}{24}\text{s}$$

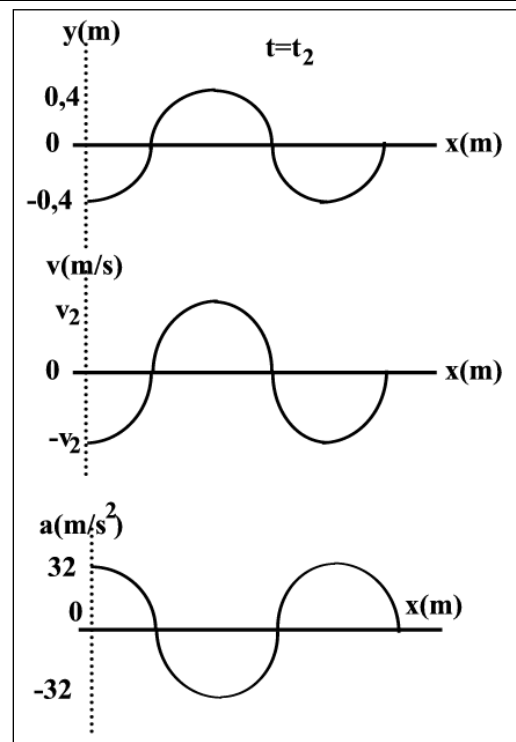
Υπολογίζω την απομάκρυνση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σημείου $x=0$ τη χρονική στιγμή $t_2=7/24\text{s}$

$$y_2=0,4\cdot\eta\mu\left(4\pi\cdot\frac{7}{24}\right)=0,4\cdot\eta\mu\left(7\pi/6\right)\rightarrow y_2=-0,2\text{m}$$

$$v_2=A'\omega\sin(\omega t)=1,6\pi\sin(7\pi/6)=-1,6\sqrt{3}/2\text{m/s}$$

$$\rightarrow v_2=-0,8\sqrt{3}\text{m/s}$$

$$\alpha_2=-\omega^2 y=-16\pi^2\cdot(-0,2)=3,2\pi^2\text{m/s}^2\rightarrow \alpha_2=32\text{m/s}^2$$



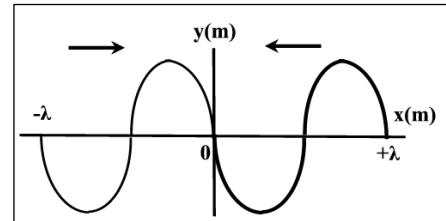
♣**SB3.17** Στο διπλανό σχήμα φαίνονται τα στιγμιότυπα δύο όμοιων κυμάτων που κινούνται στην ίδια ευθεία σε αντίθετες κατευθύνσεις και συμβάλουν τη χρονική στιγμή $t=0$. Το κάθε κύμα έχει μήκος κύματος λ , συχνότητα f και πλάτος A .

I. Η εξίσωση του στάσιμου κύματος που παράγεται είναι:

α. $y_{στ}=2A\sin(2\pi x/\lambda + \pi/2) \cdot \eta\mu(\omega t + \pi/2)$

β. $y_{στ}=2A\sin(2\pi x/\lambda - \pi/2) \cdot \eta\mu(\omega t + \pi/2)$

γ. $y_{στ}=2A\sin(2\pi x/\lambda + \pi/2) \cdot \eta\mu(\omega t - \pi/2)$



II. Να σχεδιαστεί στιγμιότυπο του στάσιμου τη χρονική στιγμή $t=T$ στο θετικό και αρνητικό ημιάξονα.

III. Η ταχύτητα του σημείου $x_1 = -\lambda/4$ τη χρονική στιγμή $t_1 = 5T/4$ είναι:

α. $v=A\omega$

β. $v=-A\omega$

γ. $v=A\omega\sqrt{3}$

δ. $v=-2A\omega$

Απάντηση

I. Το (1) κύμα έχει εξίσωση $y_1=A\eta\mu(\omega t - 2\pi x/\lambda)$, ενώ το (2) είναι $y_2=A\eta\mu(\omega t + 2\pi x/\lambda + \pi)$. Λόγω συμβολής η εξίσωση του στάσιμου θα είναι:

$$y_{ολ}=y_1+y_2=A\eta\mu(\omega t - 2\pi x/\lambda) + A\eta\mu(\omega t + 2\pi x/\lambda + \pi) = 2A\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow$$

$$y_{ολ}=2A\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\pi}{2}\right) \eta\mu\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{Σωστό είναι το (α)}$$

II. Τη χρονική στιγμή $t=T$ το κάθε κύμα έχει εισχωρήσει μέσα στο άλλο κατά $\Delta x=\lambda$. Συνεπώς το στάσιμο κύμα επεκτείνεται αυτή τη χρονική στιγμή στην περιοχή $-\lambda \leq x \leq \lambda$. Η εξίσωση του στάσιμου για $t=T$, θα είναι:

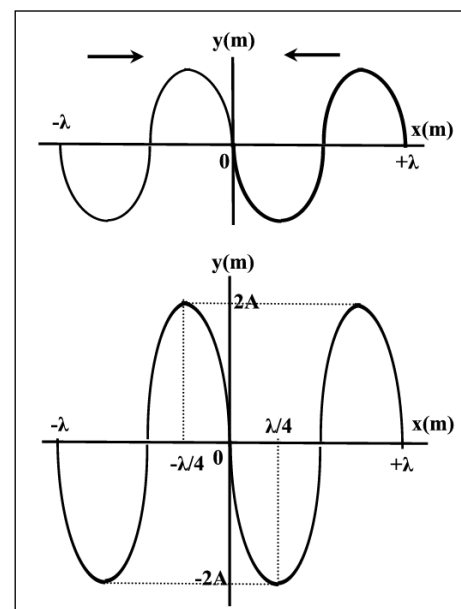
$$y_{ολ}=2A\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\pi}{2}\right) \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2A\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{για } -\lambda \leq x \leq \lambda$$

Το σημείο $x = -\lambda/4$ έχει απομάκρυνση $y_{ολ}=2A$.

Το σημείο $x=0$ έχει $y=0$

Το σημείο $x = +\lambda/4$ έχει απομάκρυνση $y_{ολ}=-2A$.

Η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα



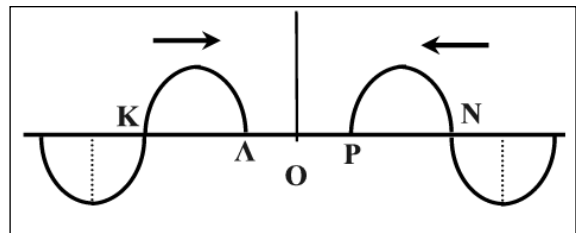
III. Η ταχύτητα: $v_{στ}=2A\omega \cdot \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

Τη χρονική στιγμή $t_1=5T/4$, το σημείο $x_1=-\lambda/4$ θα έχει ταχύτητα:

$$V=2A\omega \sin\left(\frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow v=-2A\omega \quad \text{Σωστό είναι το (δ)}$$

•**B.3.18** Οι δύο παλμοί του σχήματος έχουν το ίδιο πλάτος A και το ίδιο μήκος κύματος λ , κινούνται αντίθετα και τη χρονική στιγμή $t=0$ τα μέτωπα τους βρίσκονται σε απόσταση $OL=OP=\lambda/4$ από το O .

I. Να σχεδιαστούν εικόνες του ελαστικού μέσου τις χρονικές στιγμές $T/4$, $T/2$, $3T/4$ και T .



II. Αν τη χρονική στιγμή $t=0$ η ταχύτητα του σημείου της χορδής Λ είναι v να υπολογιστούν οι απομακρύνσεις y και οι ταχύτητες, V του σημείου της χορδής O , τις χρονικές στιγμές, $T/4$, $T/2$, $3T/4$, T .

Απάντηση

t	0	$T/4$	$T/2$	$3T/4$	T
y	0	0	$2A$	0	$-2A$
V	0	$2v$	0	$-2v$	0

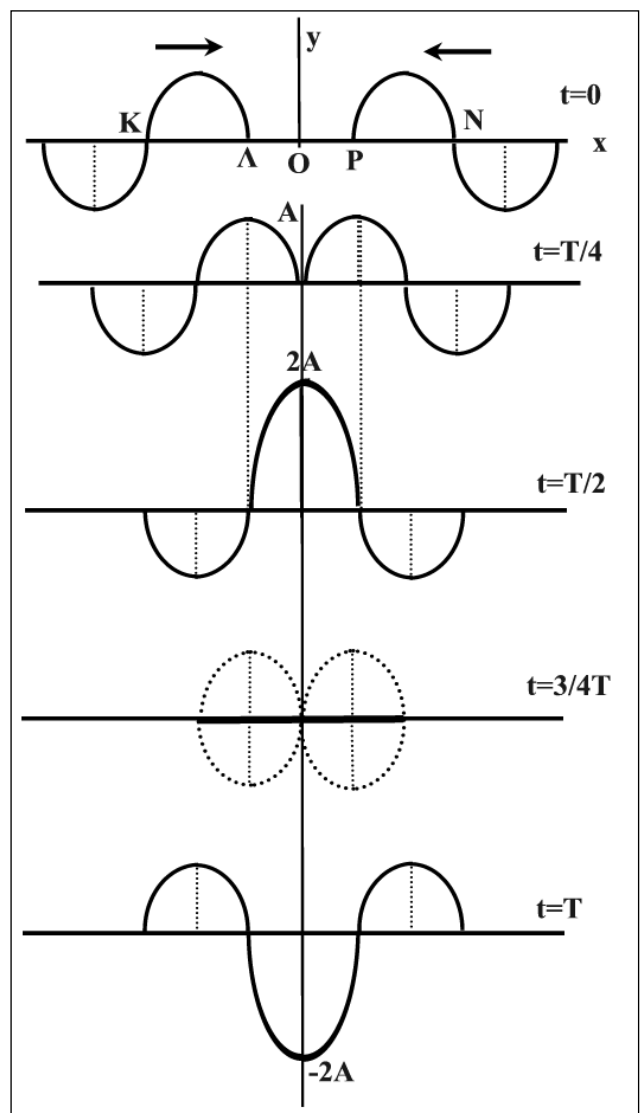
$t=0$: Τα κύματα δεν έχουν φτάσει ακόμα στο O , συνεπώς $y=0$ και $v=0$.

$t=T/4$: Τα κύματα φτάνουν μαζί στο O η απομάκρυνση είναι $y=0$ αλλά γίνεται πρόσθεση ταχυτήτων και η $V=v+v=2v$.

$t=T/2$: Και οι δύο λόφοι των κυμάτων βρίσκονται στο O άρα $y=A+A=2A$, ενώ $V=0+0=0$.

$t=3T/4$: Οι απομακρύνσεις που προκαλεί το κάθε κύμα στη χορδή είναι όλες αντίθετες και συνεπώς $y=0$. Η χορδή οριζοντιώνεται για μια στιγμή, μόνο. Στο σημείο O οι ταχύτητες και των δύο κυμάτων είναι αρνητικές (προς τα κάτω) συνεπώς $V=-v+(-v)=-2v$.

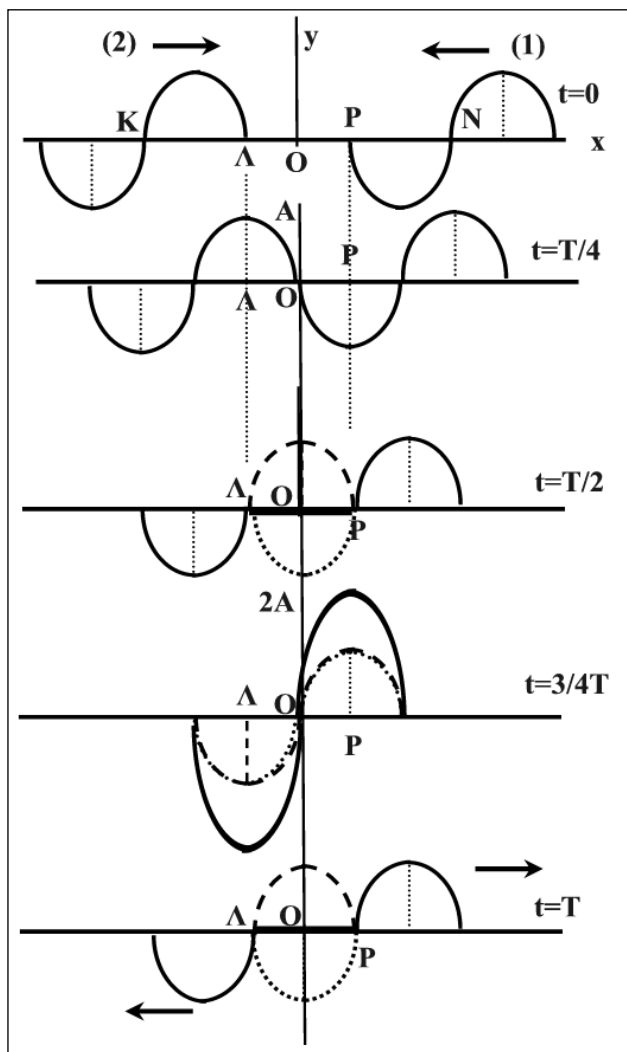
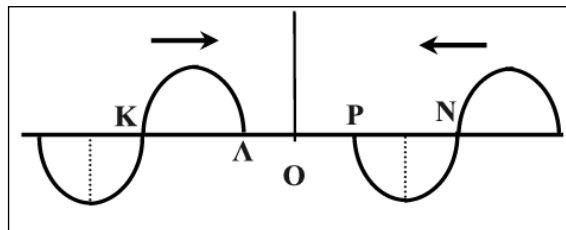
$t=T$: Οι απομακρύνσεις που προκαλούν τα δύο κύμα είναι $-A$. άρα $y=-A+(-A)=-2A$. Οι ταχύτητες είναι $v=0$ άρα $V=0$.



•**B.3.19** Οι δύο παλμοί του σχήματος έχουν το ίδιο πλάτος A και το ίδιο μήκος κύματος λ , κινούνται αντίθετα και τη χρονική στιγμή $t=0$ τα μέτωπα τους βρίσκονται σε απόσταση $OL=OP=\lambda/4$ από το O .

I. Να σχεδιαστούν εικόνες του ελαστικού μέσου τις χρονικές στιγμές $T/4$, $T/2$, $3T/4$ και T .

II. Αν τη χρονική στιγμή $t=0$ η ταχύτητα του σημείου της χορδής Λ είναι v και του P είναι $-v$ να υπολογιστούν οι απομακρύνσεις y και οι ταχύτητες, V των σημείων Λ και P , O τις χρονικές στιγμές, $T/4$, $T/2$, $3T/4$, T :



Απάντηση

I. $t=0$: Τα σημεία Λ και P έχουν $y_{\Lambda}=y_P=0$, και $v_{\Lambda}=v$, $v_P=-v$. Το σημείο O είναι ακόμα ακίνητο.

$t=T/4$: Τα κύματα φτάνουν στο O . Τα Λ και P βρίσκονται στη μέγιστη απομάκρυνσή τους $y_{\Lambda}=+A$, $y_P=-A$, το O είναι ακόμα στο $y=0$ και η ταχύτητά του είναι $V_O=+v+(-v)=0$.

$t=T/2$: Το μέτωπο του κύματος (1) έχει φτάσει στο Λ και του κύματος (2) στο P .

Τα σημεία Λ και P έχουν και πάλι $y_{\Lambda}=y_P=y_1+y_2=0+0=0$, αλλά οι ταχύτητες είναι $V_{\Lambda}=-v+(-v)=-2v$ και $V_P=v+v=2v$.

Στο O η απομάκρυνση είναι $y_O=-A+A=0$ και η ταχύτητα $V_O=0+0=0$. Το τμήμα ΛP οριζοντιώνεται.

$T=3T/4$: Για το Λ και το P : $y_{\Lambda}=-A+(-A)=-2A$ και $y_P=+A+A=2A$, και οι ταχύτητες είναι $V_{\Lambda}=V_P=0+0=0$. Το $y_O=0+0=0$ και η ταχύτητα $V_O=v+(-v)=0$.

$t=T$: $y_{\Lambda}=y_P=0+0=0$ και $V_{\Lambda}=v+v=2v$ και $V_P=-v+(-v)=-2v$. Για το O : $y_O=+A+(-A)=0$, $V_O=0$. Το ΛP οριζοντιώνεται.

II. Τα συμπεράσματα φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί

t	0	$T/4$	$T/2$	$3T/4$	T
y	$y_{\Lambda}=y_P=0$, $y_O=0$	$y_{\Lambda}=A$, $y_P=-A$, $y_O=0$	$y_{\Lambda}=y_P=0$, $y_O=0$	$y_{\Lambda}=2A$, $y_P=-2A$, $y_O=0$	$y_{\Lambda}=y_P=0$, $y_O=0$
V	$v_{\Lambda}=v$, $v_P=-v$, $V_O=0$	$v_{\Lambda}=0$, $v_P=0$, $V_O=0$	$v_{\Lambda}=-2v$, $v_P=2v$, $V_O=0$	$v_{\Lambda}=0$, $v_P=0$, $V_O=0$	$v_{\Lambda}=2v$, $v_P=-2v$, $V_O=0$

Στις γραφικές παραστάσεις βλέπουμε τα δύο κύματα και το στάσιμο που δημιουργείται, σταδιακά. Το σημείο O παραμένει συνεχώς ακίνητο.

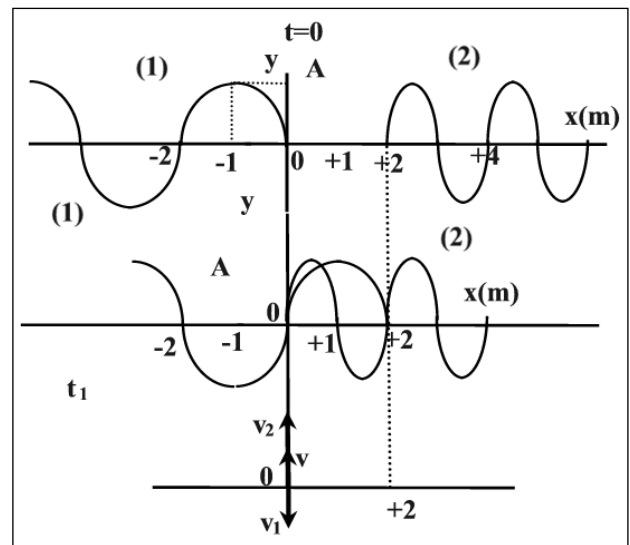
► **SB3.20** Δύο εγκάρσια κύματα ίδιου πλάτους οδεύουν κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, το (1) προς τη θετική φορά και το (2) προς την αρνητική. Στο σχήμα φαίνονται τα στιγμιότυπα των κυμάτων τη χρονική στιγμή $t=0$. Το σημείο $x=+2\text{m}$ έχει τη χρονική στιγμή $t=0$ ταχύτητα ταλάντωσης $v_2=+0,2\text{m/s}$. Κάποια χρονική στιγμή t_1 που το κύμα (1) θα φτάσει στη θέση $x=+2\text{m}$, το σημείο $x=0$ θα έχει ταχύτητα α .

$$\alpha. v_1=0,1\text{m/s}$$

$$\beta. v_1=0,3\text{m/s}$$

$$\gamma. v_1=-0,1\text{m/s}$$

$$\delta. v_1=-0,3\text{m/s}$$



Απάντηση: (α)

Τα κύματα τρέχουν στο ίδιο ελαστικό μέσο και συνεπώς έχουν την ίδια ταχύτητα διάδοσης. Το (1) έχει $\lambda_1=4\text{m}$ και συχνότητα f_1 , το (2) έχει $\lambda_2=2\text{m}$ και συχνότητα f_2 .

$$v=\lambda_1 f_1=\lambda_2 f_2 \rightarrow f_2=2f_1$$

Το σημείο $x=+2\text{m}$ έχει τη χρονική στιγμή $t=0$ μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης λόγω του κύματος (2) αφού είναι στη θέση ισορροπίας και κινείται με θετική φορά. Άρα $|v_{02}|=0,2\text{m/s}$. Η αντίστοιχη μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης των σημείων της χορδής λόγω του κύματος (1) θα έχει μέτρο $|v_{01}|$ που μπορεί να υπολογιστεί αφού το πλάτος είναι κοινό και γνωρίζουμε τη σχέση των συχνοτήτων.

$$|v_{0,1}|=A \cdot 2\pi f_1 \quad \text{και} \quad |v_{0,2}|=A \cdot 2\pi f_2=0,2\text{m/s}.$$

$$\text{Άρα: } |v_{01}|=A \cdot 2\pi f_1=A \cdot 2\pi \frac{f_2}{2}=\frac{|v_{02}|}{2} \rightarrow |v_{01}|=+0,1\text{m/s}$$

Τη χρονική στιγμή t_1 το κύμα (1) θα έχει διανύσει απόσταση $\Delta x=2\text{m}$, ίδια με αυτή που θα έχει διανύσει και το κύμα (2) αφού τρέχουν με την ίδια ταχύτητα. Άρα το μέτωπο του κύματος (2) θα έχει φτάσει στη θέση $x=0$.

Το σημείο $x=0$ θα έχει δύο ταχύτητες. Η μία λόγω του κύματος (1) θα έχει φορά αρνητική και θα είναι $v_1=-|v_{01}|=-0,1\text{m/s}$ και η άλλη λόγω του κύματος (2) θετική $v_2=|v_{02}|=0,2\text{m/s}$. Από τη σύνθεση των ταχυτήτων:

$$v=v_1+v_2=-0,1\text{m/s}+0,2\text{m/s} \rightarrow v=0,1\text{m/s}.$$

ΣΓ3. Λυμένα Γ Θέματα στα Στάσιμα Κύματα

ΣΓ3.1 Τεντωμένη οριζόντια χορδή ΟΔ μήκους $L=0,75\text{m}$ εκτείνεται κατά τη διεύθυνση του άξονα x . Το άκρο του Δ είναι στερεωμένο ακλόνητα στη θέση $x=L$, ενώ το άκρο του Ο στη θέση $x=0$ είναι ελεύθερο, έτσι ώστε με κατάλληλη διαδικασία να δημιουργείται στάσιμο κύμα με 3 συνολικά κοιλίες. Στη θέση $x=0$ εμφανίζεται κοιλία και το σημείο εκτελεί ΑΑΤ. Τη χρονική στιγμή $t_0=0$ το σημείο $x=0$ έχει $y=0$ και κινείται κατά τη θετική φορά. Σημείο Ζ της χορδής απέχει από το Ο απόσταση $x_Z=0,375\text{m}$ και ταλαντώνεται με πλάτος $0,1\sqrt{2}\text{m}$. Κάθε $0,2\text{s}$ όλα τα σημεία της χορδής ευθυγραμμίζονται.

Α. Να βρείτε την ταχύτητα των τρεχόντων κυμάτων που διαδίδονται στη χορδή.

Β. Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος.

Γ. Να σχεδιάσετε στιγμιότυπα του στάσιμου κύματος στο θετικό ημιάξονα Ox , κάποια στιγμή t_1 που το Ο φτάνει στη μέγιστη θετική και κάποια στιγμή t_2 που φτάνει στη μέγιστη αρνητική απομάκρυνση.

Δ. Να βρείτε την ταχύτητα ταλάντωσης του σημείου Ζ τη στιγμή που το Ο περνάει από τη θέση ισορροπίας του κινούμενο κατά τη θετική φορά.

Ε. Να βρείτε τις θέσεις, x , όλων των σημείων της χορδής που έχουν πλάτος ταλάντωσης ίσο με A , όπου A το πλάτος των τρεχόντων κυμάτων που δημιούργησαν το στάσιμο κύμα.

Λύση

Α. Στη χορδή ΟΔ δημιουργούνται 3 κοιλίες, άρα και τρεις δεσμοί. Στο άκρο Ο υπάρχει κοιλία ενώ στο σταθερό άκρο, Δ, δεσμός. Το μήκος της χορδής ισούται με τη θέση του τρίτου δεσμού, δηλαδή την απόσταση $(O\Delta)=L$. Άρα:

$$L=(2k+1)\lambda/4 \xrightarrow{k=2} L=5\lambda/4 \rightarrow \lambda=4L/5 \rightarrow \lambda=0,6\text{m}.$$

Τα σημεία ευθυγραμμίζονται όποτε περνούν όλα από τη θέση ισορροπίας τους, δηλαδή κάθε $T/2$ όπου T η περίοδος. Άρα $T/2=0,2\text{s} \rightarrow T=0,4\text{s} \rightarrow f=2,5\text{Hz}$ και $\omega=5\pi\text{rad/s}$.

Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων είναι: $v=\lambda \cdot f \rightarrow v=1,5\text{m/s}$.

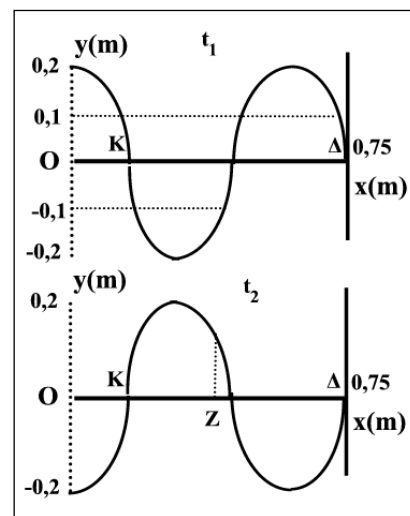
Β. Το πλάτος του σημείου Ζ: $|A_Z|=2A|\sin\frac{2\pi x_Z}{\lambda}| \rightarrow 0,1\sqrt{2}=2A|\sin 1,25\pi| \rightarrow 0,1\sqrt{2}=2A\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow A=0,1\text{m}.$

Άρα, $y=2A\sin(2\pi x/\lambda) \cdot \eta\mu(\omega t) \rightarrow y=0,2\sin\frac{10\pi x}{3} \eta\mu 5\pi t$ (SI).

Γ. Τα στιγμιότυπα φαίνονται στο διπλανό σχήμα.

Δ. Τα Ζ και Ο βρίσκονται εκατέρωθεν του δεσμού, Κ και σε αποστάσεις μικρότερες από $\lambda/2$, όπως φαίνεται και στο στιγμιότυπο. Συνεπώς έχουν διαφορά φάσης, π rad και αυτό σημαίνει ότι κάθε χρονική στιγμή θα έχουν αντίθετες απομακρύνσεις και αντίθετες ταχύτητες. Όλα τα σημεία της χορδής που ταλαντώνονται περνάνε ταυτόχρονα από τη θέση ισορροπίας τους. Άρα τη στιγμή που το Ο θα περνάει από τη θέση ισορροπίας με θετική φορά και θα έχει μέγιστη θετική ταχύτητα, το Ζ θα έχει μέγιστη κατά μέτρο ταχύτητα αλλά με αρνητικό πρόσημο.

$$v_Z=-A_Z \cdot \omega = -A_Z \cdot 2\pi f = -(0,1\sqrt{2}\text{m}) \cdot 2\pi \cdot (2,5 \text{ rad/s}) \rightarrow v_Z=-0,5\sqrt{2}\text{m/s}.$$



$$\text{E. } |A'|=A \rightarrow 0,2 \left| \sin \frac{10\pi x}{3} \right| = 0,1 \rightarrow \left| \sin(10\pi x/3) \right| = 1/2 \rightarrow \sin(10\pi x/3) = \pm 1/2$$

$$\sin(10\pi x/3) = +1/2 \rightarrow \sin(10\pi x/3) = \sin(\pi/3) \rightarrow 10\pi x/3 = 2\kappa\pi - \pi/3 \text{ (1) και } 10\pi x/3 = 2\kappa\pi + \pi/3 \text{ (2)}$$

$$\text{Για } \kappa=0 \text{ στη (2)} \rightarrow \mathbf{x_1=0,1m}$$

$$\text{για } \kappa=1 \text{ στη (1)} \rightarrow \mathbf{x_2=0,5m,}$$

$$\text{για } \kappa=1 \text{ στη (2)} \rightarrow \mathbf{x_3=0,7m.}$$

$$\sin(10\pi x/3) = -1/2 \rightarrow \sin(10\pi x/3) = \sin(\pi - \pi/3) \rightarrow 10\pi x/3 = 2\kappa\pi - 2\pi/3 \text{ (3) και } 10\pi x/3 = 2\kappa\pi + 2\pi/3 \text{ (4)}$$

$$\text{Για } \kappa=1 \text{ στην (3)} \rightarrow \mathbf{x_4=0,4m}$$

$$\text{Για } \kappa=0 \text{ στη (4)} \rightarrow \mathbf{x_5=0,2m.}$$

Συνολικά **5 σημεία**.

ΣΓ3.2 Χορδή ΟΔ, μήκους $L=1,8\text{m}$ είναι σταθερή στο ένα άκρο της, Δ και ελεύθερη στο άλλο, Ο. Πάνω στη χορδή σχηματίζονται στάσιμα κύματα με κοιλία στο ελεύθερο άκρο. Ανάμεσα στα δύο άκρα της χορδής υπάρχουν το πολύ 9 σημεία που ταλαντώνονται με το ίδιο πλάτος και δεν είναι κοιλίες. Η απόσταση μεταξύ δύο ακραίων θέσεων μια κοιλίας είναι 8cm . Κάθε σημείο που ταλαντώνεται περνάει από τη θέση ισορροπίας του 1800 φορές κάθε 10s . Να βρεθούν:

A. Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων που συμβάλλουν και δημιουργούν το στάσιμο κύμα.

B. Το μέτρο της ταχύτητας ταλάντωσης μιας κοιλίας της χορδής τη στιγμή που βρίσκεται σε απομάκρυνση $2\sqrt{3}\text{cm}$ από τη θέση ισορροπίας της.

Γ. Η ελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο σημείων της χορδής που ταλαντώνονται με πλάτος $2\sqrt{2}\text{cm}$.

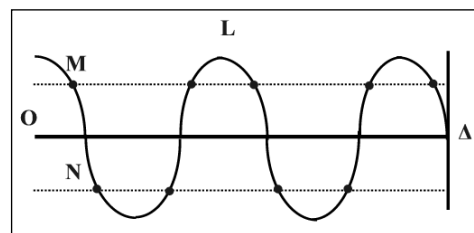
Δ. Έστω ότι τα σημεία της ίδιας χορδής ταλαντώνονται με συχνότητα $f_1=150\text{Hz}$. Να υπολογιστούν ο συνολικός αριθμός των κοιλιών και ο αριθμός των κοιλιών και οι θέσεις που σχηματίζονται μεταξύ των σημείων Κ και Λ με $x_K=0,3\text{m}$ και $x_\Lambda=0,9\text{m}$.

Λύση

A. Για να περνάει 1800 φορές από τη θέση ισορροπίας κάθε 10s σημαίνει ότι κάνει $N=900$ πλήρεις ταλαντώσεις στο διάστημα αυτό. Άρα $f=N/\Delta t=900/10 \rightarrow f=90\text{Hz}$.

Αν κάνουμε ένα στιγμιότυπο του στάσιμου σε μια στιγμή που όλα τα σημεία βρίσκονται σε μέγιστη απομάκρυνση, τότε βλέπουμε ότι για να υπάρχουν 9 σημεία που να έχουν το ίδιο πλάτος κατά απόλυτη τιμή πρέπει να υπάρχουν και 5 κοιλίες. Από το σχήμα φαίνεται ότι:

$$L=4\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} \rightarrow L=\frac{9\lambda}{4} \rightarrow \lambda=0,8\text{m}. \text{ Άρα } v=\lambda \cdot f=90 \cdot 0,8 \rightarrow v=72\text{m/s}.$$



B. Το πλάτος ταλάντωσης μιας κοιλίας είναι $A'=8\text{cm}/2=4 \cdot 10^{-2}\text{m}$. Γράφω την ΑΔΕ για τις ΑΑΤ της κοιλίας

και βρίσκω την ταχύτητα ταλάντωσης $|v_1|$, για απομάκρυνση $y_1=2\sqrt{3} \cdot 10^{-2}\text{m}$.

$$E=K+U \rightarrow \frac{1}{2}DA'^2 = \frac{1}{2}Dy_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 \rightarrow m\omega^2 A'^2 = m\omega^2 y_1^2 + mv_1^2 \rightarrow |v_1| = \omega \sqrt{A'^2 - y_1^2} \rightarrow |v_1| = 3,6\pi\text{m/s}$$

Γ. Ας υποθέσουμε ότι στο στιγμιότυπο τα σημεία αυτά είναι τα Μ και Ν.

$$A' = 2A|\sin(2\pi x/\lambda)| \rightarrow 2\sqrt{2} = 4|\sin(2\pi x/\lambda)| \rightarrow \sin(2\pi x/\lambda) = \pm\sqrt{2}/2.$$

$$\sin(2\pi x/\lambda) = \sqrt{2}/2 \rightarrow \sin(2\pi x/\lambda) = \sin\pi/4 \xrightarrow{k=0} 2\pi x/\lambda = \pi/4 \rightarrow x_M = 0,1\text{m}$$

$$\sin(2\pi x/\lambda) = -\sqrt{2}/2 \rightarrow \sin(2\pi x/\lambda) = \sin(3\pi/4) \xrightarrow{k=0} 2\pi x/\lambda = 3\pi/4 \rightarrow x_N = 0,3\text{m}.$$

$$\text{Άρα: } \Delta x = x_N - x_M = 0,2\text{m}.$$

Δ. Η χορδή ταλαντώνεται με συχνότητα $f_1=150\text{Hz}$ αλλά η ταχύτητα διάδοσης μένει η ίδια $v=72\text{m/s}$, αφού εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά της χορδής που δεν αλλάξαν. Τότε το μήκος κύματος είναι :

$$\lambda_1 = \frac{v}{f_1} = 72/150 \rightarrow \lambda_1 = 0,48\text{m}.$$

Οι θέσεις των κοιλιών δίνονται από τη σχέση $x = \frac{k\lambda_1}{2}$. Για όλες τις κοιλίες μεταξύ του 0 και του $1,8\text{m}$

$$\text{έχουμε: } 0 \leq x < 1,8\text{m} \rightarrow 0 \leq \frac{k\lambda_1}{2} < 1,8\text{m} \rightarrow 0 \leq k < 7,5 \rightarrow k=0,1,2,3,4,5,6,7. \text{ Άρα } 8 \text{ κοιλίες.}$$

Για κοιλίες μεταξύ των θέσεων $0,3\text{m}$ και $0,9\text{m}$, έχουμε:

$$0,3\text{m} < x < 0,9\text{m} \rightarrow 0,3\text{m} < \frac{k\lambda_1}{2} < 0,9\text{m} \rightarrow 1,25 < k < 3,75 \rightarrow k=2,3. \text{ Άρα } 2 \text{ κοιλίες.}$$

Άρα από τη σχέση, $x=k\lambda_1/2$, έχουμε $x_1=0,48\text{m}$, $x_2=0,72\text{m}$, $x_3=0,8\text{m}$.

ΣΓ3.3 Κατά μήκος μιας χορδής μήκους $L=36\text{cm}$ δημιουργείται στάσιμο κύμα. Στο ένα άκρο, (θέση O με $x=0$) θεωρούμε ότι σχηματίζεται κοιλία η οποία τη χρονική στιγμή $t=0$ βρίσκεται στην θέση ισορροπίας της και κινείται προς το θετικό άκρο της. Το άλλο άκρο K είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Το ελάχιστο χρονικό διάστημα για να μετατραπεί η μέγιστη κινητική ενέργεια της κοιλίας σε μέγιστη δυναμική είναι $\Delta t = 0,025\text{ sec}$. Η ελάχιστη απόσταση δύο διαδοχικών κοιλιών είναι 8cm ενώ η μέγιστη 10cm .

A. Να βρεθούν η ταχύτητα διάδοσης και το πλάτος των κυμάτων που με τη συμβολή τους μας έδωσαν το στάσιμο κύμα

B. Να γραφεί η εξίσωση του στάσιμου κύματος.

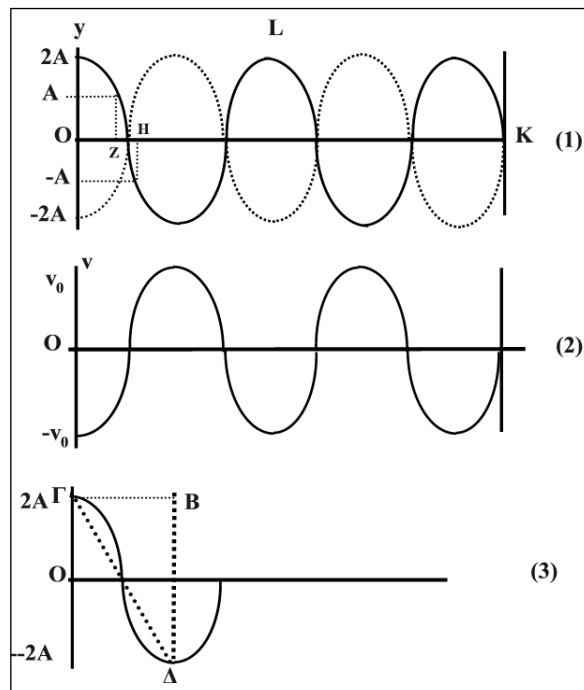
Γ. Να σχεδιαστούν:

Γ₁. Το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος, τις χρονικές στιγμές $t_1 = 0,225\text{ s}$ και $t_2 = 0,275\text{ s}$ σε κοινό διάγραμμα.

Γ₂. Η γραφική παράσταση $v=f(x)$ τη χρονική στιγμή $t_3=0,250\text{ s}$.

A. Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο σημείων της χορδής που ταλαντώνονται με πλάτος ίσο με το πλάτος των κυμάτων που η συμβολή τους έδωσε το στάσιμο κύμα.

E. Κατά πόσο πρέπει να μεταβληθεί η συχνότητα ώστε πάνω στην ίδια χορδή να σχηματιστούν δύο περισσότερες κοιλίες, χωρίς να αλλάξει το πλάτος και η κινητική κατάσταση των άκρων O και K της χορδής.



Λύση

A. Η κινητική ενέργεια γίνεται όλη δυναμική από τη μετακίνηση του υλικού σημείου από τη θέση ισορροπίας στο πλάτος άρα $\Delta t = T/4 \rightarrow T = 4 \cdot 0,025 \rightarrow T = 0,1\text{ s}$. Άρα $f = 10\text{ Hz}$ και $\omega = 20\pi\text{ rad/s}$

Η ελάχιστη απόσταση δύο διαδοχικών κοιλιών είναι η $\Gamma B = \lambda/2 = 8\text{ cm} \rightarrow \lambda = 16\text{ cm} \rightarrow \lambda = 0,16\text{ m}$

Άρα $v = \lambda \cdot f \rightarrow v = 1,6\text{ m/s}$

Η μέγιστη απόσταση των κοιλιών είναι $\Gamma \Delta$ και από το ορθογώνιο τρίγωνο $\Gamma B \Delta$ (σχήμα 3) ισχύει:

$$B\Delta = \sqrt{(\Gamma \Delta)^2 - (\Gamma B)^2} \rightarrow (B\Delta) = 4A = 6\text{ cm} \rightarrow A = 1,5\text{ cm} = 1,5 \cdot 10^{-2}\text{ m}$$

B. Με βάση τα δεδομένα η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι της μορφής

$$y_0 = 2A \sin(2\pi x/\lambda) \cdot \eta \mu \omega t \rightarrow y_0 = 0,03 \sin(12,5\pi x) \cdot \eta \mu 20\pi t \quad (\text{SI})$$

Γ. Στο ακλόνητο άκρο K με $x_K = 36\text{ cm}$ σχηματίζεται πάντοτε δεσμός. Συνεπώς το μήκος L ταυτίζεται με τη θέση του τελευταίου δεσμού της χορδής

$$L = x_\delta = (2k+1) \frac{\lambda}{4} \rightarrow 2k+1 = \frac{4 \cdot 36\text{ cm}}{16\text{ cm}} \rightarrow 2k+1 = 9 \rightarrow k = 4, \text{ συνεπώς σχηματίζονται 5 δεσμοί.}$$

Τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,225\text{ s} = T/4$ όλα τα σημεία βρίσκονται σε μέγιστη απομάκρυνση με το $x=0$ να είναι στη θέση $y=2A$ ενώ τη χρονική στιγμή $t_2 = 0,275\text{ s} = 3T/4$, τα σημεία είναι και πάλι στη μέγιστη απομάκρυνσή τους αλλά τώρα το σημείο $x=0$ είναι στην θέση $y=-2A$. Με βάση αυτά τα δύο

στιγμιότυπα φαίνονται στο σχήμα (1). Τη χρονική στιγμή $t_3=0,250s=T/2$ όλα τα σημεία διέρχονται ταυτόχρονα από τη θέση ισορροπίας τους με το $x=0$ να έχει φορά προς τα αρνητικά, διότι: $v_0=2A\omega\sin(2\pi x/\lambda)\sin(\omega t)=0,6\pi\cdot\sin(5\pi)=-0,6\pi\text{m/s}$. Με βάση την ταχύτητα του Ο και με το γεγονός ότι οι δεσμοί είναι μονίμως ακίνητοι η γραφική παράσταση, $v=f(x)$ φαίνεται στο σχήμα (2).

Δ. Από το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t=T/4$ μπορούμε να δούμε ότι δύο τέτοια σημεία, πχ. τα δύο πρώτα Ζ και Η, βρίσκονται εκατέρωθεν ενός δεσμού και έχουν την κάθε στιγμή αντίθετες απομακρύνσεις. Συνεπώς όταν το Ζ έχει $A'=A$, το Η έχει $A'=-A$.

$$A'=2A\sin(2\pi x/\lambda)\rightarrow A=2A\sin(2\pi x/\lambda)\rightarrow \sin(2\pi x/\lambda)=1/2\rightarrow$$

$$\sin(2\pi x/\lambda)=\sin(\pi/3)\rightarrow 2\pi x/\lambda=2k\pi+\pi/3 \text{ (1) και } 2\pi x/\lambda=2k\pi-\pi/3 \text{ (2)}$$

$$(1) \xrightarrow{k=0} 2\pi x_1/\lambda=\pi/3\rightarrow x_1=\lambda/6$$

$$A'=2A\sin(2\pi x/\lambda)\rightarrow -A=2A\sin(2\pi x/\lambda)\rightarrow \sin(2\pi x/\lambda)=-1/2\rightarrow \sin(2\pi x/\lambda)=\sin(2\pi/3)$$

$$2\pi x/\lambda=2k\pi+2\pi/3 \text{ (3) και } 2\pi x/\lambda=2k\pi-2\pi/3 \text{ (4)}$$

$$(3) \xrightarrow{k=0} x_Z=\lambda/3$$

$$\text{Άρα } \Delta x=(ZH)=(\lambda/3-\lambda/6)\rightarrow \Delta x=\lambda/6\rightarrow \Delta x=8/3\text{cm}$$

Ε. Δύο κοιλίες παραπάνω σημαίνει και 2 δεσμοί παραπάνω άρα συνολικά 7 δεσμοί οπότε το $k'=6$. Άρα το μήκος κύματος γίνεται λ' και η συχνότητα f' .

$$L=(2k'+1)\frac{\lambda'}{4}\rightarrow L=(2k'+1)\frac{v}{4f'}\rightarrow f'=(2k'+1)\frac{v}{4L}\rightarrow f'=\frac{13v}{4L}\rightarrow f'=\frac{130}{9}\text{ Hz}$$

$$\text{Άρα η μεταβολή είναι } \Delta f=f'-f=\frac{130}{9}-10\rightarrow \Delta f=40/9\text{Hz}$$

ΣΓ3.4 Κατά μήκος μιας ελαστικής χορδής μήκους $ΟΔ=L=16,25\text{m}$ διαδίδεται αρμονικό κύμα της μορφής: $y=0,8\mu\text{m}(10\pi t-0,4\pi x)$, (SI) Το ένα άκρο της χορδής Δ είναι στερεωμένο ακλόνητα, με αποτέλεσμα το κύμα να ανακλαστεί και να δημιουργηθεί στάσιμο κύμα. Το άλλο άκρο Ο της χορδής είναι ελεύθερο, δημιουργείται σε αυτό κοιλία και θεωρούμε ότι βρίσκεται στη θέση $x=0$. Ως $t=0$ θεωρούμε τη χρονική στιγμή που τα δύο κύματα βρίσκονται στο σημείο Ο και αρχίζει η συμβολή.

A. Να υπολογίσετε το χρονικό διάστημα που χρειάζεται το μέτωπο του ανακλώμενου κύματος για να διανύσει την απόσταση (ΔΟ).

B. Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος που σχηματίζεται.

Γ. Να βρείτε τον αριθμό των κοιλιών και των δεσμών που δημιουργούνται πάνω στη χορδή.

Δ. Να βρείτε την εξίσωση της ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου για το σημείο Κ που απέχει $2,5\text{m}$ από το σημείο Ο.

Ε. Πόση είναι η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων του σημείου Κ και του σημείου Λ που βρίσκεται στη θέση $x_L=5\text{m}$.

Στ. Αν ένα σημείο Μ της χορδής ταλαντώνεται με πλάτος $|A_M|=0,4\sqrt{3}\text{m}$, να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου αυτού από τον πλησιέστερο προς αυτό δεσμό.

Ζ. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις της απομάκρυνσης, y , και της ταχύτητας, v , όλων των σημείων της χορδής σε συνάρτηση με την απόσταση x σε δύο χρονικές στιγμές t_1 , $t_2=t_1+T/4$ και $t_3=t_1+T/2$. Η t_1 είναι μια χρονική στιγμή που η κοιλία $x=0$ βρίσκεται στη μέγιστη θετική της απομάκρυνση.

Λύση

A. Από την εξίσωση του τρέχοντος κύματος $y=0,8\mu\text{m}(10\pi t-0,4\pi x)$ καταλαβαίνουμε ότι:

Το πλάτος είναι $A=0,8\text{m}$, η γωνιακή συχνότητα $\omega=10\pi\text{ rad/s}$ άρα και η συχνότητα $f=5\text{Hz}$ και το μήκος κύματος, $2\pi x/\lambda=0,4\pi x \rightarrow \lambda=5\text{m}$. Άρα η ταχύτητα διάδοσης είναι $v=\lambda f=25\text{m/s}$. Οπότε για να διανύσει το ανακλώμενο κύμα την απόσταση (ΔΟ)= $16,25\text{m}$ θα χρειαστεί χρόνο

$$\Delta t = \frac{\Delta O}{v} \rightarrow \Delta t = \frac{16,25\text{m}}{25\text{m/s}} \rightarrow \Delta t = 0,65\text{s}$$

B. Με τα κύματα να έχουν εξισώσεις $y_1=0,8\mu\text{m}(10\pi t-0,4\pi x)$ και $y_2=0,8\mu\text{m}(10\pi t+0,4\pi x)$ το στάσιμο που δημιουργείται από τη συμβολή τους έχει εξίσωση

$$y_{\text{στ}} = 2A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \cdot \eta\mu(\omega t) \rightarrow y_{\text{στ}} = 1,6 \sin(0,4\pi x) \eta\mu 10\pi t \text{ (SI)}$$

Γ. Η θέση των κοιλιών δίνεται από τη σχέση $x_k = k\lambda/2 = 2,5k\text{ m}$. Στο μήκος $d=16,25\text{m}$ θα έχουμε

$$0 \leq x_k \leq 16,25\text{m} \rightarrow 0 \leq 2,5k \leq 16,25 \rightarrow 0 \leq k < 6,5 \text{ Άρα το } k \text{ έχει τιμές } k=0,1,2,3,4,5,6. \text{ Δηλαδή } \mathbf{7 \text{ κοιλίες}}$$

Η θέση των δεσμών δίνεται από τη σχέση: $x_\delta = (2k+1)\lambda/4 = (2k+1) \cdot 1,25\text{m}$. Στο μήκος $d=16,25\text{m}$ θα έχουμε:

$$0 \leq x_\delta < 16,25\text{m} \rightarrow 0 \leq (2k+1) \cdot 1,25 \leq 16,25 \rightarrow 0 \leq 2k+1 \leq 13 \rightarrow -0,5 < k \leq 6 \text{ άρα } k=0,1,2,3,4,5,6 \text{ δηλαδή } \mathbf{7 \text{ δεσμοί.}}$$

Δ. Το πλάτος του σημείου Κ με $x=2,5\text{m}$ είναι: $A_K' = 1,6 \cdot \sin(0,4\pi x) = 1,6 \sin(\pi) = -1,6\text{m}$

Η εξίσωση ταχύτητας θα είναι $v_K = v_0 \sin(10\pi t) = A_K' \cdot \omega \cdot \sin(10\pi t) \rightarrow v_K = -16\pi \sin(10\pi t) \text{ (SI)}$

Ε. Το πλάτος της ΑΑΤ του Λ είναι: $A_\Lambda' = 1,6 \cdot \sin(0,4\pi x) = 1,6 \sin(2\pi) = 1,6\text{m}$

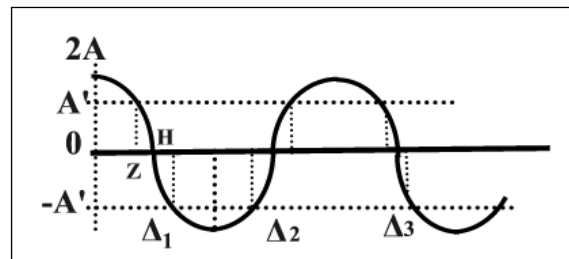
Άρα οι εξισώσεις απομάκρυνσης των Κ και Λ θα είναι:

$$y_K = -1,6 \cdot \eta\mu 10\pi t = 1,6 \eta\mu(10\pi t + \pi) \text{ (SI)}$$

$$\text{και } y_\Lambda = 1,6 \cdot \eta\mu 10\pi t \text{ (SI)}$$

Άρα τα σημεία έχουν διαφορά φάσης $\Delta\phi = \pi \text{ rad}$.

Στ. Η θέση του κάθε δεσμού δίνεται από τη σχέση:
 $x_\delta = (2\kappa + 1)\lambda/4 \quad (1)$



Η θέση x των σημείων που έχουν πλάτος ταλάντωσης, $|A'| = 0,4\sqrt{3}\text{m}$, θα είναι:

$$|A'| = 0,4\sqrt{3} \rightarrow |0,8 \sin(2\pi x/\lambda)| = 0,4\sqrt{3} \rightarrow |\sin(2\pi x/\lambda)| = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow |\sin(2\pi x/\lambda)| = \sin(\pi/6) \rightarrow$$

$$\rightarrow 2\pi x/\lambda = \kappa\pi \pm \pi/6 \rightarrow x = (6\kappa \pm 1)\frac{\lambda}{2} \quad (2)$$

Η μεταξύ τους απόσταση είναι: $\Delta x = x_\delta - x = (2\kappa + 1)\frac{\lambda}{4} - (6\kappa \pm 1)\frac{\lambda}{12} = \frac{\kappa\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} - \frac{\kappa\lambda}{2} \pm \frac{\lambda}{12} \rightarrow$

$$\Delta x = \frac{\lambda}{4} \pm \frac{\lambda}{12} \quad (3)$$

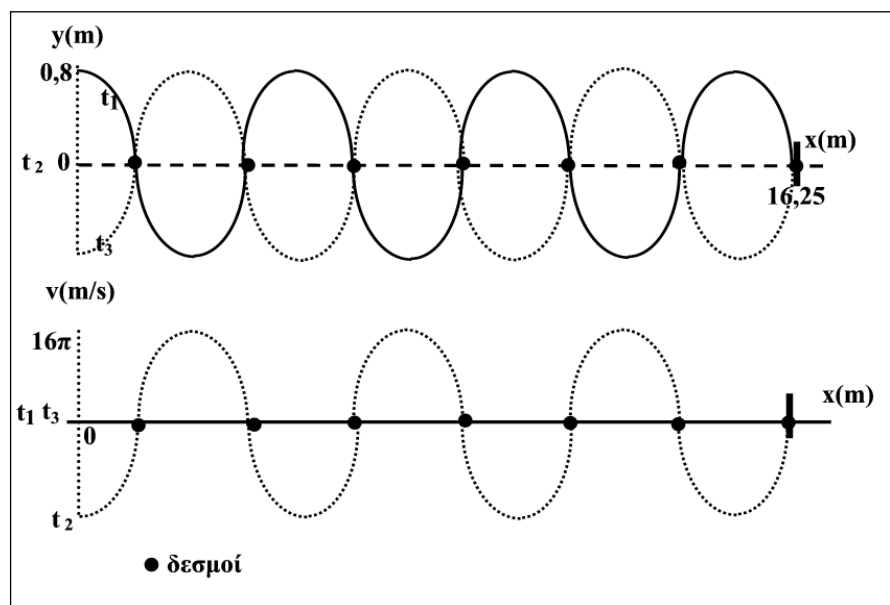
Θέτοντας (+) στη σχέση (3) έχουμε $\Delta x = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{12} = \frac{\lambda}{3} > \frac{\lambda}{4}$ άτοπον, διότι τότε δεν θα είναι η απόσταση από τον πλησιέστερο δεσμό, αλλά από κάποιον άλλο μακρύτερο.

Θέτοντας (−) στη σχέση (3) έχουμε $\Delta x = \frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{12} \rightarrow \Delta x = \frac{\lambda}{6} \rightarrow \Delta x = 5/6\text{m}$

Ζ. Τη χρονική στιγμή t_1 τα σημεία που κινούνται βρίσκονται στη μέγιστη απομάκρυνσή τους και η ταχύτητες όλων είναι μηδέν.

Τη χρονική στιγμή t_2 όλα τα σημεία περνάνε από τη θέση ισορροπίας, η χορδή γίνεται οριζόντια και οι απόλυτες τιμές των ταχυτήτων είναι μέγιστες.

Τη χρονική στιγμή t_3 τα σημεία βρίσκονται και πάλι στη μέγιστη απομάκρυνση (στις αντίθετες θέσεις) και οι ταχύτητες είναι μηδενικές. Οι δεσμοί σε όλη τη διάρκεια της κίνησης είναι ακίνητοι.



•**ΣΓ3.5** Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου, διαδίδονται δύο εγκάρσια κύματα με αντίθετες κατευθύνσεις. Τα κύματα φτάνουν τη στιγμή $t=0$, σε ένα σημείο του μέσου Σ, στη θέση $x_Σ=4\text{m}$. Το σημείο αυτό εξαιτίας κάθε κύματος ξεκινά να ταλαντώνεται με εξίσωση $y=0,2\cdot\eta\mu(\pi t)$ (S.I). Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων είναι $v=2\text{m/s}$.

A. Να βρεθούν η περίοδος και το μήκος κύματος του κάθε κύματος.

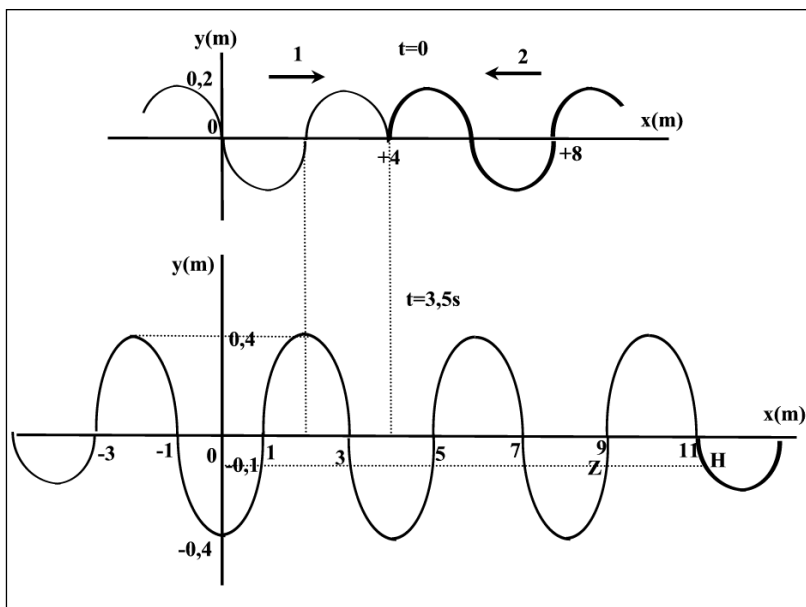
B. Να βρεθούν οι εξισώσεις των δύο κυμάτων.

Γ. Να βρεθεί η εξίσωση του στάσιμου που προκύπτει από την συμβολή των δύο παραπάνω κυμάτων.

Δ. Πόσοι δεσμοί και πόσες κοιλίες έχουν σχηματιστεί πάνω στο μέσο τη χρονική στιγμή $t_1=3,5\text{s}$;

Ε. Να σχεδιάσετε τη μορφή του μέσου την στιγμή t_1 .

Στ. Δύο υλικά σημεία H και Z βρίσκονται δεξιά και αριστερά της θέσης $x=11\text{m}$ και έχουν απομακρύνσεις ίσες με $y=-0,1\text{m}$, από τη θέση ισορροπίας τους τη χρονική στιγμή $t=3,5\text{s}$. Και τα δύο είναι τα πλησιέστερα προς το σημείο $x=1\text{m}$ με τέτοια απομάκρυνση. Ποιο από τα δύο υλικά σημεία έχει μεγαλύτερη ενέργεια αυτήν τη χρονική στιγμή;



Απάντηση

A. Η γωνιακή συχνότητα είναι $\omega=\pi\text{ rad/s}$. Άρα: $\omega=2\pi f \rightarrow f=\omega/2\pi=0,5\text{Hz}$ και $T=2\text{s}$. Άρα $\lambda=v/f \rightarrow \lambda=4\text{m/s}$.

B. Το κύμα (1) οδεύει προς τη θετική φορά του άξονα Ox . Αφού το σημείο $x=+4$ έχει εξίσωση $y_1=A\eta\mu\omega t$ η εξίσωση του κύματος είναι:

$$y_1=A\eta\mu(\omega t-2\pi x/\lambda+\varphi_0) \rightarrow y_1=0,2\eta\mu(\pi t-0,5\pi x+\varphi_0)$$

για $t=0$ με $x=4\text{m}$ έχει $y=0$ και $\varphi=0$. Άρα $\pi t-0,5\pi x+\varphi_0=0 \rightarrow \varphi_0=2\pi\text{rad}$

$$\text{Άρα } y_1=0,2\eta\mu(\pi t-0,5\pi x+2\pi) \text{ SI}$$

Το κύμα (2) οδεύει προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα Ox και έχει εξίσωση $y_2=A\eta\mu(\omega t+2\pi x/\lambda+\varphi_0)$

για $t=0$ με $x=4\text{m}$ έχει $y=0$ και $\varphi=0$. Άρα $\pi t+0,5\pi x+\varphi_0=0 \rightarrow \varphi_0=-2\pi\text{ rad}$

$$\text{Άρα } y_2=0,2\eta\mu(\pi t+0,5\pi x-2\pi) \text{ SI}$$

$$\text{Γ. } y=y_1+y_2=0,2\eta\mu(\pi t-0,5\pi x+2\pi)+0,2\eta\mu(\pi t+0,5\pi x-2\pi)=0,4\sigma\upsilon\nu\left[\frac{-\pi x+4\pi}{2}\right]\cdot\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{2}\right) \rightarrow$$

$$y=0,4\sigma\upsilon\nu\left[\frac{\pi x}{2}\right]\cdot\eta\mu(\pi t) \text{ (SI)}$$

Δ. Τη χρονική στιγμή $t_1=3,5\text{s}$ το κάθε κύμα θα έχει ταξιδέψει κατά $\Delta x=v\Delta t=(2\text{m/s})\cdot(3,5\text{s})=7\text{m}$. Άρα το κύμα (2) θα έχει φτάσει μέχρι τη θέση $x_2=4\text{m}-7\text{m}=-3\text{m}$ και το κύμα (1) μέχρι τη θέση $x_1=$

$4m+7m=11m$. Το στάσιμο θα έχει δημιουργηθεί στην περιοχή επικάλυψης των δύο κυμάτων δηλαδή, από τη θέση $x_2=-3m$ έως τη θέση $x_1=11m$.

Το πλάτος του στασίμου δίνεται από τη σχέση: $A'=0,4\sin(0,5\pi x)$

Για τους δεσμούς: $|A'|=0 \rightarrow |0,4\sin(0,5\pi x)|=0 \rightarrow |\sin(0,5\pi x)|=0 \rightarrow 0,5\pi x=k\pi+\pi/2 \rightarrow x_\delta=2k+1$ με $-3m \leq x_\delta \leq 11m \rightarrow -3 \leq 2k+1 \leq 11 \rightarrow -4 \leq 2k \leq 10 \rightarrow -2 \leq k \leq 5$, άρα $k=-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ άρα **8 δεσμοί** στις θέσεις: $x_{\delta 1}=-3m, x_{\delta 2}=-1m, x_{\delta 3}=1m, x_{\delta 4}=3m, x_{\delta 5}=5m, x_{\delta 6}=7m, x_{\delta 7}=9m, x_{\delta 8}=11m$

Για τις κοιλίες: $|A'|=2A \rightarrow |0,4\sin(0,5\pi x)|=0,4 \rightarrow |\sin(0,5\pi x)|=1 \rightarrow 0,5\pi x=k\pi \rightarrow x_k=2k$, με $-3m \leq x_k \leq 11m \rightarrow -3 \leq 2k \leq 11 \rightarrow -1,5 \leq k \leq 5,5$ άρα $k=-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ άρα **7 κοιλίες** στις θέσεις: $x_{k1}=-2m, x_{k2}=0, x_{k3}=2m, x_{k4}=4m, x_{k5}=6m, x_{k6}=8m, x_{k7}=10m$

Ε. Η απομάκρυνση του σημείου $x=-2m$ τη χρονική στιγμή $t=3,5s$ είναι

$$y=0,4\sin\left[\frac{\pi x}{2}\right] \cdot \eta\mu(\pi t)=0,4\sin(-\pi)\eta\mu(3,5\pi)=0,4(-1)(-1)=0,4m$$

Η απομάκρυνση του σημείου $x=0$ τη χρονική στιγμή $t=3,5s$ είναι

$$y=0,4\sin\left[\frac{\pi x}{2}\right] \cdot \eta\mu(\pi t)=0,4\sin(0)\eta\mu(3,5\pi)=0,4(1)(-1)=-0,4m$$

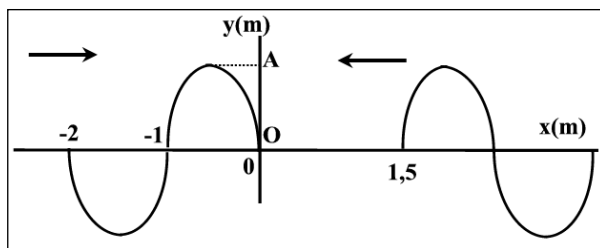
Η μορφή του μέσου φαίνεται στο σχήμα.

Στ. Το σημείο Z είναι σημείο στάσιμου κύματος και τη χρονική στιγμή $t=3,5s$ οι κοιλίες βρίσκονται στις μέγιστες απομακρύνσεις τους άρα και όλα τα σημεία που ταλαντώνεται κάνουν το ίδιο. Συνεπώς το Z είναι ακίνητο και η μόνη ενέργεια που διαθέτει είναι δυναμική

$$E_Z=U=\frac{1}{2}Dy^2$$

Το Η όμως είναι σημείο τρέχοντος κύματος οπότε εκείνη τη στιγμή έχει και δυναμική και κινητική ενέργεια, $E_H=U+K=\frac{1}{2}Dy^2+\frac{1}{2}mv^2$. Άρα $E_H>E_Z$

ΣΓ3.6 Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου που θεωρούμε ότι ταυτίζεται με τον άξονα x , διαδίδονται δύο όμοια κύματα πλάτους $A=0,1\text{m}$, τα οποία διαδίδονται αντίθετα. Τη στιγμή $t=0$ το πρώτο κύμα φτάνει στο σημείο O , στη θέση $x=0$, ενώ το δεύτερο απέχει κατά $1,5\text{m}$ από το O , όπως στο σχήμα.



Το O θα φτάνει σε μέγιστη απομάκρυνση για πρώτη φορά τη στιγμή $t'=0,25\text{s}$.

A. Να γράψετε τις εξισώσεις των δύο τρεχόντων κυμάτων.

B. Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος που θα προκύψει μετά την συμβολή των δύο παραπάνω κυμάτων.

Γ. Να βρείτε τη χρονική στιγμή $t_1=2\text{s}$, πόσοι δεσμοί και πόσες κοιλίες έχουν σχηματισθεί και σε ποιες θέσεις.

Δ. Να κάνετε το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος και για την περιοχή που έχει σχηματισθεί, τη στιγμή t_1 .

Λύση

A. Αφού το O εκτελώντας ΑΑΤ φτάνει για 1η φορά στη μέγιστη απομάκρυνση σε χρόνο $0,25\text{s}$, η περίοδος είναι $T=4 \cdot 0,25\text{s} \rightarrow T=1\text{s}$, άρα η συχνότητα $f=1\text{Hz}$ και η γωνιακή συχνότητα $\omega=2\pi\text{rad/s}$. Από τη γραφική παράσταση φαίνεται ότι τα μήκη κύματος είναι $\lambda=2\text{m}$ άρα και η ταχύτητα $v=\lambda f=2\text{m/s}$.

Το 1ο κύμα οδεύει προς τα δεξιά και τη χρονική στιγμή $t=0$, το $x=0$ έχει $y=0$ και $v>0$. Άρα η εξίσωση του κύματος είναι της μορφής $y=A\eta\mu(\omega t-2\pi x/\lambda) \rightarrow y_1=0,1\eta\mu(2\pi t-\pi x)$ (SI)

Το 2ο κύμα οδεύει προς τα αρνητικά και τη $t=0$, το σημείο $x=1,5\text{m}$ έχει $y=0$ και $v>0$ άρα και μηδενική φάση $\varphi=0$. Η εξίσωση είναι της γενικής μορφής $y_2=A\eta\mu(\omega t+2\pi x/\lambda+\varphi_0) \rightarrow y_2=0,1\eta\mu(2\pi t+\pi x+\varphi_0)$ (SI)
Από $\varphi=0 \rightarrow 2\pi \cdot 0 + 1,5\pi + \varphi_0 = 0 \rightarrow \varphi_0 = -3\pi/2\text{rad}$. Άρα: $y_2=0,1\eta\mu(2\pi t+\pi x-1,5\pi)$ (SI)

B. Για τον υπολογισμό της εξίσωσης του στασίμου προσθέτω τις εξισώσεις των κυμάτων:

$$y=y_1+y_2=0,1\eta\mu(2\pi t-\pi x) + 0,1\eta\mu(2\pi t+\pi x-1,5\pi) = 0,2\sigma\upsilon\nu\frac{-2\pi x+1,5\pi}{2} \cdot \eta\mu\frac{4\pi t-1,5\pi}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow y=0,2\sigma\upsilon\nu(\pi x - \frac{3\pi}{4}) \cdot \eta\mu(2\pi t - \frac{3\pi}{4}) \quad (\text{SI})$$

Γ. Τη χρονική στιγμή $t=2\text{s}$ τα κάθε μέτωπο κύματος έχει ταξιδέψει κατά $\Delta x=v \cdot \Delta t=4\text{m}$. Άρα το 1ο κύμα βρίσκεται στη θέση $x_1=0\text{m}+4\text{m}=4\text{m}$ και το δεύτερο στη θέση $x_2=1,5\text{m}-4\text{m}=-2,5\text{m}$
Συνεπώς το στάσιμο κύμα καλύπτει την περιοχή $-2,5\text{m} \leq x \leq 4\text{m}$

Για τους δεσμούς: $|A'|=0 \rightarrow |0,2\sigma\upsilon\nu(\pi x - \frac{3\pi}{4})|=0 \rightarrow |\sigma\upsilon\nu(\pi x - \frac{3\pi}{4})|=0 \rightarrow \pi x - \frac{3\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x_\delta = k + 1,25$

με $-2,5\text{m} \leq x_\delta \leq 4\text{m} \rightarrow -2,5 \leq k + \frac{5}{4} \leq 4 \rightarrow -3,75 < k < 2,75 \rightarrow$ άρα $k=-3, -2, -1, 0, 1, 2$, άρα **6 δεσμοί**.

Οι δεσμοί είναι στις θέσεις: $x_\delta = -1,75\text{m}, -0,75\text{m}, +0,25\text{m}, 1,25\text{m}, 2,25\text{m}, 3,25\text{m}$

Για τις κοιλίες: $|A'|=2A \rightarrow |0,2\sigma\upsilon\nu(\pi x - \frac{3\pi}{4})|=0,2 \rightarrow |\sigma\upsilon\nu(\pi x - \frac{3\pi}{4})|=1 \rightarrow \pi x - \frac{3\pi}{4} = k\pi \rightarrow$

$x_k = k + 0,75$

με $-2,5\text{m} \leq x_k \leq 4\text{m} \rightarrow -2,5 \leq k+0,75 \leq 4 \rightarrow -3,25 \leq k \leq 3,25$ άρα $k = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ άρα **7 κοιλίες** στις θέσεις:

$x_k = -2,25\text{m}, -1,25\text{m}, -0,25\text{m}, 0,75\text{m}, 1,75\text{m}, 2,75\text{m}, 3,75\text{m}$

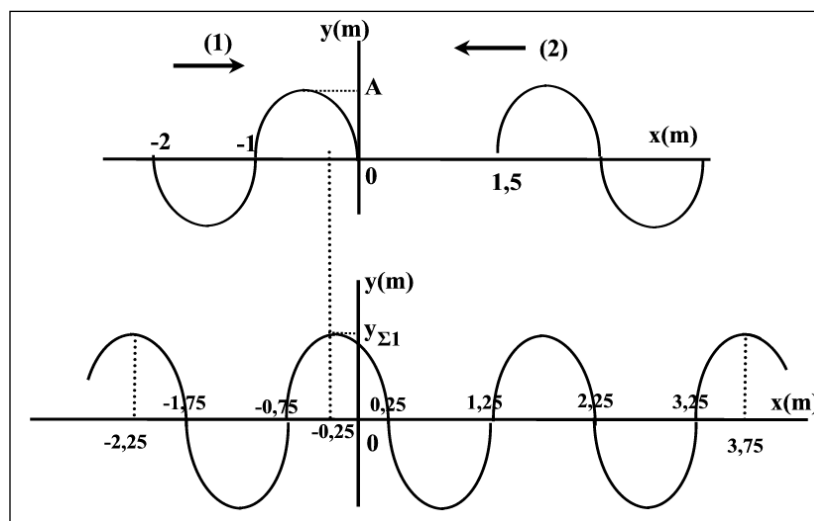
Α. Για το στιγμιότυπο, και τη χρονική στιγμή $t=2\text{s}$ η εξίσωση απομάκρυνσης γίνεται:

$$y = 0,2 \sin(\pi x - 0,75\pi) \eta \mu(-3\pi/4) \rightarrow y = -0,2 \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\pi x - 3\pi/4) \rightarrow y = -0,1\sqrt{2} \sin(\pi x - 3\pi/4), (\text{SI})$$

για $x = -2,25\text{m}$ (1^η από τα αριστερά κοιλία), $y_{\Sigma 1} = -0,1\sqrt{2} \sin(-3\pi) = 0,1\sqrt{2}\text{m}$

δηλαδή η κοιλία δεν βρίσκεται αυτή τη στιγμή στη μέγιστη της απομάκρυνση (που είναι $0,2\text{m}$).

Προσοχή το σημείο $x=0$ έχει $y=0,1\text{m}$, δηλαδή δεν είναι ούτε δεσμός ούτε κοιλία. Το στιγμιότυπο ακολουθεί στο σχήμα



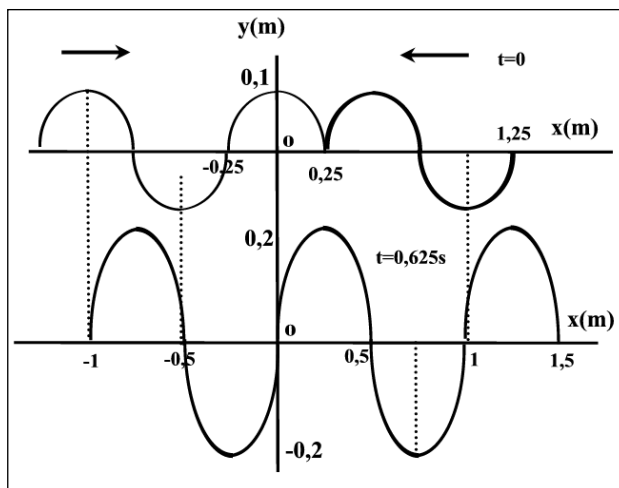
♣**ΣΓ3.7** Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου που θεωρούμε ότι ταυτίζεται με τον άξονα x , διαδίδονται δύο όμοια κύματα πλάτους $A=0,1\text{m}$, σε αντίθετες κατευθύνσεις. Τη στιγμή $t=0$ και τα δύο κύματα φτάνουν στο σημείο με θέση $x=0,25\text{m}$, όπως φαίνεται και στο στιγμιότυπο. Το κάθε σημείο του μέσου θέλει $\Delta t=0,25\text{s}$ για να πάει από τη μία ακραία θέση ταλάντωσης στην άλλη.

A. Να γράψετε τις εξισώσεις των δύο τρεχόντων κυμάτων.

B. Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος που θα προκύψει μετά την συμβολή των δύο παραπάνω κυμάτων.

Γ. Να βρείτε τη χρονική στιγμή $t_1=0,625\text{s}$, πόσοι δεσμοί και πόσες κοιλίες έχουν σχηματισθεί και σε ποιες θέσεις.

Δ. Να κάνετε το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος και για την περιοχή που έχει σχηματισθεί, τη στιγμή t_1 .



Λύση

Από το στιγμιότυπο φαίνεται ότι το μήκος κύματος είναι $\lambda=1\text{m}$. Η περίοδος είναι $T=2\cdot 0,25\text{s}=0,5\text{s}$ άρα η συχνότητα $f=2\text{Hz}$ και η ταχύτητα διάδοσης $v=\lambda\cdot f=2\text{m/s}$. Η γωνιακή ταχύτητα $\omega=2\pi f=4\pi\text{ rad/s}$.

A. Το κύμα που οδεύει προς τα δεξιά έχει εξίσωση $y_1=A\eta\mu(\omega t-2\pi x/\lambda+\varphi_0)$. Για $t=0$ είναι $x=\lambda/4$ άρα $\varphi=0\rightarrow -\pi/2+\varphi_0=0\rightarrow\varphi_0=\pi/2\text{rad}$

Άρα: $y_1=0,1\eta\mu(4\pi t-2\pi x+\pi/2)$ (SI)

Το κύμα που οδεύει προς τα αριστερά έχει εξίσωση $y_2=A\eta\mu(\omega t+2\pi x/\lambda+\varphi_0)$. Για $t=0$ είναι $x=\lambda/4$ άρα $\varphi=0\rightarrow \pi/2+\varphi_0=0\rightarrow\varphi_0=-\pi/2\text{rad}$

Άρα: $y_2=0,1\eta\mu(4\pi t+2\pi x-\pi/2)$ (SI)

B. $y_{ολ}=y_1+y_2=0,2\text{συν}\frac{4\pi t-2\pi x+\pi/2-4\pi t-2\pi x+\pi/2}{2}\cdot\eta\mu\frac{8\pi t-2\pi x+\pi/2+2\pi x-\pi/2}{2}\rightarrow$

$y_{ολ}=0,2\text{συν}(-2\pi x+\pi/2)\cdot\eta\mu 4\pi t\rightarrow y_{ολ}=0,2\text{συν}(2\pi x-\pi/2)\eta\mu 4\pi t$ (SI) (1)

Γ. Τη χρονική στιγμή $t=0,625\text{s}$ το κάθε κύμα θα έχει μετατοπιστεί κατά $\Delta x=v\cdot\Delta t=2\cdot 0,625=1,25\text{m}$, το πρώτο προς τα δεξιά το δεύτερο προς τα αριστερά. Συνεπώς τα δύο κύματα θα έχουν συμβάλει σε μια περιοχή από το -1m έως το $1,5\text{m}$, δηλαδή $-1\leq x\leq 1,5\text{m}$

Δεσμοί: $A'=0\rightarrow 0,2\text{συν}(2\pi x-\pi/2)=0\rightarrow \text{συν}(2\pi x-\pi/2)=0\rightarrow 2\pi x-\pi/2=\kappa\pi+\pi/2\rightarrow 2\pi x=\kappa\pi+\pi\rightarrow x_\delta=\frac{\kappa-1}{2}$

$-1\leq x_\delta\leq 1,5\rightarrow -1\leq \frac{\kappa-1}{2}\leq 1,5\rightarrow -1\leq \kappa\leq 4$ άρα $\kappa=-1, 0, 1, 2, 3, 4$ **6 δεσμοί**

Στις θέσεις: $x_\delta=-1\text{m}, -0,5\text{m}, 0, 0,5\text{m}, 1\text{m}, 1,5\text{m}$

Κοιλίες: $|A'|=0,2\text{m} \rightarrow |\sin(2\pi x - \pi/2)|=1 \rightarrow 2\pi x - \pi/2 = \kappa\pi \rightarrow x_\kappa = \frac{2\kappa+1}{4}$

$-1 \leq x_\kappa \leq 1,5 \rightarrow -1 \leq \frac{2\kappa+1}{4} \leq 1,5 \rightarrow -2,5 < \kappa < 2,5$ άρα $\kappa = -2, 1, 0, 1, 2$, **5 κοιλίες**

Στις θέσεις: $x_\kappa = -0,75\text{m}, -0,25\text{m}, 0,25\text{m}, 0,75\text{m}, 1,25\text{m}$

Δ. Το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος που σχηματίζεται τη χρονική στιγμή $t=0,625\text{s}$, φαίνεται στο σχήμα. Ας δούμε τις απομακρύνσεις δύο κοιλιών ώστε να είναι δυνατή η σωστή χάραξη της καμπύλης.

Για $t=0,625\text{s}$, η κοιλία με $x=0,25\text{m}$ έχει από (1) $\rightarrow \dots y_{\text{ολ}}=0,2\text{m}$

Για $t=0,625\text{s}$ μια άλλη κοιλία με θέση $x=-0,25\text{m}$ έχει από (1) $\rightarrow \dots y_{\text{ολ}}=-0,2\text{m}$.