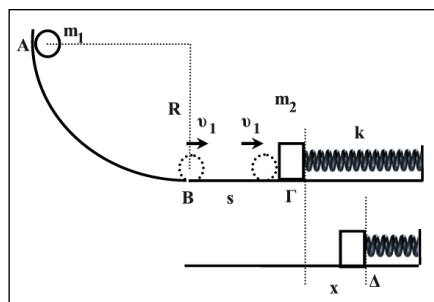


ΘΕΜΑΤΑ Γ-Δ

Γ.1 Θεωρούμε κατακόρυφο τεταρτοκύκλιο AB, ακτίνας $R=2\text{m}$ που εφάπτεται στο κάτω άκρο του B, με οριζόντιο δάπεδο. Σώμα μάζας $m_1=1\text{kg}$, αφήνεται να ολισθήσει κατά μήκος του τεταρτοκυκλίου από το άνω άκρο A. Το σώμα περνάει από το σημείο B με ταχύτητα $v_1=4\text{m/s}$ και συνεχίζει να κινείται χωρίς τριβές κατά μήκος της οριζόντιας εφαιπτομένης του τεταρτοκυκλίου στο σημείο B. Αφού διανύσει διάστημα BΓ στο λείο οριζόντιο επίπεδο συγκρούεται μετωπικά με σώμα μάζας $m_2=5\text{kg}$, που είναι δεμένο στο άκρο ελατηρίου σταθεράς $k=100\text{N/m}$. Το m_2 μετά την κρούση κινείται στο οριζόντιο επίπεδο με τριβές και σταματάει αφού διανύσει διάστημα $\Gamma\Delta=x=0,2\text{m}$. Ο συντελεστής τριβής στο τμήμα $\Gamma\Delta$ είναι $\mu=0,05$. Να υπολογιστούν:



α. Η θερμότητα που παράχθηκε λόγω τριβής κατά την καθοδική κίνηση του σώματος στο τεταρτοκύκλιο.

β. Οι ταχύτητες των δύο σωμάτων μετά την κρούση και το είδος της κρούσης.

γ. Το ποσοστό (%) της αρχικής μηχανικής ενέργειας του σώματος m_1 που έγινε θερμότητα λόγω τριβών κατά την ολίσθηση των σωμάτων στα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$.

δ. Το ποσοστό (%) της αρχικής μηχανικής ενέργειας του σώματος m_1 που έγινε θερμότητα λόγω κρούσης.

Ως στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας να θεωρηθεί το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το B. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Λύση

α. ΘΜΚΕ για το σώμα m_1 από το A στο B: $W_B + W_{T1} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 \rightarrow W_{T1} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 - m_1gR \rightarrow W_{T1} = -12\text{J}$. Άρα η θερμότητα που εκλύθηκε είναι **12J**.

β. ΘΜΚΕ για το m_2 από Γ σε Δ : $W_{T2} + W_{ελ} = 0 - \frac{1}{2}m_2V_2^2$ (1)

Τα έργα των δυνάμεων στη διαδρομή $\Gamma\Delta$ είναι:

$$W_{T2} = -T_2x = -\mu N_2x = -\mu m_2gx = -0,5\text{J} \quad \text{και} \quad W_{ελ} = U_{ελ,α} - U_{ελ,τ} = 0 - \frac{1}{2}kx^2 = -2\text{J}$$

$$\text{Από (1)} \rightarrow \mathbf{V_2 = 1\text{m/s}}$$

$$\text{Από την ΑΔΟ στην κρούση:} \quad m_1v_1 = m_1V_1 + m_2V_2 \rightarrow V_1 = \frac{m_1v_1 - m_2V_2}{m_1} \rightarrow \mathbf{V_1 = -1\text{m/s.}}$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος πριν την κρούση είναι $K_{\pi\rho} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 = 8\text{J}$

$$\text{Μετά την κρούση είναι: } K_{\mu\epsilon\tau} = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 \rightarrow K_{\mu\epsilon\tau} = 3\text{J}$$

Άρα $\Delta K = -3\text{J}$, δηλαδή, $K_{\mu\epsilon\tau} < K_{\pi\rho}$, οπότε η κρούση είναι **ανελαστική**.

γ. Τριβές υπάρχουν στα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$. Συνολικά το έργο της τριβής είναι:

$$W_{T1} + W_{T2} = -12\text{J} - 0,5\text{J} = -12,5\text{J}. \text{ Άρα η θερμότητα λόγω τριβών είναι } Q = 12,5\text{J}$$

$$\pi_1\% = \frac{Q}{E_A} 100\% = \frac{Q}{m_1gh} 100\% = \frac{12,5}{20} 100\% \rightarrow \mathbf{\pi_1\% = 62,5\%}$$

δ. Η θερμότητα που εκλύθηκε λόγω της ανελαστικής κρούσης ισούται με την απόλυτη τιμή της μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συστήματος κατά την κρούση.

$$\pi_1\% = \frac{|\Delta K|}{E_A} 100\% = \frac{|\Delta K|}{m_1gh} 100\% = \frac{3}{20} 100\% \rightarrow \mathbf{\pi_2\% = 15\%}$$

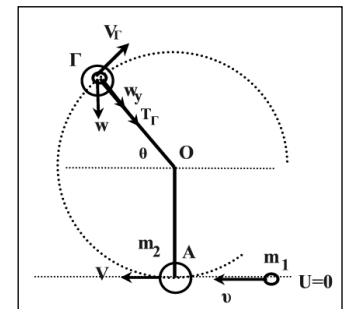
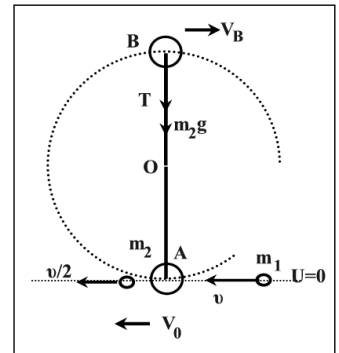
Γ.2 Κομμάτι ξύλου μάζας $m_2=4\text{kg}$ κρέμεται από ακλόνητο σημείο, με τη βοήθεια αβαρούς νήματος μήκους $L=1\text{m}$. Βλήμα μάζας $m_1=1\text{kg}$ βάλλεται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου v διαπερνάει το ξύλο και βγαίνει με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $v/2$.

α. Να υπολογιστεί η ελάχιστη τιμή της ταχύτητας v του βλήματος ώστε το ξύλο μετά την κρούση να διαγράψει κατακόρυφο κύκλο ακτίνας L , δηλαδή να κάνει ανακύκλωση.

β. Να υπολογιστεί η δύναμη του νήματος στην κατακόρυφη θέση αμέσως μετά την προηγούμενη κρούση

γ. Αν η κρούση είναι πλαστική και το συσσωμάτωμα διαγράφει μέγιστη γωνία $\theta+90^\circ=120^\circ$, πόση πρέπει να είναι η ελάχιστη ταχύτητα του σώματος m_1 ;

Δίνεται το $g=10\text{m/s}^2$. Η χρονική διάρκεια της κάθε κρούσης να θεωρηθεί αμελητέα, ($dt \rightarrow 0$).



Λύση

α. Στην ανελαστική κρούση ισχύει η ΑΔΟ:

$$m_1 v = m_1 \frac{v}{2} + m_2 V_0 \rightarrow v = 8V_0 \quad (1)$$

Για να φτάσει όμως το σώμα m_2 στο σημείο B με το νήμα τεντωμένο ($T > 0$) θα πρέπει στο B να έχει κάποια ταχύτητα, $V_B \neq 0$. Η περιοχή τιμών της ταχύτητας αυτής υπολογίζεται από την κεντρομόλο δύναμη:

$$\Sigma F_B = \frac{m_2 V_B^2}{L} \rightarrow T + m_2 g = \frac{m_2 V_B^2}{L} \rightarrow T = \frac{m_2 V_B^2}{L} - m_2 g \stackrel{T \geq 0}{\geq} V_B \geq \sqrt{Lg} \rightarrow V_B \geq \sqrt{10}\text{m/s} \rightarrow V_{B,\epsilon\lambda} = \sqrt{10}\text{m/s} \quad (2)$$

Από τη ΑΔΜΕ για το m_2 από το σημείο A στο B μετά την κρούση, βρίσκουμε την ελάχιστη τιμή της ταχύτητας V_0 :

$$E_A = E_B \rightarrow \frac{1}{2} m_2 V_0^2 = \frac{1}{2} m_2 V_B^2 + m_2 g \cdot 2L \rightarrow V_0 = \sqrt{V_B^2 + 4gL} \rightarrow V_{0,\epsilon\lambda} = \sqrt{V_{B,\epsilon\lambda}^2 + 4gL} \rightarrow V_{0,\epsilon\lambda} = \sqrt{50}\text{m/s} \quad (3)$$

$$\text{Από (1) (3)} \rightarrow v_{\epsilon\lambda} = 8\sqrt{50}\text{m/s}$$

$$\text{β. } \Sigma F = \frac{m_2 V_0^2}{L} \rightarrow T - m_2 g = \frac{m_2 V_0^2}{L} \rightarrow T = m_2 g + \frac{m_2 V_0^2}{L} \rightarrow T = 240\text{N}$$

γ. Στην πλαστική κρούση ισχύει η ΑΔΟ:

$$m_1 v = (m_1 + m_2) V_1 \rightarrow v = 5V_1 \quad (4)$$

$$\text{Στο σημείο Γ: } \Sigma F_\Gamma = \frac{(m_1 + m_2) V_\Gamma^2}{L} \rightarrow (m_1 + m_2) g \eta \mu \theta + T_\Gamma = \frac{(m_1 + m_2) V_\Gamma^2}{L} \rightarrow$$

$$T_\Gamma = \frac{(m_1 + m_2) V_\Gamma^2}{L} - (m_1 + m_2) g \eta \mu \theta. \text{ Για να είναι το νήμα τεντωμένο θα πρέπει } T_\Gamma \geq 0 \text{ και άρα}$$

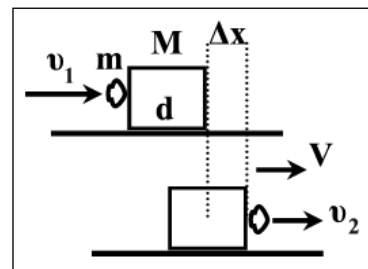
$$V_\Gamma \geq \sqrt{L g \eta \mu \theta} \rightarrow V_\Gamma \geq \sqrt{5} \text{ m/s} \quad (5)$$

Από τη ΑΔΜΕ για το $M = (m_1 + m_2)$ από το A στο Γ μετά την κρούση, βρίσκουμε την ελάχιστη τιμή της ταχύτητας V_1 με τη βοήθεια και της (5):

$$E_A = E_\Gamma \rightarrow \frac{1}{2} M V_1^2 = \frac{1}{2} M V_\Gamma^2 + M g \cdot (L + L \eta \mu \theta) \rightarrow V_1 = \sqrt{V_\Gamma^2 + 3gL} \rightarrow V_{1,\epsilon\lambda} = \sqrt{V_{\Gamma,\epsilon\lambda}^2 + 4gL} \rightarrow V_{1,\epsilon\lambda} = \sqrt{35}\text{m/s}$$

$$\text{Από (4)} \rightarrow v_{\epsilon\lambda} = 5\sqrt{35}\text{m/s}$$

Γ.3 Βλήμα μάζας m κινούμενο οριζόντια με ταχύτητα $v_1=200\text{m/s}$, διαπερνάει ξύλινο πρίσμα μάζας $M=2m$, μήκους $d=0,5\text{m}$ το οποίο αρχικά ηρεμούσε πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το βλήμα βγαίνει από το πρίσμα μετά από χρονικό διάστημα Δt με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $v_2=100\text{m/s}$. Αν η δύναμη αντίστασης του ξύλου πάνω στο βλήμα θεωρηθεί σταθερή, να υπολογιστούν:



α. Η ταχύτητα, V , του πρίσματος τη χρονική στιγμή που το βλήμα βγαίνει απ' αυτό.

β. Η μετατόπιση, Δx , του πρίσματος στο χρονικό διάστημα Δt που το βλήμα το διαπερνούσε.

γ. Το χρονικό διάστημα Δt .

δ. Το ποσοστό, (%), της κινητικής ενέργειας του βλήματος που έγινε θερμότητα λόγω τριβής του βλήματος με το υλικό του πρίσματος.

Λύση

α. Κατά την ανελαστική κρούση των m και M ισχύει η ΑΔΟ:

$$mv_1 = mv_2 + MV \rightarrow V = \frac{m(v_1 - v_2)}{M} \rightarrow V = 50\text{m/s} \quad (1)$$

β. Το βλήμα m δέχεται από το υλικό του πρίσματος σταθερή δύναμη αντίστασης F και ασκεί σε αυτό την αντίδραση F' , $\vec{F} = -\vec{F}'$ με $|F| = |F'|$. Το πρίσμα, M μετατοπίζεται κατά Δx κατά τη διάρκεια Δt της κρούσης, δηλαδή μέχρι το βλήμα να βγει από μέσα του αφού η κρούση δεν είναι ακαριαία. Στο ίδιο χρονικό διάστημα το βλήμα m μετατοπίζεται κατά $d + \Delta x$ ως προς ακίνητο παρατηρητή δηλαδή ως προς εσένα που βλέπεις και το σχήμα. Γράφω το ΘΜΚΕ για το βλήμα και το πρίσμα χωριστά για να βρω τη μετατόπιση Δx .

$$\text{ΘΜΚΕ για το } m: \Sigma W = \Delta K \rightarrow -F'(\Delta x + d) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \quad (2)$$

$$\text{ΘΜΚΕ για το } M: \Sigma W = \Delta K \rightarrow F \cdot \Delta x = \frac{1}{2}MV^2 \quad (3)$$

$$\text{Από (2):(3)} \rightarrow \frac{\Delta x + d}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2}{\frac{1}{2}MV^2} \rightarrow \Delta x = 0,1\text{m}$$

$$\gamma. \text{ Γράφω το 2}^\circ \text{ νόμο Newton για το πρίσμα: } F' = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{MV - 0}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{MV}{F'} \quad (4)$$

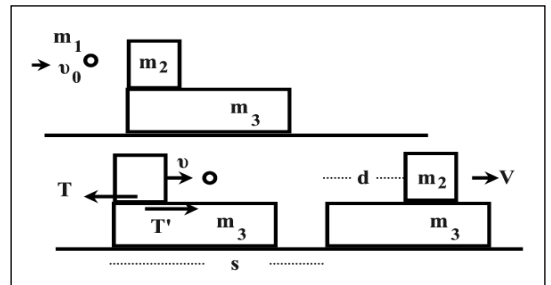
$$\text{Από τη σχέση (4) υπολογίζουμε το μέτρο της δύναμης } F, \text{ δηλαδή: } F = \frac{MV^2}{2\Delta x} = F' \quad (5)$$

$$\text{Από (4)(5)} \rightarrow \Delta t = \frac{2\Delta x}{V} \rightarrow \Delta t = 4 \cdot 10^{-3}\text{s}.$$

$$\delta. \frac{\Delta K}{K_{\text{προ}}} 100\% = \frac{\frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}MV^2 - \frac{1}{2}mv_1^2}{\frac{1}{2}mv_1^2} 100\% \rightarrow \frac{\Delta K}{K_{\text{προ}}} 100\% = -62,5\%$$

Άρα το 62,5% της κινητικής ενέργειας του βλήματος έγινε θερμότητα λόγω της κρούσης.

Γ.4 Σώμα Α μάζας $M=2\text{kg}$ ηρεμεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και πάνω του φέρει άλλο σώμα Β μάζας $m_2=2\text{kg}$ που αρχικά είναι ακίνητο. Μεταξύ των δύο σωμάτων υπάρχει τριβή με συντελεστική τριβής μ . Βλήμα μάζας $m_1=0,1\text{kg}$ έρχεται με οριζόντια ταχύτητα $v_0=80\text{m/s}$ και διαπερνάει το σώμα m_2 σε αμελητέο χρόνο, ενώ όταν βγαίνει από αυτό έχει χάσει τη μισή του ταχύτητα. Μετά την κρούση το σώμα Β ολισθαίνει πάνω στο Α κατά $d=0,5\text{m}$, μέχρι τα σώματα Α και Β να αποκτήσουν κοινή ταχύτητα. Να υπολογιστούν:



α. Η κοινή ταχύτητα που θα αποκτήσουν.

β. Η μετατόπιση s του σώματος Α ως προς το έδαφος μέχρι να τα σώματα Α και Β να αποκτήσουν κοινή ταχύτητα,

γ. Ο συντελεστής τριβής, μ , μεταξύ των δύο σωμάτων.

δ. Η θερμότητα που μεταφέρεται στο περιβάλλον λόγω κρούσης και ολίσθησης.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Λύση

α. Στην κρούση των m_1, m_2 ισχύει η ΑΔΟ : $m_1 v_0 = m_2 v + m_1 \frac{v_0}{2} \rightarrow v = 2\text{m/s}$

Μετά την κρούση το σώμα m_2 σέρνεται πάνω στο Μ. Λόγω της μεταξύ τους τριβής ολίσθησης παρασέρνει και το σώμα Μ και κινούνται το ένα ως προς το άλλο για κάποιο διάστημα μέχρι να αποκτήσουν κοινή ταχύτητα V . Στη συνέχεια κινούνται σαν ένα σώμα μάζας $M+m_2$ με την ταχύτητα V . Ισχύει και εδώ η διατήρηση της ορμής, αφού το σύστημα είναι μονωμένο:

$$m_2 v + 0 = (m_2 + M)V \rightarrow V = 1\text{m/s}$$

β. Η τριβή T επιβραδύνει το m_2 και η αντίδρασή της T' επιταχύνει το Μ. Ισχύει $T = T' = \mu N = \mu m_2 g$. Μέχρι τα σώματα να αποκτήσουν κοινή ταχύτητα μετατοπίζονται. Το Μ μετατοπίζεται κατά s ενώ το m_2 κατά d πάνω στο Μ. Για ένα ακίνητο παρατηρητή το m_2 μετατοπίζεται κατά $s+d$ όπως φαίνεται και στο σχήμα. Γράφω το ΘΜΚΕ για κάθε σώμα χωριστά.

$$\text{Για το } m_2 : \Sigma W = \Delta K \rightarrow -T(s+d) = \frac{m_2 V^2}{2} - \frac{m_2 v^2}{2} \rightarrow -\mu m_2 g(s+d) = \frac{m_2 V^2}{2} - \frac{m_2 v^2}{2} \quad (1)$$

$$\text{Για το Μ: } \Sigma W = \Delta K \rightarrow T's = \frac{MV^2}{2} \rightarrow \mu m_2 g s = \frac{MV^2}{2} \quad (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \rightarrow -\frac{s+d}{s} = \frac{m_2(V^2 - v^2)}{MV^2} \rightarrow \frac{s+d}{s} = 3 \rightarrow s = 0,25\text{m}$$

$$\text{γ. Από τη (2)} \rightarrow \mu = \frac{MV^2}{2m_2 g s} \rightarrow \mu = 0,2$$

δ. Για να βρω τη συνολική θερμότητα μετρώ την αρχική και τελική κινητική ενέργεια του συστήματος και τις αφαιρώ. Η αρχική ενέργεια είναι του βλήματος και η τελική των $M+m_2$ και του βλήματος m_1 που βγήκε από το m_2 με ταχύτητα $v_0/2$.

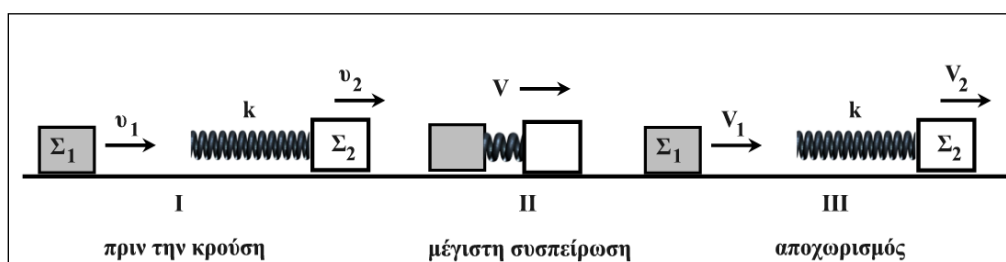
$$K_{\text{αρχ}} = \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = 320\text{J}$$

$$K_{\text{τελ}} = \frac{1}{2} (m_2 + M) V^2 + \frac{1}{2} m_1 (v_0/2)^2 = 82\text{J}$$

$$Q = |K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}}| \rightarrow Q = 238\text{J}$$

Γ.5 Σώμα Σ_1 μάζας $m_1=3\text{kg}$ ολισθαίνει χωρίς τριβές πάνω σε οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $v_1=6\text{m/s}$. Μπροστά απ' αυτό, άλλο σώμα Σ_2 μάζας $m_2=9\text{kg}$ ολισθαίνει στην ίδια κατεύθυνση και με ταχύτητα $v_2=2\text{m/s}$. Το σώμα Σ_2 φέρει πίσω του στερεωμένο οριζόντιο ελατήριο σταθεράς $k=100\text{N/m}$, αμελητέας μάζας. Κατά τη σύγκρουση που ακολουθεί το ελατήριο παραμορφώνεται τα σώματα πλησιάζουν και στην συνέχεια απομακρύνονται, μέχρι να αποκτήσει και πάλι το ελατήριο το φυσικό του μήκος. Να υπολογιστούν:

- Η ταχύτητα των σωμάτων τη στιγμή που το ελατήριο έχει μέγιστη συσπίρωση.
- Η μέγιστη συσπίρωση του ελατηρίου.
- Οι ταχύτητες των σωμάτων όταν το ελατήριο επανέρχεται στο φυσικό του μήκος.
- Οι ρυθμοί μεταβολής της ταχύτητας των σωμάτων στη θέση της μέγιστης συσπίρωσης.



Λύση

α. Το m_1 προλαβαίνει το m_2 αφού έχει μεγαλύτερη ταχύτητα και συγκρούεται με το ελατήριο. Το ελατήριο αρχίζει να συσπείρωνεται. Η δύναμη του ελατηρίου, $F=kx$, επιβραδύνει το m_1 και επιταχύνει το m_2 . Για όσο διάστημα το m_1 έχει μεγαλύτερη ακόμα ταχύτητα από το m_2 τα σώματα πλησιάζουν και το ελατήριο συσπείρωνεται. Κάποια στιγμή τα δύο σώματα θα αποκτήσουν κοινή ταχύτητα V . Τότε το ελατήριο θα έχει τη μέγιστη συσπίρωση, x_m . Αμέσως μετά η ταχύτητα του m_1 θα είναι μικρότερη αυτής του m_2 , το m_1 θα μένει πίσω, το m_2 θα φεύγει μπροστά και τα σώματα θα απομακρύνονται. Τότε όμως η συσπίρωση του ελατηρίου θα μειώνεται μέχρι να μηδενιστεί και τα σώματα να αποχωριστούν με ταχύτητες V_1, V_2 .

Γράφω ΑΔΟ από την κατάσταση (I) στη (II): $m_1v_1+m_2v_2=m_1V+m_2V \rightarrow V=3\text{m/s}$.

β. Γράφω ΑΔΜΕ από την (I) στη (II): $\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=\frac{1}{2}m_1V^2+\frac{1}{2}m_2V^2+\frac{1}{2}kx_m^2 \rightarrow x_m=0,6\text{m}$

γ. Γράφω ΑΔΟ και ΑΔΜΕ για το σύστημα μεταξύ των καταστάσεων (I) και (III). Αφού η συσπίρωση έχει μηδενιστεί οι μηχανικές ενέργειες είναι μόνο κινητικές, δηλαδή ισχύουν οι αρχές διατήρησης της ελαστικής κρούσης. Από τη λύση του συστήματος (1) και (2) προκύπτουν:

$$(1) \quad m_1v_2+m_2v_2=m_1V_1+m_2V_2 \quad V_1=\frac{(m_1-m_2)v_1+2m_2v_2}{m_1+m_2} \rightarrow V_1=0$$

$$(2) \quad \frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=\frac{1}{2}m_1V_1^2+\frac{1}{2}m_2V_2^2 \quad V_2=\frac{(m_2-m_1)v_2+2m_1v_1}{m_1+m_2} \rightarrow V_2=4\text{m/s}$$

δ. Η μόνη οριζόντια δύναμη που δέχονται τα σώματα είναι αυτή του ελατηρίου $F=kx$. Στη θέση $x=x_{\max}=0,6\text{m}$ η δύναμη αυτή είναι $F_{\max}=60\text{N}$. Με το 2^ο νόμο Newton έχουμε:

$$a_1=F_{\max}/m_1=-60\text{N}/3\text{kg} \rightarrow a_1=-3\text{m/s}^2$$

$$a_2=F_{\max}/m_2=60\text{N}/9\text{kg} \rightarrow a_2=20/3\text{m/s}^2$$

Γ.6 Σώμα, Α μάζας $m=1,5\text{kg}$ αφήνεται να ολισθήσει χωρίς τριβή από την κορυφή Δ ενός κατακόρυφου τεταρτοκυκλίου ακτίνας $R=1,8\text{m}$. Το σώμα αυτό συγκρούεται μετωπικά ελαστικά με ακίνητο σώμα Β, μάζας $M=3\text{kg}$, το οποίο κρέμεται από αβαρές νήμα μήκους $L=1,6\text{m}$. Να υπολογιστούν:

α. Η ταχύτητα του σώματος Α μόλις πριν την κρούση.

β. Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που έχασε το σώμα Α κατά την κρούση.

γ. Η μέγιστη γωνία εκτροπής του τεντωμένου νήματος από την κατακόρυφο.

δ. Η τάση του νήματος αμέσως μετά την κρούση και πριν αρχίσει το νήμα να εκτρέπεται από την κατακόρυφο θέση. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Λύση

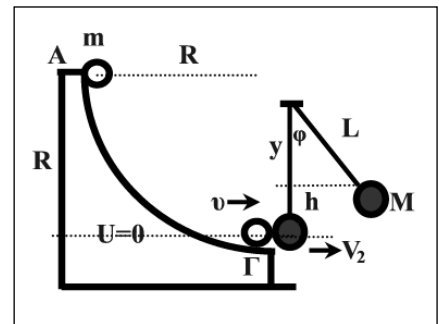
α. Το σώμα m κατεβαίνει από τη θέση Α στη θέση Γ χωρίς τριβές. Ισχύει η ΑΔΜΕ:

$$E_A = E_\Gamma \rightarrow mgR = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow v = \sqrt{2gR} \rightarrow v = 6\text{m/s}.$$

β. Στην ελαστική κρούση μεταξύ του m που έρχεται με ταχύτητα, v και του ακίνητου M ισχύουν:

ΑΔΟ: $mv = mV_1 + MV_2$ ΑΔΚΕ: $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mV_1^2 + \frac{1}{2}MV_2^2$ Από τη λύση του συστήματος η ταχύτητες μετά την κρούση είναι:

$$V_1 = \frac{m-M}{m+M} \cdot v \rightarrow V_1 = -2\text{m/s} \quad \text{και} \quad V_2 = \frac{2mv}{M+m} \rightarrow V_2 = 4\text{m/s}$$



Το ποσοστό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος, m λόγω κρούσης είναι:

$$\frac{\Delta K}{K_{\text{προ}}} 100\% = \frac{\frac{1}{2}mV_1^2 - \frac{1}{2}mv^2}{\frac{1}{2}mv^2} 100\% = -88,9\% . \text{ Άρα το ποσοστό μείωσης είναι } \mathbf{88,9\%}.$$

γ. Μετά την κρούση το σώμα M φεύγει με ταχύτητα $V_2=4\text{m/s}$ και το νήμα μήκους L διαγράφει μέγιστη γωνία, ϕ μέχρι να σταματήσει στιγμιαία. Το M ανεβαίνει σε μέγιστο ύψος h . Γράφω την ΑΔΜΕ:

$$\frac{1}{2}MV^2 = Mgh \rightarrow h = \frac{V^2}{2g} \rightarrow h = 0,8\text{m}. \text{ Οπότε η απόσταση, } y = L - h = 0,8\text{m}$$

$$\sin \phi = \frac{y}{L} = 0,5 \rightarrow \phi = 60^\circ$$

δ. Στην κατακόρυφη θέση μετά την κρούση το M έχει ταχύτητα $V_2=4\text{m/s}$. Οι δυνάμεις που δέχεται είναι η τάση του νήματος, T και το βάρος του Mg . Η συνισταμένη ισούται με την κεντρομόλο δύναμη στη θέση αυτή αφού το σώμα ξεκινάει να διαγράφει κυκλική τροχιά ακτίνας L .

$$\Sigma F = \frac{MV_1^2}{L} \rightarrow T - Mg = \frac{MV_2^2}{L} \rightarrow T = Mg + \frac{MV_2^2}{L} \rightarrow \mathbf{T = 60\text{N}}$$

Γ.7 Σώμα μάζας $m_1=0,5\text{kg}$ κινείται με ταχύτητα μέτρου $v_1=100\text{m/s}$ πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και συγκρούεται με άλλο σώμα μάζας $m_2=5,5\text{kg}$ που είναι δεμένο στην άκρη ελατηρίου με σταθερά $k=550\text{N/m}$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Μετά την κρούση τα δύο σώματα κινούνται με αντίθετες ταχύτητες. Να βρεθούν:

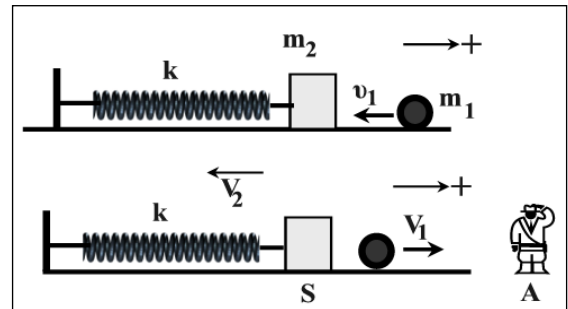
α. Το είδος της κρούσης.

β. Η εξίσωση κίνησης του σώματος μάζας m_2 μετά την κρούση. Θεωρούμε ως χρονική στιγμή $t_0=0$ αμέσως μετά την κρούση και ως θετική τη φορά προς τα δεξιά.

γ. Η απομάκρυνση του m_2 από τη θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή που η κινητική ενέργεια του ταλαντωτή είναι τριπλάσια της δυναμικής.

δ. Το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας της μάζας m_1 που έχασε αυτή κατά την κρούση.

ε. Αν αμέσως μετά την κρούση το συσσωμάτωμα αρχίσει να εκπέμπει ήχο συχνότητας 1000Hz ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της συχνότητας που αντιλαμβάνεται παρατηρητής που είναι ακίνητος 2m δεξιά από τη θέση ισορροπίας του ταλαντωτή; Δίνεται η ταχύτητα του ήχου στον αέρα $v_{\eta\chi}=340\text{m/s}$.



Λύση

α. Μετά την κρούση οι ταχύτητες έχουν αντίθετες κατευθύνσεις αλλά ίσα μέτρα, $V_1=V_2=V$.

Από την ΑΔΟ: $p_{\text{προ}}=p_{\text{μετα}} \rightarrow -m_1v_1=m_1V_1-m_2V_2 \rightarrow V=\frac{m_1v_1}{m_2-m_1} \rightarrow V=10\text{m/s}$.

Συγκρίνουμε τις κινητικές ενέργειες του συστήματος πριν και μετά την κρούση:

$K_{\text{προ}}=\frac{1}{2}m_1v_1^2=2500\text{J}$, $K_{\text{μετα}}=\frac{1}{2}m_1V_1^2+\frac{1}{2}m_2V_2^2=300\text{J}$. Άρα $K_{\text{μετα}}<K_{\text{προ}} \rightarrow$ **Ανελαστική** κρούση.

β. Μετά την κρούση το σώμα m_2 κάνει ΑΑΤ. $\Sigma F=F_{\text{ελ}}=-kx$. Άρα $D=k=100\text{N/m}$, $\omega=\sqrt{k/m_2}=10\text{rad/s}$. Τη στιγμή $t_0=0$ βρίσκεται στη θέση ισορροπίας με ταχύτητα $V=10\text{m/s}$ που είναι μέγιστη ταχύτητα, άρα $V=A\omega \rightarrow A=1\text{m}$. Αλλά τη $t_0=0$ είναι $x=0$ και $V<0$, άρα υπάρχει αρχική φάση $\phi_0=\pi\text{rad}$. Η εξίσωση κίνησης θα είναι: **$x=1\mu\text{m}(10t+\pi)$ (SI).**

γ. $K=3U$ και $K+U=E \rightarrow E=4U \rightarrow \frac{1}{2}kA^2=4\frac{1}{2}kx^2 \rightarrow x=\pm 0,5\text{m}$.

δ. $\frac{\Delta K_1}{K_{1\text{προ}}}100\%=\frac{\frac{1}{2}m_1V_1^2-\frac{1}{2}m_1v_0^2}{\frac{1}{2}m_1v_0^2}100\% \rightarrow \frac{\Delta K_1}{K_{1\text{προ}}}100\%=-99\%$. Άρα έχασε το **99%** της αρχικής της κινητικής ενέργειας.

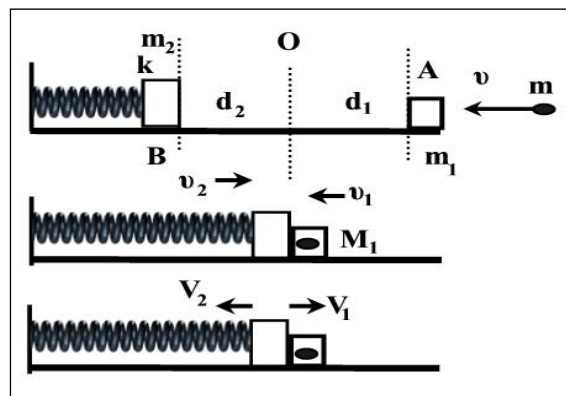
ε. Γενικώς ο παρατηρητής, Α, θα ακούει ήχους με συχνότητες $f_A=\frac{v}{v\pm v_s}\cdot f_s$.

Η μέγιστη τιμή θα προκύψει τη στιγμή που το σώμα m_2 που είναι η πηγή των ήχων θα πλησιάζει προς τον παρατηρητή, Α με μέγιστη ταχύτητα, $v_{\text{smax}}=V_2=10\text{m/s}$ δηλαδή θα περνάει από τη θέση $x=0$ με φορά προς τα δεξιά. Άρα: $f_{A\text{max}}=\frac{v}{v-v_{\text{smax}}}\cdot f_s \rightarrow f_{A\text{max}}=1030,3\text{Hz}$.

Η ελάχιστη τιμή θα προκύψει τη στιγμή που το σώμα m_2 που θα απομακρύνεται από τον παρατηρητή, Α με μέγιστη ταχύτητα, δηλαδή θα περνάει από τη θέση $x=0$ με φορά προς τα αριστερά. Άρα:

$f_{A\text{min}}=\frac{v}{v+v_{\text{smin}}}\cdot f_s \rightarrow f_{A\text{min}}=971,4\text{Hz}$.

Γ.8 Βλήμα μάζας m κινούμενο οριζόντια με ταχύτητα $v=16\text{m/s}$ συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με ακίνητο σώμα A , μάζας $m_1=3m$ που βρίσκεται ακίνητο σε λείο οριζόντιο επίπεδο και σε απόσταση $d_1=0,157\text{m}$ από σημείο O του επιπέδου στην ευθεία κίνησης του βλήματος, όπως φαίνεται στο σχήμα. Σώμα B , μάζας $M_2=4m$ είναι δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο. Ο άξονας του ελατηρίου συμπίπτει με την διεύθυνση κίνησης του βλήματος. Αρχικά το ελατήριο είναι συμπιεσμένο ώστε το σώμα B να απέχει απόσταση d_2 από το σημείο O που αντιστοιχεί στη θέση του φυσικού μήκους του ελατηρίου. Τη στιγμή που το βλήμα προσκρούει στο σώμα A , το σώμα B αφήνεται ελεύθερο. Το συσσωμάτωμα βλήματος και σώματος A κινούμενο με ταχύτητα v_1 συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με το B τη στιγμή που το B έχει μέγιστη ταχύτητα για πρώτη φορά. Να βρείτε:



α. Το μέτρο της ταχύτητας v_1 .

β. Το μέτρο της ταχύτητας V_2 του σώματος B αμέσως μετά την κρούση με το συσσωμάτωμα.

γ. Την περίοδο ταλάντωσης του σώματος, B .

δ. Το νέο πλάτος A της ταλάντωσης του B μετά την κρούση με το συσσωμάτωμα.

Λύση

α. Στην πλαστική κρούση γράφω $\Delta\Delta O$: $mv=(m_1+m)v_1 \rightarrow v_1=4\text{m/s}$.

β. Θεωρώ τη μάζα του συσσωματώματος $m+m_1=M_1=4\cdot m$. Στο σημείο O φτάνουν με αντίθετες κατευθύνσεις τα σώματα $M_1=4\cdot m$ με ταχύτητα v_1 και το σώμα $M_2=4\cdot m$ με ταχύτητα v_2 . Η κρούση είναι ελαστική και μετωπική με ίσες μάζες, $M_1=M_2$, οπότε τα δύο σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες. Από τις $\Delta\Delta O$ και $\Delta\Delta KE$ και με επίλυση του συστήματος:

$$V_2 = \frac{(M_2 - M_1)v_2 + 2M_1v_1}{M_1 + M_2} \rightarrow V_2 = v_1 = 4\text{m/s} \text{ με φορά προς τα αριστερά όπως ήταν η φορά του } v_1$$

γ. Το σώμα B χρειάστηκε χρόνο, $t_1=T/4$ (T η περίοδος της ΑΑΤ) για να φτάσει στη θέση ισορροπίας O για πρώτη φορά. Τον ίδιο χρόνο όμως χρειάστηκε και το συσσωμάτωμα M_1 για να διανύσει την απόσταση d_1 με ταχύτητα v_1 .

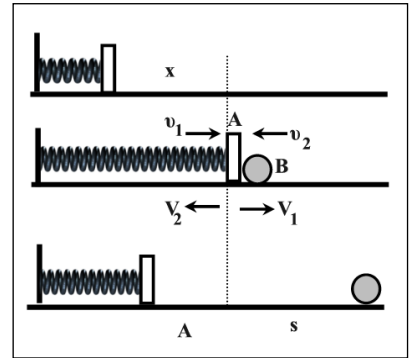
$$t_1 = T/4$$

$$t_1 = d_1/v_1 \rightarrow T = 4d_1/v_1 \rightarrow T = 0,157\text{s}$$

δ. Μετά την ελαστική κρούση η περίοδος των ΑΑΤ του σώματος B δεν μεταβάλλεται, ενώ η μέγιστη ταχύτητα είναι η $V_2=4\text{m/s}$, στη θέση ισορροπίας, O . Άρα το νέο πλάτος A της ΑΑΤ του σώματος B είναι:

$$V_2 = A\omega \rightarrow V_2 = A \frac{2\pi}{T} \rightarrow A = \frac{V_2 T}{2\pi} \rightarrow A = 0,1\text{m}$$

Γ.9 Σώμα (A) μάζας $m_1=4\text{kg}$ είναι συνδεδεμένο στο ελεύθερο άκρο ελατηρίου σταθεράς $k=100\text{N/m}$ και ισορροπεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Συσπειρώνουμε το ελατήριο κατά $x=0,6\text{m}$ και το αφήνουμε ελεύθερο. Τη στιγμή που το σώμα (A) φτάνει στη θέση ισορροπίας του, συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με άλλο σώμα (B) μάζας $m_2=8\text{kg}$ που κινείται με ταχύτητα $v_2=-3\text{m/s}$. Μετά την κρούση το σώμα (A) κάνει απλές αρμονικές ταλαντώσεις με σταθερά επαναφοράς ίση με τη σταθερά του ελατηρίου.



α. Να βρεθούν οι ταχύτητες των σωμάτων αμέσως μετά την κρούση.

β. Να γραφεί η χρονική εξίσωση απομάκρυνσης του σώματος (A) από τη θέση ισορροπίας του, μετά την κρούση, αν ως $t_0=0$ θεωρήσουμε τη στιγμή που έγινε η κρούση και ως θετική τη φορά προς τα δεξιά.

γ. Να βρεθεί η απόσταση των δύο σωμάτων τη στιγμή που μηδενίζεται για πρώτη φορά μετά την κρούση, η ταχύτητα του σώματος, (A).

δ. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος (A), τη χρονική στιγμή $t_1=\pi/20\text{s}$.

Λύση

α. Γράφω ΑΔΕ για τον ταλαντωτή (m_1-k) και βρίσκω την ταχύτητα v_1 με την οποία φτάνει το σώμα Α στη θέση ισορροπίας: $\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}m_1v_1^2 \rightarrow v_1=3\text{m/s}$.

Στην ελαστική κρούση θεωρώ τη θετική φορά δεξιά άρα οι ταχύτητες είναι $v_1=3\text{m/s}$ και $v_2=-3\text{m/s}$

Γράφω ΑΔΟ και ΑΔΜΕ:

$$m_1v_2+m_2v_2=m_1V_1+m_2V_2$$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=\frac{1}{2}m_1V_1^2+\frac{1}{2}m_2V_2^2$$

$$V_1=\frac{(m_1-m_2)v_1+2m_2v_2}{m_1+m_2} \rightarrow V_1=-5\text{m/s}$$

Από τη λύση του συστήματος προκύπτουν:

$$V_2=\frac{(m_2-m_1)v_2+2m_1v_1}{m_1+m_2} \rightarrow V_2=1\text{m/s}$$

β. Το σώμα Α κινείται μετά την κρούση αριστερά και κάνει ΑΑΤ με μέγιστη ταχύτητα $|V_1|=5\text{m/s}$, στη θέση ισορροπίας. Το σώμα Α κάνει ΑΑΤ με $\omega=\sqrt{\frac{k}{m_1}} \rightarrow \omega=5\text{rad/s}$ και πλάτος Α:

$V_1=A\omega \rightarrow A=1\text{m}$. Με τη θετική τη φορά δεξιά, και για $t_0=0$, $x=0$ και $V_1<0$, η αρχική φάση είναι $\phi=\pi$ rad. Άρα: **$x=1\cdot\eta\mu(5t+\pi)$ (SI)**.

γ. Η ταχύτητα του Α μηδενίζεται μόλις φτάσει για 1^η φορά στο αρνητικό πλάτος άρα σε χρόνο $t=T/4=2\pi/4 \rightarrow t=0,1\pi\text{s}$. Το σώμα Β μετά την κρούση κινείται με σταθερή ταχύτητα $V_2=1\text{m/s}$ και στο χρόνο t_1 διανύει απόσταση s από τη θέση ισορροπίας, Ο.

$$s=V_2t=1\cdot 0,1\cdot 3,14\text{m} \rightarrow s=0,314\text{m}.$$

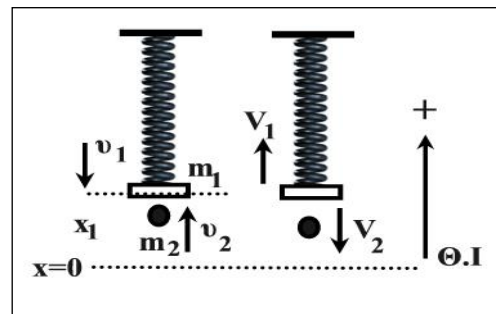
$$\text{Άρα τα σώματα θα απέχουν: } A+s=1\text{m}+0,314\text{m}=\mathbf{1,314\text{m}}$$

δ. Τη χρονική στιγμή $t_1=\pi/20\text{s}$ είναι: $x_1=1\eta\mu(\pi/4+\pi)=1\cdot(-\sqrt{2}/2) \rightarrow x_1=-\sqrt{2}/2\text{m}$

$$\text{και } v_1=5\cdot\sigma\upsilon\upsilon\eta(\pi/4+\pi)=5\cdot(-\sqrt{2}/2) \rightarrow v_1=-2,5\sqrt{2}\text{m/s}$$

$$\frac{\Delta K}{\Delta t}=\Sigma F_1\cdot v_1=-kx_1v_1=-100\cdot(-\sqrt{2}/2)\cdot(-2,5\sqrt{2}) \rightarrow \frac{\Delta K}{\Delta t}=\mathbf{-25\text{J/s}}$$

Γ.10 Το σώμα (Σ) του σχήματος έχει μάζας m_1 και είναι δεμένο στην άκρη κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $k=400\text{N/m}$, η άλλη άκρη του οποίου είναι στερεωμένη ακλόνητα. Το σώμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος $A=1,2\text{m}$ και τη χρονική στιγμή $t_0=0$ διέρχεται από τη θέση $x=+x_1$ με ταχύτητα, $v=v_1<0$. Ως θετική θεωρείται η φορά προς τα πάνω. Την ίδια στιγμή συγκρούεται ελαστικά και κεντρικά με σφαίρα (σ) μάζας $m_2=4\text{kg}$ η οποία κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα μέτρου, v_2 . Η χρονική εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης του σώματος (Σ) μετά την κρούση είναι: $V_1=10\sin(10t+\pi/3)$ (SI). Να υπολογιστούν:



α. Το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας, v_2 , μόλις πριν την κρούση.

β. Το πλάτος, A' , της ταλάντωσης του σώματος (Σ) μετά την κρούση.

γ. Η κινητική και η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης του σώματος (Σ) αμέσως μετά την κρούση.

δ. Η ταχύτητα v_1 του σώματος m_1 μόλις πριν την κρούση.

ε. Το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος (Σ) αμέσως μετά την κρούση.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

Λύση

α. Πριν και μετά την ελαστική κρούση, ο ταλαντωτής μάζα, m_1 – ελατήριο, k μένει ο ίδιος συνεπώς ταλαντώνεται με την ίδια συχνότητα, δηλαδή $\omega=10\text{rad/s}$. Από τη σχέση $k=m_1\omega^2 \rightarrow m_1=4\text{kg}$. Άρα οι μάζες των σωμάτων m_1 και m_2 που συγκρούονται ελαστικά είναι ίσες. Άρα κατά την κρούση συμβαίνει ανταλλαγή ταχυτήτων διότι:

$$\text{ΑΔΟ: } m_1v_1 + m_2v_2 = m_1V_1 + m_2V_2 \quad (1)$$

$$\text{ΑΔΚΕ: } \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 \quad (2)$$

$$\text{Από τη λύση του συστήματος με } m_1=m_2 \text{ προκύπτουν: } V_1=v_2 \quad (3) \text{ και } V_2=v_1 \quad (4).$$

Από την εξίσωση της ταχύτητας του σώματος m_1 μετά την κρούση έχουμε:

$$V_1 = 10\sin(10t+\pi/3) \stackrel{t=0}{=} V_1 = 5\text{m/s}. \text{ Άρα από την (3) έχουμε, } v_2 = 5\text{m/s}.$$

β. Με $\omega=10\text{rad/s}$ και μέγιστη ταχύτητα $V_{1\text{max}}=10\text{m/s}$ το πλάτος είναι $V_{1\text{max}}=A'\omega \rightarrow A'=1\text{m}$.

γ. Μετά την κρούση η κινητική ενέργεια είναι $K=\frac{1}{2}m_1V_1^2 \rightarrow K=50\text{J}$

Η ολική ενέργεια μετά την κρούση είναι, $E=\frac{1}{2}kA'^2 \rightarrow E=200\text{J}$

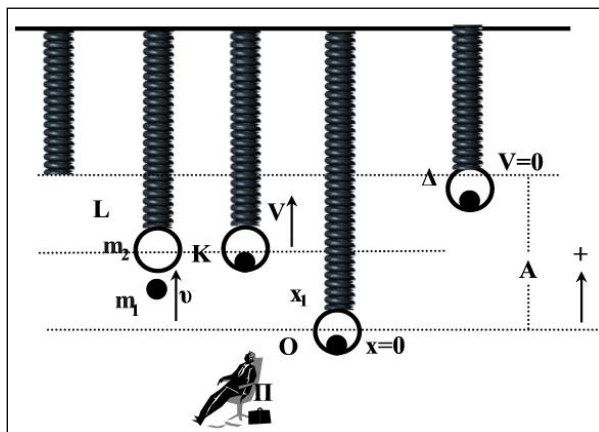
$$E=K+U \rightarrow U=E-K \rightarrow U=150\text{J}$$

δ. Πριν και αμέσως μετά την κρούση το m_1 είναι στην ίδια απομάκρυνση x_1 από τη θέση ισορροπίας αφού η κρούση είναι ελαστική, η θέση ισορροπίας δεν μεταβάλλεται. Η δυναμική ενέργεια πριν και μετά την κρούση δεν αλλάζει. Από τη σχέση της δυναμικής ενέργειας: $U=\frac{1}{2}kx_1^2 \rightarrow x_1=\sqrt{3}/2\text{m}$. Από την ΑΔΕ για την ΑΑΤ, πριν την κρούση, βρίσκω τη v_1 .

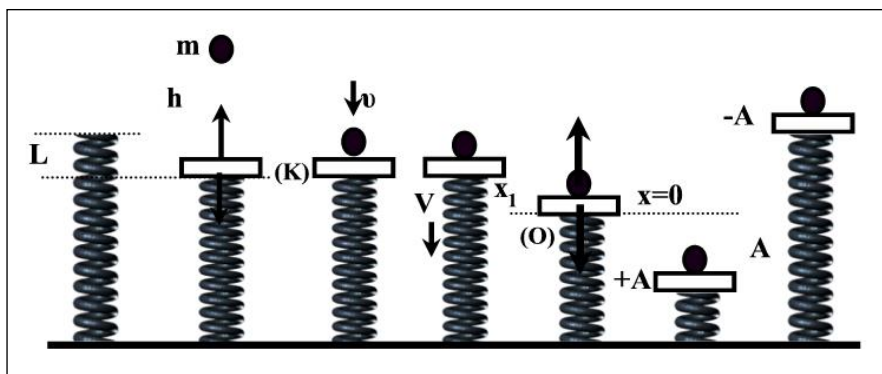
$$E=K+U \rightarrow \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 \rightarrow v_1 = \sqrt{69}\text{m/s}.$$

$$\text{ε. } \frac{\Delta K}{\Delta t} = \Sigma F \cdot V_1 = -kx_1V_1 = -(400\text{N/m}) \cdot (\sqrt{3}/2\text{m}) \cdot (5\text{m/s}) \rightarrow \frac{\Delta K}{\Delta t} = -10^3\sqrt{3}\text{J/s}$$

Να θεωρηθεί ως $t_0=0$ η χρονική στιγμή αμέσως μετά την κρούση και ως θετική, η φορά κατακόρυφα προς τα πάνω. Δίνονται η ταχύτητα του ήχου $v=340\text{m/s}$, το $g=10\text{m/s}^2$ και $\sqrt{3}=1,7$.



Γ.12 Δίσκος μάζας $M=2\text{kg}$ ισορροπεί πάνω σε ελατήριο σταθεράς $k=100\text{N/m}$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Από ύψος h αφήνουμε ένα σώμα μάζας $m=2\text{kg}$ να πέσει κατακόρυφα πάνω στο δίσκο και η κρούση που ακολουθεί είναι ακαριαία και πλαστική και γίνεται τη χρονική στιγμή $t_0=0$. Μετά



την κρούση το συσσωμάτωμα κάνει ΑΑΤ με πλάτος $A=0,4\text{m}$. Να υπολογιστούν:

α. Η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

β. Το ύψος h από το οποίο αφήνεται το σώμα μάζας, m .

γ. Η εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο.

δ. Η μέγιστη τιμή της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$. Ως αρχή του άξονα να θεωρηθεί η θέση ισορροπίας του συσσωματώματος και ως θετική η κατεύθυνση κατά την οποία το ελατήριο συσπειρώνεται.

Λύση

α. Το m πέφτει από ύψος h και φτάνει στο δίσκο με ταχύτητα v . Από ΑΔΜΕ: $mgh=\frac{1}{2}mv^2$ (1)

Το m κάνει κρούση πλαστική με το M . Ισχύει η ΑΔΟ: $mv=(M+m)V$ (2)

Ο δίσκος M ισορροπεί στη θέση (Κ) όπου το ελατήριο έχει συσπείρωση L . Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα $M+m$ κάνει ΑΑΤ με θέση ισορροπίας την (Ο) που είναι χαμηλότερα από τη θέση (Κ) κατά x_1 . Γράφω συνθήκες ισορροπίας στα (Κ) και (Ο) και βρίσκω τα L και x_1 .

$$\Sigma F_{(K)}=0 \rightarrow Mg - kL = 0 \rightarrow L = Mg/k = 0,2\text{m} \quad (3)$$

$$\Sigma F_{(O)}=0 \rightarrow (M+m)g - k(L+x_1) = 0 \rightarrow x_1 = mg/k = 0,2\text{m} \quad (4)$$

Γράφω ΑΔΕ για τις ΑΑΤ του συστήματος $(M+m)$ – ελατήριο, k .

$$K+U=E \rightarrow \frac{1}{2}(M+m)V^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}kA^2 \rightarrow V = \sqrt{3}\text{m/s} \quad (5)$$

$$\text{β. Από (2)(5)} \rightarrow v = \frac{(M+m)V}{m} \rightarrow v = 2\sqrt{3}\text{m/s} \quad (6)$$

$$\text{Από (1)(6)} \rightarrow h = \frac{v^2}{2g} \rightarrow h = 0,6\text{m}$$

γ. Η γωνιακή συχνότητα $\omega = \sqrt{k/(M+m)} = 5\text{rad/s}$. Τη χρ. στιγμή $t_0=0$ είναι $x=-x_1=-0,2\text{m}$ και $V>0$. $x=A\eta\mu(\omega t+\phi_0) \rightarrow -0,2=0,4\eta\mu\phi_0 \rightarrow \eta\mu\phi_0=-1/2 \rightarrow \eta\mu\phi_0=\eta\mu(7\pi/6) \rightarrow \phi_0=2\kappa\pi+7\pi/6 \rightarrow \phi_0=7\pi/6\text{ rad}$ και

$\phi_0=2\kappa\pi+\pi-7\pi/6 \stackrel{\kappa=1}{=} \phi_0=11\pi/6$. Επειδή όμως η $V>0$ πρέπει $\sin\phi_0>0$ άρα η $\phi=11\pi/6\text{rad}$

Άρα η εξίσωση απομάκρυνσης είναι $x=0,4\eta\mu(5t+11\pi/6)$ (SI)

δ. Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι $U_{ελ} = \frac{1}{2}k(\Delta L)^2$. Η μέγιστη τιμή της παραμόρφωσης του ελατηρίου είναι όταν το σώμα φτάνει στην κατώτερη θέση του (+A). Άρα

$$\Delta L_{\max} = (L+x_1+A) = 0,8\text{m}. \text{ Άρα : } U_{ελ\max} = 32\text{J}$$

Γ.13 Στο διπλανό σχήμα δίνονται $m_3=1\text{kg}$, $m_2=3\text{kg}$ και $m_1=1\text{kg}$ και $k=100\text{N/m}$. Το m_1 έρχεται με ταχύτητα $v=2\sqrt{3}\text{m/s}$ και συγκρούεται πλαστικά με το m_2 τη χρονική στιγμή $t=0$. Το m_1+m_2 κάνει ΑΑΤ χωρίς το m_3 να χάνει την επαφή του με το δάπεδο.

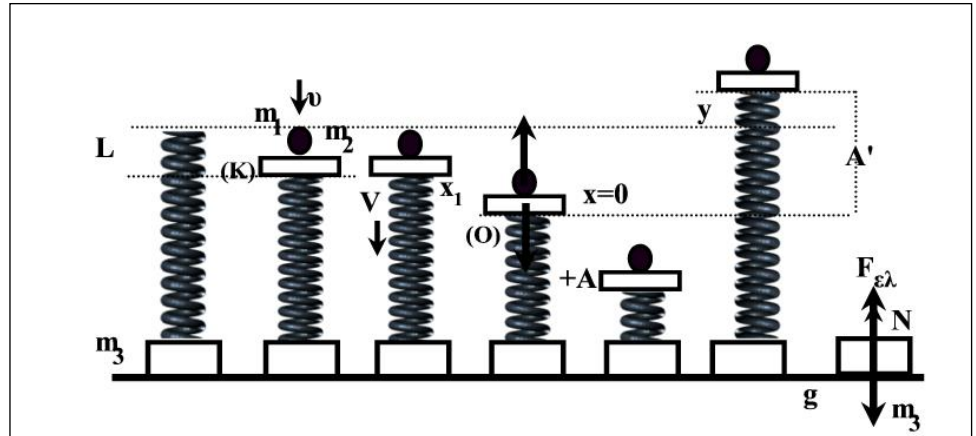
α. Να γράψετε την εξίσωση απομάκρυνσης των ΑΑΤ του συσσωματώματος με θετική φορά προς τα πάνω.

β. Να υπολογίσετε το μήκος της διαδρομής που διανύει το συσσωμάτωμα μέχρι να σταματήσει στιγμιαία για πρώτη φορά;

γ. Να γράψετε την χρονική εξίσωση της δύναμης που ασκεί το ελατήριο στο συσσωμάτωμα κατά τη διάρκεια της ΑΑΤ.

δ. Να βρείτε το μέγιστο πλάτος των ΑΑΤ του συσσωματώματος ώστε το σώμα μάζας m_3 να μην ανασηκωθεί από το πάτωμα.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.



Λύση

α. Η αρχική συσπείρωση L στη θέση (K) είναι: $\Sigma F_{(K)}=0 \rightarrow m_2 g - kL = 0 \rightarrow L = m_2 g / k = 0,3\text{m}$

Στη νέα θέση ισορροπίας $(O) \rightarrow \Sigma F_{(O)}=0 \rightarrow (m_1+m_2)g - k(L+x_1)=0 \rightarrow x_1=0,1\text{m}$

Από ΑΔΟ στην κρούση: $m_1 v = (m_1+m_2)V \rightarrow V = \sqrt{3}/2\text{m/s}$

Από ΑΔΕ: $K+U=E \rightarrow \frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}kA^2 \rightarrow A=0,2\text{m}$

Η γωνιακή συχνότητα $\omega = \sqrt{k/(m_1+m_2)} \rightarrow \omega = 5\text{rad/s}$

Η αρχική φάση ϕ_0 . Για $t_0=0$, $x=x_1=0,1\text{m}$ αλλά $V<0$, άρα $\phi_0=5\pi/6\text{ rad}$ οπότε: **$x=0,2\eta\mu(5t+5\pi/6)$ (SI)**

β. $s=x_1+A=0,1\text{m}+0,2\text{m} \rightarrow s=0,3\text{m}$

γ. $\Sigma F = -kx \rightarrow F_{ελ} - (m_1+m_2)g = -kx \rightarrow F_{ελ} = (m_1+m_2)g - kx \rightarrow F_{ελ} = 40 - 100 \cdot 0,2\eta\mu(5t+5\pi/6) \rightarrow$
 $F_{ελ} = 40 - 20\eta\mu(5t+5\pi/6)$ (SI)

δ. Το σώμα μάζας m_3 δέχεται τρεις δυνάμεις, το βάρος του $m_3 g$, την αντίδραση N του εδάφους και τη δύναμη του ελατηρίου $F_{ελ}$. Το m_3 μπορεί να αποχωριστεί από το έδαφος μόνο αν το ελατήριο είναι σε επιμήκυνση οπότε και η $F_{ελ}$ έχει φορά προς τα πάνω όπως στο σχήμα. Το ελατήριο τότε θα έχει μέγιστη επιμήκυνση κατά y από το φυσικό του μήκος και το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι έστω το A' . Η επιμήκυνση $y = A' - L - x_1$.

Το m_3 όμως συνεχώς ισορροπεί οπότε: $N + F_{ελ} - m_3 g = 0 \rightarrow N = m_3 g - F_{ελ}$ (1)

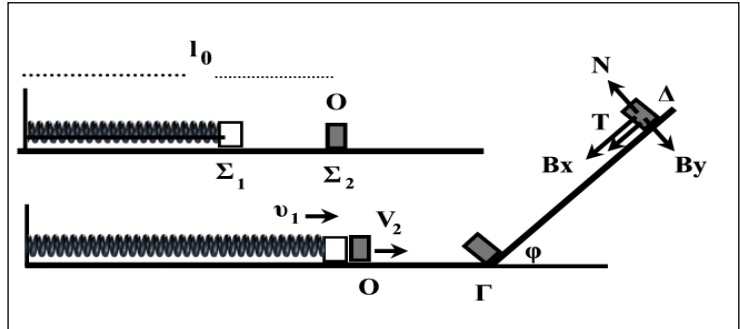
Για να μην ανασηκώνεται το m_3 από το έδαφος πρέπει $N > 0$ (2)

Η δύναμη του ελατηρίου: $F_{ελ} = ky = k(A' - L - x_1)$ (3)

Άρα από (1)(2)(3) $\rightarrow m_3 g - k(A' - L - x_1) > 0 \rightarrow A' < 0,5\text{m}$. Άρα **$A'_{\max} = 0,5\text{m}$**

Γ.14 Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 , αμελητέων διαστάσεων, με μάζες $m_1=1\text{kg}$ και $m_2=3\text{kg}$ αντίστοιχα είναι τοποθετημένα σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το σώμα Σ_1 είναι δεμένο στη μία άκρη οριζώντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=100\text{N/m}$. Η άλλη άκρη του ελατηρίου, είναι ακλόνητα στερεωμένη. Το ελατήριο με τη βοήθεια νήματος είναι συσπειρωμένο κατά $0,2\text{m}$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το Σ_2 ισορροπεί στο οριζόντιο επίπεδο στη θέση που αντιστοιχεί στο φυσικό μήκος ℓ_0 του ελατηρίου.

Κάποια χρονική στιγμή κόβουμε το νήμα και το σώμα Σ_1 κινούμενο προς τα δεξιά συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το σώμα Σ_2 στο σημείο Ο. Θεωρώντας ως αρχή μέτρησης των χρόνων τη στιγμή της κρούσης και ως θετική φορά κίνησης την προς τα δεξιά, να υπολογίσετε



α. την ταχύτητα του σώματος Σ_1 λίγο πριν την κρούση του με το σώμα Σ_2 .

β. τις ταχύτητες των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 , αμέσως μετά την κρούση.

γ. Τη χρονική στιγμή που το Σ_1 ακινητοποιείται στιγμιαία για πρώτη φορά το Σ_2 φτάνει στην αρχή Γ κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης $\varphi=30^\circ$. Πόση είναι η απόσταση (ΟΓ);

δ. Στη συνέχεια το Σ_2 ανεβαίνει το κεκλιμένο επίπεδο και ακινητοποιείται στιγμιαία στο σημείο Δ σε απόσταση $s=(\Delta\Gamma)=0,05\text{m}$. Πόσο είναι ο συντελεστής τριβής μεταξύ Σ_2 και κεκλιμένου επιπέδου; Δεχθείτε την κίνηση του σώματος Σ_1 τόσο πριν, όσο και μετά την κρούση ως απλή αρμονική ταλάντωση σταθεράς k . Δίνεται $\pi=3,14$.

Λύση

α. Από την ΑΔΜΕ για την κίνηση του Σ_1 : $\frac{kx^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} \rightarrow v_1 = x\sqrt{k/m_1} \rightarrow v_1 = 2\text{m/s}$

β. Το Σ_1 συγκρούεται ελαστικά με το m_2 με ταχύτητα $v_1=2\text{m/s}$. μετά την κρούση το Σ_1 έχει ταχύτητα V_1 και το Σ_2 , V_2 . Ισχύουν ΑΔΟ και ΑΔΚΕ στην κρούση:

$$m_1 v_1 = m_1 V_1 + m_2 V_2 \quad V_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \rightarrow V_1 = -1\text{m/s}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 \quad \text{Από τη λύση:} \quad V_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \rightarrow V_2 = 1\text{m/s}$$

γ. Το Σ_1 κάνει ΑΑΤ με θέση ισορροπίας Ο. Ακινητοποιείται για πρώτη φορά όταν βρεθεί στη μέγιστη απομάκρυνση (πλάτος), τη στιγμή $t_1 = T/4$ όπου: $T = 2\pi\sqrt{m_1/k} = \pi/5\text{s}$. Άρα $t_1 = \pi/20\text{s} = 0,157\text{s}$ Σε χρόνο t_1 το Σ_2 έχει διανύσει, με σταθερή ταχύτητα V_2 , απόσταση (ΟΓ) = $V_2 t_1 \rightarrow (\text{ΟΓ}) = 0,157\text{m}$.

δ. Γράφω ΘΜΚΕ για το Σ_2 κατά την κίνηση το κεκλιμένο επίπεδο με την επίδραση των δυνάμεων του βάρους $B = m_2 g$, της τριβής T και κάθετης αντίδρασης N . Ισχύουν:

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow N = B_y = m_2 g \sin \varphi \quad \text{και} \quad T = \mu N = \mu m_2 g \sin \varphi$$

Τα έργα είναι: $W_B = -B_x s = -(m_2 g \sin \varphi) s$, $W_T = -T s = -(\mu m_2 g \sin \varphi) s$, $W_N = 0$.

$$\Sigma W = \Delta K \rightarrow W_B + W_T = 0 - \frac{1}{2} m_2 V_2^2 \rightarrow -m_2 g \sin \varphi - \mu m_2 g \sin \varphi = -\frac{1}{2} m_2 V_2^2 \rightarrow \mu = \frac{V_2^2 - 2g s \sin \varphi}{2g s \sin \varphi} \rightarrow \mu = \sqrt{3}/3$$

Γ.15 Από την κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης $\varphi=30^\circ$ στερεώνεται ακλόνητα ελατήριο. Στην κάτω άκρη του ελατηρίου σταθεράς $k=100\text{N/m}$ είναι δεμένο σώμα, Σ_2 μάζας $m_2=2\text{kg}$ και το σύστημα ισορροπεί πάνω στο λείο επίπεδο. Από τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου εκτοξεύεται σώμα Σ_1 μάζας, $m_1=2\text{kg}$ με αρχική ταχύτητα $v_0=4\text{m/s}$, το οποίο αφού διανύσει απόσταση $s=1,3\text{m}$ συγκρούεται πλαστικά και κεντρικά με το Σ_2 . Το συσσωμάτωμα κάνει απλές αρμονικές ταλαντώσεις. Να υπολογιστούν:

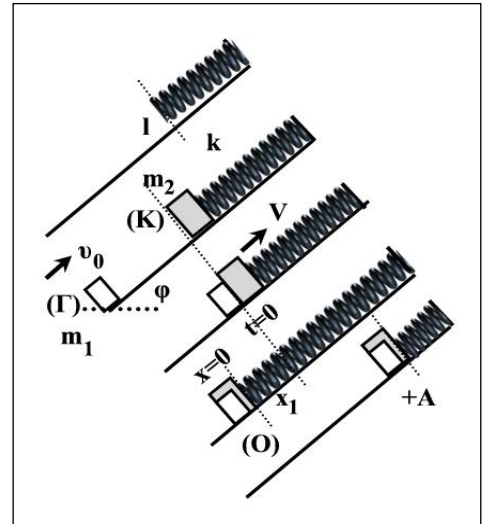
α. Το μέτρο της ταχύτητας του Σ_1 , μόλις πριν την κρούση.

β. Το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

γ. Η εξίσωση απομάκρυνσης της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

δ. Η μέγιστη απόλυτη τιμή του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας, η χρονική στιγμή που την αποκτάει για πρώτη φορά και η αντίστοιχη απομάκρυνση που συμβαίνει αυτό.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$. Θετική θεωρείται η φορά προς τα πάνω.



Λύση

α. Γράφω ΘΜΚΕ για το m_1 από το (Γ) στο (Κ) όπου το Σ_1 φτάνει με ταχύτητα v_1 .

$$W_{B_1} = \Delta K \rightarrow -m_1 g s \sin \varphi = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 \rightarrow v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2 g s \sin \varphi} \rightarrow v_1 = \sqrt{3} \text{ m/s}$$

β. Το Σ_1 συγκρούεται πλαστικά με το ακίνητο Σ_2 . Ισχύει η ΑΔΟ: $m_1 v_1 = (m_1 + m_2) V \rightarrow V = \sqrt{3}/2 \text{ m/s}$

γ. Λόγω αύξησης του βάρους η θέση ισορροπίας του $m_1 + m_2$ είναι στο (Ο) που βρίσκεται πιο κάτω από το (Κ) κατά x_1 . Στο (Κ) το ελατήριο έχει επιμήκυνση λ από το φυσικό του μήκος, ενώ στο (Ο) έχει $L + x_1$. Γράφω συνθήκες ισορροπίας στα (Κ) και (Ο) για να βρω το x_1 :

$$\Sigma F_{(K)} = 0 \rightarrow m_2 g \sin \varphi - k L = 0 \rightarrow L = 0,1 \text{ m}$$

$$\Sigma F_{(O)} = 0 \rightarrow (m_1 + m_2) g \sin \varphi - k(L + x_1) = 0 \rightarrow x_1 = 0,1 \text{ m}$$

$$\text{Από τη ΑΔΕ του ταλαντωτή } (m_1 + m_2) - k : K + U = E \rightarrow \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 + \frac{1}{2} k x_1^2 = \frac{1}{2} k A^2 \rightarrow A = 0,2 \text{ m}$$

$$\text{Η γωνιακή συχνότητα } \omega = \sqrt{k / (m_1 + m_2)} \rightarrow \omega = 5 \text{ rad/s}$$

Η αρχική φάση φ_0 . Για $t_0 = 0$, $x = x_1 = 0,1 \text{ m}$ αλλά $V > 0$, άρα $\varphi_0 = \pi/6 \text{ rad}$ οπότε: $x = 0,2 \sin(5t + \pi/6) \text{ (SI)}$

$$\delta. \frac{\Delta K}{\Delta t} = \Sigma F \cdot v = -kx \cdot v = -kA \sin(\omega t + \varphi_0) \cdot A \omega \cos(\omega t + \varphi_0) = -kA^2 \omega \sin(\omega t + \varphi_0) \cos(\omega t + \varphi_0) \rightarrow$$

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{kA^2 \omega}{2} 2 \sin(\omega t + \varphi_0) \cos(\omega t + \varphi_0) = \frac{kA^2 \omega}{2} \sin[2(\omega t + \varphi_0)] \rightarrow \left| \frac{\Delta K}{\Delta t} \right| = 10 \sin(10t + \pi/3)$$

Η μέγιστη τιμή είναι: $\left| \frac{\Delta K}{\Delta t} \right|_{\max} = 10 \text{ J/s}$ και προκύπτει για πρώτη φορά όταν:

$$\sin(10t + \pi/3) = 1 \rightarrow 10t + \pi/3 = 2\pi + \pi/2 \rightarrow 10t + \pi/3 = \pi/2 \rightarrow t_1 = \pi/60 \text{ s στη θέση:}$$

$$x_1 = 0,2 \sin(5t_1 + \pi/6) \rightarrow x_1 = 0,2 \sin(\pi/12 + \pi/6) = 0,2 \sin(\pi/4) \rightarrow x_1 = 0,1\sqrt{2} \text{ m}$$

Γ.16 Κατακόρυφο ελατήριο σταθεράς $k=100\text{N/m}$ έχει το κάτω άκρο του στερεωμένο στο δάπεδο.

Στο επάνω άκρο του ελατηρίου έχει προσδεθεί σώμα Σ_1 με μάζα $M=4\text{kg}$ που ισορροπεί. Δεύτερο σώμα Σ_2 με μάζα $m=2\text{kg}$ βρίσκεται πάνω από το πρώτο σώμα Σ_1 σε ύψος h όπως φαίνεται στο σχήμα. Μετακινούμε το σώμα Σ_1 προς τα κάτω κατά $d=\pi/20$ από τη θέση ισορροπίας και το αφήνουμε ελεύθερο, ενώ την ίδια στιγμή αφήνουμε ελεύθερο και το δεύτερο σώμα Σ_2 .

α. Να υπολογίσετε την τιμή του h ώστε τα δύο σώματα να συναντηθούν στη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 .

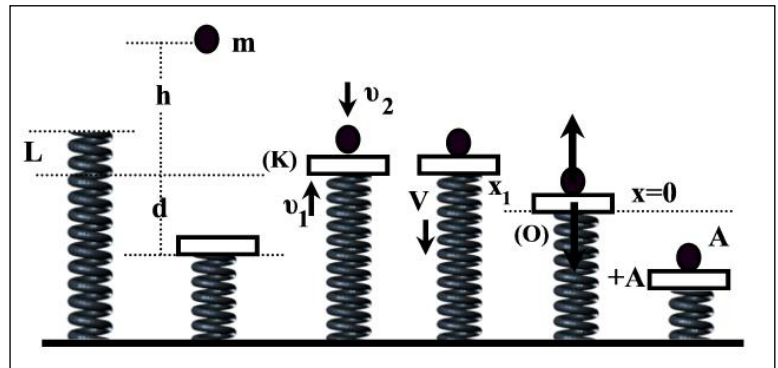
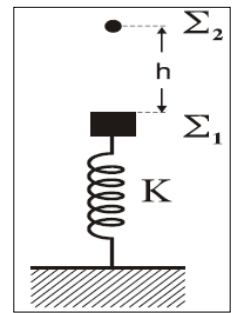
Αν η κρούση των δύο σωμάτων είναι πλαστική να υπολογίσετε:

β. την ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση.

γ. το πλάτος της ταλάντωσης του συσσωματώματος.

δ. το μέτρο της μέγιστης δύναμης που ασκεί το ελατήριο στο συσσωμάτωμα.

ε. Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση και το ρυθμό μεταβολής του Σ_1 την ίδια χρονική στιγμή. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$. Να θεωρήσετε ότι $\pi^2=10$ και $\sqrt{17/300}=0,24$.



Λύση

α. Ο χρόνος που χρειάζεται το σώμα m για να πέσει κατά h είναι: $h=\frac{1}{2}gt_1^2 \rightarrow t_1=\sqrt{2h/g}$ (1)

Ο χρόνος που χρειάζεται το M για να φτάσει στη θέση ισορροπίας, του όπου είναι και το σημείο κρούσης είναι $t_2=T/4$, όπου $T=2\pi\sqrt{M/k}=0,4\pi\text{s}$, άρα $t_2=0,1\pi\text{s}$ (2).

Όμως ξεκινάνε ταυτόχρονα και φτάνουν μαζί, άρα $t_1=t_2 \rightarrow h=0,05\text{m}$

β. Η ταχύτητα του Σ_2 είναι: $v_2=gt=10 \cdot 0,1\pi=\pi\text{ m/s}$. Η ταχύτητα του Σ_1 : $v_1=d\omega=d(2\pi/T)=\pi/4\text{ m/s}$

Από ΑΔΟ: $mv_2-Mv_1=(m+M)V \rightarrow V=\pi/6\text{m/s}$

γ. Μετά την κρούση το $M+m$ κάνει ΑΑΤ με θέση ισορροπίας την (Ο) που βρίσκεται κατά x_1 κάτω από την αρχική θέση ισορροπίας (Κ).

$$\Sigma F_K=0 \rightarrow Mg-kL=0 \rightarrow L=0,4\text{m}$$

$\Sigma F_O=0 \rightarrow (M+m)g-k(L+x_1)=0 \rightarrow x_1=0,2\text{m}$. Γράφω ΑΔΕ για τον ταλαντωτή από τη θέση (Κ) στη (Α):

$$E=K+U \rightarrow \frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}(M+m)V^2+\frac{1}{2}kx_1^2 \rightarrow \dots A=\sqrt{17/300}\text{m} \rightarrow A=0,24\text{m}$$

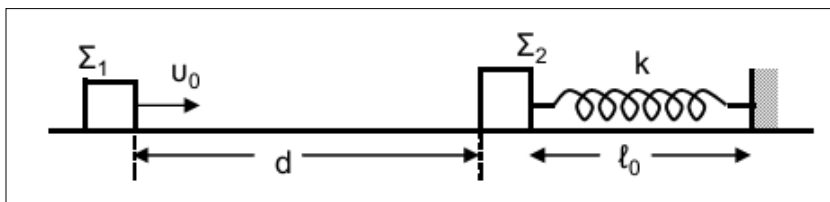
δ. Η μέγιστη $F_{ελ}$ ασκείται στη θέση μέγιστης συσπείρωσης (Α).

$$F_{ελ,max}=k(L+x_1+A)=100 \cdot 0,84 \rightarrow F_{ελ,max}=84\text{N}.$$

$$\text{ε. } \left| \frac{\Delta K}{\Delta t} \right| = \Sigma F \cdot V = kx_1 V \rightarrow \left| \frac{\Delta K}{\Delta t} \right| = 10\pi/3 \text{ J/s}$$

$$\left| \frac{\Delta K_1}{\Delta t} \right| = \Sigma F_1 \cdot V = M\alpha \cdot V = M(\omega^2 x_1) \cdot V = M \frac{k}{M+m} x_1 \cdot V \rightarrow \left| \frac{\Delta K_1}{\Delta t} \right| = 20\pi/9 \text{ J/s}$$

Γ.17 Σώμα Σ_1 με μάζα m_1 κινείται σε οριζόντιο επίπεδο ολισθαίνοντας προς άλλο σώμα Σ_2 με μάζα $m_2 = 2m_1$, το οποίο αρχικά είναι ακίνητο. Έστω v_0 η ταχύτητα που έχει το σώμα Σ_1 τη



στιγμή $t_0 = 0$ και ενώ βρίσκεται σε απόσταση $d = 1 \text{ m}$ από το σώμα Σ_2 . Αρχικά, θεωρούμε ότι το σώμα Σ_2 είναι ακίνητο πάνω στο επίπεδο δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου με αμελητέα μάζα και σταθερά ελατηρίου k , και το οποίο έχει το φυσικό του μήκος ℓ_0 . Το δεύτερο άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο τοίχο, όπως φαίνεται στο σχήμα:

Αμέσως μετά την κρούση, που είναι κεντρική και ελαστική, το σώμα Σ_1 αποκτά ταχύτητα με μέτρο $v_1' = \sqrt{10} \text{ m/s}$ και φορά αντίθετη της αρχικής ταχύτητας.

Δίνεται ότι ο συντελεστής τριβής ολίσθησης των δύο σωμάτων με το οριζόντιο επίπεδο είναι $\mu = 0,5$ και ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Γ1. Να υπολογίσετε την αρχική ταχύτητα v_0 του σώματος Σ_1 .

Γ2. Να υπολογίσετε το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που μεταφέρθηκε από το σώμα Σ_1 στο σώμα Σ_2 κατά την κρούση.

Γ3. Να υπολογίσετε το συνολικό χρόνο κίνησης του σώματος Σ_1 από την αρχική χρονική στιγμή t_0 μέχρι να ακινητοποιηθεί τελικά.

Γ4. Να υπολογίσετε τη μέγιστη συσπίρωση του ελατηρίου, αν δίνεται ότι $m_2 = 1 \text{ kg}$ και $k = 10^5 \text{ N/m}$. Δίνεται: $\sqrt{10} = 3,2$

Λύση

Γ1. Από την ελαστική κρούση: $v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \rightarrow -\sqrt{10} = -\frac{v_1}{3} \rightarrow v_1 = 3\sqrt{10} \text{ m/s}$

Από το ΘΜΚΕ στο Σ_1 για τη διαδρομή, d :

$$W_T = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} \rightarrow -\mu m_1 g d = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 - \frac{1}{2} m_1 v_0^2 \rightarrow v_0 = 10 \text{ m/s}$$

Γ2. Το ποσοστό που μεταβιβάστηκε είναι ίσο με το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που έχασε το Σ_1 κατά την ελαστική κρούση:

$$\pi = \frac{\Delta K_1}{K_{1\text{προ}}} = \frac{K_{1,\text{πρ}} - K_{1,\text{μετ}}}{K_{1,\text{πρ}}} \rightarrow \pi = 8/9$$

Γ3. Το σώμα Σ_1 επιβραδύνεται με επιβράδυνση a καθώς κινείται πάνω στο επίπεδο τόσο πριν όσο και μετά την κρούση. Αυτή είναι: $\Sigma F = m_1 a \rightarrow T = m_1 a \rightarrow \mu m_1 g = m_1 a \rightarrow a = 5 \text{ m/s}^2$.

Πριν τη κρούση χρειάζεται χρόνο t_1 για να διανύσει την απόσταση d και να φτάσει με ταχύτητα

$$v_1 \text{ στο } \Sigma_2. \text{ Άρα } v_1 = v_0 - at_1 \rightarrow t_1 = \frac{v_0 - v_1}{a} \rightarrow t_1 = 0,08 \text{ s.}$$

Στην επιστροφή μετά την κρούση χρειάζεται χρόνο t_2 μέχρι να σταματήσει ($v_{\text{τελ}} = 0$)

$$v_{\text{τελ}} = v_1' - at_2 \rightarrow 0 = v_1' - at_2 \rightarrow t_2 = 0,64 \text{ s}$$

$$\text{Άρα } t = t_1 + t_2 \rightarrow t = 0,72 \text{ s}$$

Γ4. Μετά την ελαστική κρούση το Σ_2 αποκτάει ταχύτητα: $v_2' = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2} \rightarrow v_2' = 2\sqrt{10} \text{ m/s}$

Από το ΘΜΚΕ για το Σ_2 μέχρι να σταματήσει στιγμιαία συσπείρωνοντας το ελατήριο κατά x :

$$W_{\text{ελ}} + W_T = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} \rightarrow (0 - \frac{1}{2} k x^2) + (-\mu m_2 g x) = 0 - \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \rightarrow 105 x^2 + 10 x - 40 = 0 \rightarrow x = 4/7 \text{ m}$$

