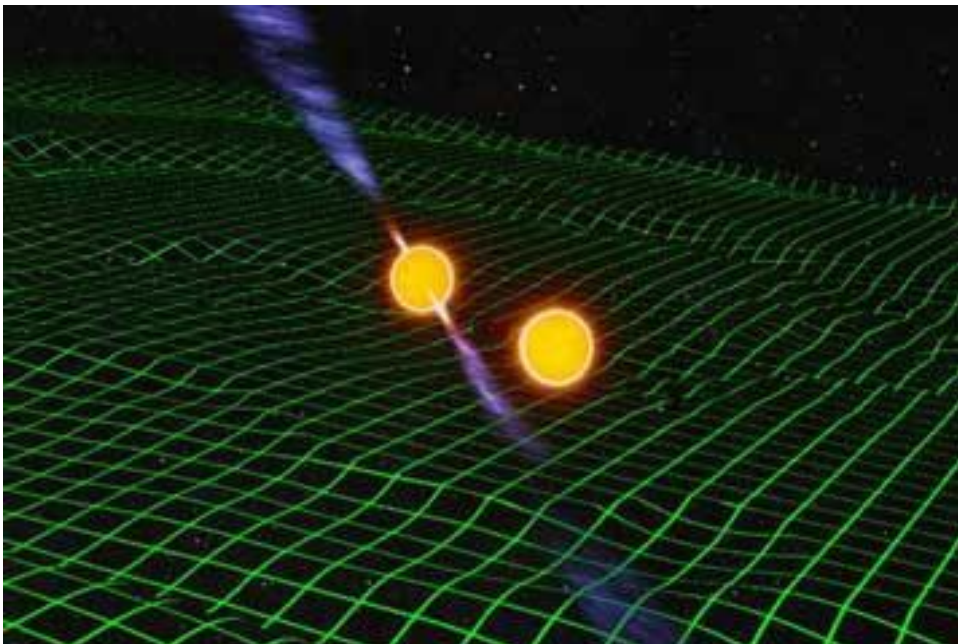


ΛΕΩΝΙΔΑΣ ΚΑΣΤΑΝΑΣ

ΦΥΣΙΚΗ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο

Κρούσεις



ερωτήσεις ασκήσεις προβλήματα

2021-22

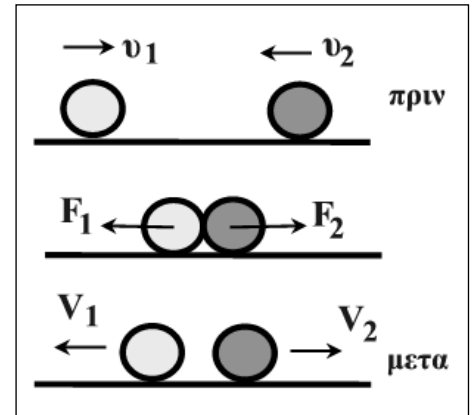


1. Οι κρούσεις 2021-22

Συνοπτική θεωρία των κρούσεων

• **Κρούση:** Φαινόμενο αλληλεπίδρασης δύο σωμάτων που διαρκεί πολύ μικρό χρονικό διάστημα και οι δυνάμεις που εμφανίζονται μεταξύ των σωμάτων είναι σχετικά πολύ μεγάλες. Στη μηχανική η αλληλεπίδραση αυτή συνεπάγεται και επαφή. Στο μικρόκοσμο η επαφή δεν είναι υποχρεωτική και η κρούση λέγεται **σκέδαση**.

► **Η διατήρηση ορμής στην κρούση:** Σε κάθε κρούση θεωρούμε ότι η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στα σώματα είναι μηδέν, ή αμελητέα σε σχέση με τις εσωτερικές δυνάμεις και συνεπώς το σύστημα θεωρείται απομονωμένο. Άρα η ορμή του διατηρείται σταθερή. Δηλαδή, σε κάθε κρούση η ορμή του συστήματος μόλις πριν την κρούση ισούται με την ορμή του συστήματος αμέσως μετά.



Απόδειξη: Από το 2^ο νόμο για σύστημα σωμάτων γνωρίζουμε ότι μόνο οι εξωτερικές δυνάμεις μπορούν να μεταβάλλουν την ορμή ενός συστήματος σωμάτων, δηλαδή

$$\Sigma \vec{F}_{\text{εξ}} = \frac{\Delta \vec{p}_{\sigma}}{\Delta t}$$

$$\text{Αν } \Sigma \vec{F}_{\text{εξ}} = 0 \rightarrow \Delta \vec{p}_{\sigma} = 0 \rightarrow \vec{p}_{\text{μετα},\sigma} - \vec{p}_{\text{πριν},\sigma} \rightarrow \boxed{\vec{p}_{\text{πριν},\sigma} = \vec{p}_{\text{μετα},\sigma}}$$

Δηλαδή με άλλα λόγια

$$\boxed{\Delta \vec{p}_{\sigma} = 0 \rightarrow \Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 = 0 \rightarrow \Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2}$$

- Σε κάθε κρούση η ορμή της κάθε σφαίρας μεταβάλλεται, αλλά του συστήματος μένει σταθερή.
- Οι μεταβολές ορμής των σωμάτων που συμμετέχουν σε μια κρούση πρέπει να είναι πάντοτε αντίθετες.
- Η ΑΔΟ ισχύει σε όλα τα είδη των κρούσεων, αρκεί τα σώματα να είναι ελεύθερα από εξωτερικές δυνάμεις δηλαδή το σύστημα να είναι απομονωμένο. Οι εσωτερικές δυνάμεις εμφανίζονται πάντοτε ως ζεύγη δράσης-αντίδρασης και αλληλοεξουδετερώνονται για το σύστημα.

► **Η διατήρηση της ενέργειας στην κρούση:** Σε κάθε κρούση, όπως και σε κάθε φυσικό φαινόμενο, η ποσότητα της ενέργειας του συστήματος διατηρείται σταθερή. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο και για την κινητική ενέργεια του συστήματος.

- **Στις ελαστικές κρούσεις** οι παραμορφώσεις των σωμάτων είναι παροδικές και η κινητική ενέργεια του συστήματος διατηρείται σταθερή πριν και μετά την κρούση.

$$\boxed{K_{\text{προ}} = K_{\text{μετα}} \rightarrow \Delta K_{\text{συσ}} = 0 \rightarrow \Delta K_1 + \Delta K_2 = 0 \rightarrow \Delta K_1 = -\Delta K_2}$$

Προσοχή: Κατά τη διάρκεια της ελαστικής κρούσης η κινητική ενέργεια του συστήματος μειώνεται διότι ένα μέρος μετατρέπεται σε δυναμική ενέργεια ελαστικότητας λόγω παροδικής παραμόρφωσης των σωμάτων. Όταν όμως τα σχήματα των σωμάτων αποκατασταθούν και αποχωριστούν η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι ίση με την αρχική.

Στις **ανελαστικές** κρούσεις οι παραμορφώσεις είναι μόνιμες και μέρος της κινητικής ενέργειας του συστήματος μετατρέπεται σε θερμότητα. Άρα $\Delta K_{ολ} < 0$.

Αν η παραμόρφωση είναι μέγιστη τα σώματα μένουν ενωμένα (συσσωμάτωμα) μετά την κρούση και η κρούση λέγεται **πλαστική**.

Για τις εσωτερικές και εξωτερικές δυνάμεις

Οι εσωτερικές δυνάμεις δεν μπορούν να μεταβάλλουν την ορμή του συστήματος διότι λειτουργούν ως δράση αντίδραση. Μπορούν όμως να μεταβάλλουν την κινητική ενέργεια του συστήματος. Αυτό συμβαίνει σε μια έκρηξη όπου λόγω εσωτερικών δυνάμεων μέρος της χημικής ενέργειας μετατρέπεται σε κινητική των θραυσμάτων. Επίσης στις ανελαστικές κρούσεις το συνολικό έργο των εσωτερικών δυνάμεων είναι αρνητικό και γι αυτό η κινητική ενέργεια του συστήματος μειώνεται. Στις ελαστικές το συνολικό έργο των εσωτερικών είναι μηδέν και γι αυτό η κινητική ενέργεια του συστήματος διατηρείται σταθερή.

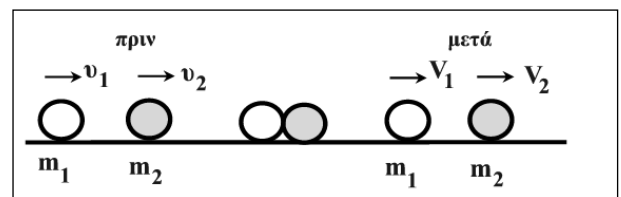
Οι εξωτερικές δυνάμεις μπορούν να μεταβάλλουν και την ορμή και την κινητική ενέργεια του συστήματος. Στα μονωμένα συστήματα επειδή η συνισταμένη τους είναι μηδέν η συνολική ορμή διατηρείται σταθερή. Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του μονωμένου συστήματος οφείλεται στις εσωτερικές δυνάμεις.

•Είδη κρούσεων:

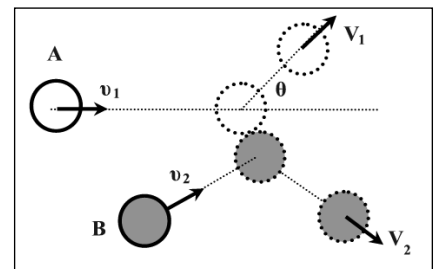
1. Κεντρική ή μετωπική κρούση:

Τα διανύσματα των ταχυτήτων των κέντρων μάζας των σωμάτων βρίσκονται στην ίδια ευθεία **πριν** την κρούση.

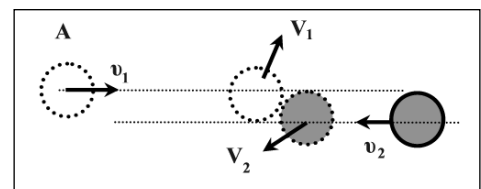
Αν τα σώματα είναι **σφαίρες** τότε τα διανύσματα των ταχυτήτων των κέντρων μάζας των σωμάτων βρίσκονται στην ίδια ευθεία **πριν και μετά** την κρούση. Μπορούν να είναι ελαστικές ή ανελαστικές



2. Πλάγια κρούση: Τα διανύσματα των ταχυτήτων των κέντρων μάζας των σωμάτων πριν και μετά την κρούση έχουν τυχαίες κατευθύνσεις. Η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή. Μπορούν να είναι ελαστικές ή ανελαστικές



3. Έκκεντρη κρούση: Τα διανύσματα των ταχυτήτων των κέντρων μάζας των σωμάτων που συγκρούονται, πριν την κρούση είναι παράλληλα αλλά όχι συγγραμικά. Η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή.

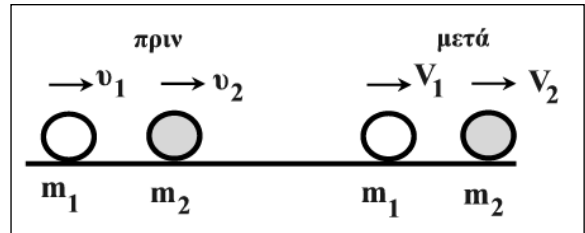


Μελέτη κεντρικών κρούσεων σφαιρών

► **Ελαστική κεντρική κρούση.** Τα σώματα είναι σφαίρες κινούνται στην ίδια ευθεία πριν και μετά την κρούση και διατηρούνται η ορμή και η κινητική ενέργεια του συστήματος.

$$\vec{p}_{\sigma, \text{προ}} = \vec{p}_{\sigma, \text{μετα}} \quad (1)$$

$$K_{\sigma, \text{προ}} = K_{\sigma, \text{μετα}} \quad (2)$$



$$(1): \quad m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2 \quad V_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (1)$$

$$(2): \quad \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 V_1^2 + \frac{1}{2}m_2 V_2^2 \quad V_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2} \quad (2)$$

$$\text{Για τις αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων ισχύει:} \quad v_1 + V_1 = v_2 + V_2 \quad \text{ή} \quad v_1 - v_2 = -(V_1 - V_2) \quad (3)$$

Δηλαδή η διαφορά των ταχυτήτων πριν την κρούση είναι αντίθετη από τη διαφορά των ταχυτήτων μετά την κρούση.

Απόδειξη:

$$\text{ΑΔΟ:} \quad m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2 \rightarrow m_1(v_1 - V_1) = m_2(V_2 - v_2) \quad (1)$$

$$\text{ΑΔΚΕ:} \quad \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 V_1^2 + \frac{1}{2}m_2 V_2^2 \rightarrow m_1(v_1 - V_1)(v_1 + V_1) = m_2(V_2 - v_2)(V_2 + v_2) \quad (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \rightarrow v_1 + V_1 = V_2 + v_2 \rightarrow V_2 = v_1 + V_1 - v_2 \quad (3)$$

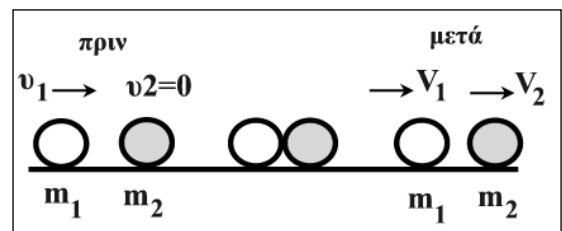
$$\text{Από (1)(3)} \rightarrow V_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (4) \quad \text{και από (1)\&(4)} \rightarrow V_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2} \quad (5)$$

• Αν $m_1 = m_2$, τότε τα σώματα **ανταλλάσσουν ταχύτητες**: $V_1 = v_2$ και $V_2 = v_1$

Ειδικές περιπτώσεις:

Αν $v_2 = 0$, δηλαδή το m_2 είναι ακίνητο πριν την κρούση, τότε μετά την κρούση από τις (1) και (2) έχουμε:

$$V_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2} \quad V_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$



i. Αν $m_1 = m_2$, τότε τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες: $V_1 = 0$ και $V_2 = v_1$

ii. Αν $m_1 \gg m_2$ τότε $V_1 = v_1$ και $V_2 = 2v_1$, δηλαδή το βαρύτερο συνεχίζει με την ίδια ταχύτητα και το πολύ ελαφρύτερο αποκτά τη διπλάσια ταχύτητα του m_1 .

iii. Αν $m_1 \ll m_2$ τότε $V_1 = -v_1$ και $V_2 = 0$, δηλαδή το ελαφρύτερο γυρίζει πίσω με την ίδια κατά μέτρο ταχύτητα και το βαρύτερο μένει ακίνητο.

Παράδειγμα 1: Σφαίρα μάζας m_1 συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με ταχύτητα v_1 με ακίνητη σφαίρα μάζας m_2 . Μετά την κρούση η σφαίρα m_1 κινείται αντίθετα ως προς την αρχική της κατεύθυνση με το $1/2$ της αρχικής τιμής της ταχύτητάς της. Θα υπολογίσουμε το λόγο των μαζών των δύο σφαιρών.

Απάντηση

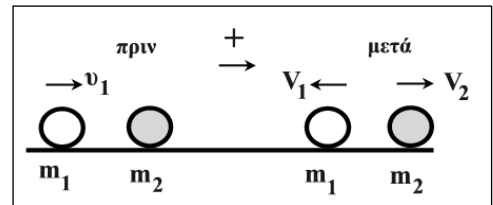
Από τη ΑΔΟ και την ΑΔΚΕ για την ελαστική κρούση, προκύπτουν οι σχέσεις:

$$p_{\text{προ}} = p_{\text{μετα}} \rightarrow m_1 v_1 = m_1 V_1 + m_2 V_2$$

$$K_{\text{προ}} = K_{\text{μετα}} \rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2$$

Από τη λύση του συστήματος έχουμε:

$$V_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad (1) \quad \text{και} \quad V_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (2)$$



Αλλά αφού η m_1 γυρίζει πίσω, η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας είναι $V_1 = -v_1/3$ (3)

$$\text{Από (1) και (3)} \rightarrow -\frac{v_1}{3} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \rightarrow 3m_1 - 3m_2 = -m_1 - m_2 \rightarrow 4m_1 = 2m_2 \rightarrow \frac{m_2}{m_1} = 2$$

Παράδειγμα 2: Σφαίρα Α μάζας m_1 συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα Β, μάζας m_2 . Θα υπολογίσουμε το ποσοστό της μηχανικής ενέργειας που μεταφέρεται από την Α στο Β κατά την κρούση

Σε κάθε ελαστική κρούση ισχύουν ταυτόχρονα η αρχή διατήρησης της ορμής (ΑΔΟ) και η αρχή διατήρησης της κινητικής ενέργειας (ΑΔΚΕ) για το σύστημα των δύο σωμάτων που συγκρούονται. Από αυτές τις σχέσεις προκύπτουν οι ταχύτητες μετά την κρούση που είναι:

$$V_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{και} \quad V_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

Στην ελαστική κρούση το μέρος της κινητικής ενέργειας της σφαίρας Α που μεταβιβάζεται στη σφαίρα, Β είναι ίσο με την απόλυτη τιμή της μεταβολής της κινητικής ενέργειας της σφαίρας Α. Το ποσοστό θα είναι:

$$\pi = \frac{|\Delta K_1|}{K_{1\text{προ}}} = \frac{|K_{1\text{μετα}} - K_{1\text{προ}}|}{K_{1\text{προ}}} = \frac{|\frac{1}{2} m_1 V_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2|}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} = \left| \frac{V_1^2}{v_1^2} - 1 \right| = \left| \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 - 1 \right| = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \pi = \frac{|\Delta K_1|}{K_{1\text{προ}}} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \quad \text{ή} \quad \pi\% = \frac{|\Delta K_1|}{K_{1\text{προ}}} 100\% = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} 100\%$$

Αν $m_1 = m_2$ τότε: $\frac{|\Delta K_1|}{K_{1\text{προ}}} = 1$ ή αλλιώς 100%, δηλαδή μέγιστο. Άρα σωστό είναι το (α).

Η σφαίρα m_1 ακινητοποιείται, αφού χάνει όλη της την κινητική ενέργεια.

Η σχέση κινητικής ενέργειας και ορμής

$$p=mv \rightarrow v = \frac{p}{m}$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \rightarrow K = \frac{1}{2}m\left(\frac{p}{m}\right)^2 \rightarrow K = \frac{p^2}{2m}$$

Αν δύο σώματα έχουν ίδια ορμή τότε το βαρύτερο θα έχει μικρότερη κινητική ενέργεια

• **Ανελαστική κεντρική κρούση:** Η ολική ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή αλλά η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος μειώνεται. Μέρος της αρχικής κινητικής ενέργειας γίνεται θερμότητα λόγω μόνιμης παραμόρφωσης των σωμάτων.

$$\begin{aligned} \vec{p}_{\sigma, \text{προ}} &= \vec{p}_{\sigma, \text{μετ}} \\ K_{\sigma, \text{προ}} &> K_{\sigma, \text{μετ}} \end{aligned}$$

Το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος των συγκρουόμενων σωμάτων, που μετατράπηκε σε θερμότητα, σε μια ανελαστική κρούση.

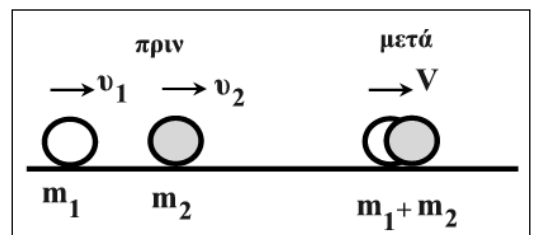
$$\alpha \% = \frac{|K_{\sigma, \text{μετ}} - K_{\sigma, \text{προ}}|}{K_{\sigma, \text{προ}}} 100\%$$

Η θερμότητα που εκλύεται κατά την ανελαστική κρούση είναι:

$$Q = |K_{\sigma, \text{μετ}} - K_{\sigma, \text{προ}}|$$

• **Πλαστική κεντρική κρούση:** Ειδική περίπτωση ανελαστικής κρούσης είναι η πλαστική κατά την οποία τα δύο σώματα μετά την κρούση φεύγουν ενωμένα με κοινή ταχύτητα V δημιουργούν συσσωμάτωμα.

$$p_{\sigma, \text{προ}} = p_{\sigma, \text{μετ}} \rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V$$



Η θερμότητα που εκλύεται κατά την πλαστική κρούση είναι:

$$Q = |K_{\sigma, \text{μετ}} - K_{\sigma, \text{προ}}|$$

Πλάγιες και έκκεντρες κρούσεις

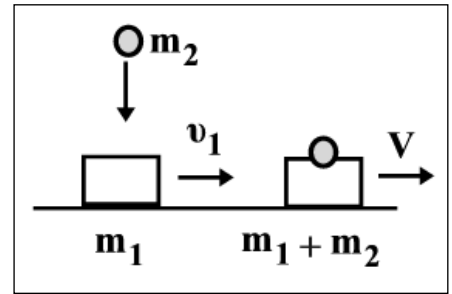
• **Πλάγια πλαστική κρούση:** Οι ορμές των σωμάτων πριν και μετά την κρούση δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, ενώ δημιουργείται και συσσωμάτωμα. Στην περίπτωση πλάγιας πλαστικής κρούσης αναλύουμε τις ορμές σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων ($Ox-Oy$). Είναι πιθανό η ορμή του συστήματος να διατηρείται μόνο στον έναν από τους δύο άξονες γιατί εκεί το σύστημα είναι απομονωμένο. Τότε γράφουμε την ΑΔΟ μόνο στον ένα από τους δύο άξονες.

Βασικά παραδείγματα:

1. Το σώμα μάζας m_1 κινείται οριζόντια με ταχύτητα $\vec{v}_1$ και άλλο σώμα μάζας m_2 πέφτει πάνω του, ενώ κινείται κατακόρυφα προς τα κάτω. Το συσσωμάτωμα αποκτάει κοινή ταχύτητα, $\vec{V}$.

Η ορμή διατηρείται μόνο στον οριζόντιο άξονα:

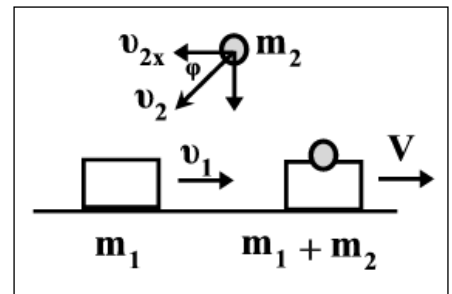
$$p_{\text{προ},x} = p_{\text{μετ},x} \rightarrow m_1 v_1 + 0 = (m_1 + m_2) V$$



2. Σώμα μάζας m_1 κινείται με ταχύτητα $\vec{v}_1$ σε οριζόντιο λείο επίπεδο και βλήμα μάζας m_2 έρχεται με ταχύτητα $\vec{v}_2$ από την αντίθετη κατεύθυνση αλλά υπό γωνία ϕ ως προς τον οριζόντιο άξονα. Μετά την πλαστική κρούση το συσσωμάτωμα αποκτάει κοινή ταχύτητα $\vec{V}$.

Η ορμή διατηρείται μόνο στον οριζόντιο άξονα:

$$p_{\text{πριν},x} = p_{\text{μετ},x} \rightarrow m_1 v_1 - m_2 v_2 \sin \phi = (m_1 + m_2) V$$



3. Δύο σώματα με ίσες μάζες $m_1 = m_2 = m = 1\text{kg}$ και ίσες κατά μέτρο ταχύτητες $v_1 = v_2 = v = 10\text{m/s}$ συγκρούονται πλαστικά ενώ κινούνται σε κάθετες τροχιές. Δημιουργείται συσσωμάτωμα. Θα υπολογίσουμε (α) την ταχύτητα του συσσωματώματος και (β) τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος.

(α) Στην πλάγια πλαστική κρούση μπορούμε να δουλέψουμε με άξονες. Αναλύουμε τις ορμές των σωμάτων στους άξονες x και y πριν και μετά την κρούση. Μετά γράφουμε την ΑΔΟ σε κάθε άξονα χωριστά εφόσον βέβαια ισχύει σε κάθε άξονα. Εδώ ισχύει. Αλλά οι αρχικές ορμές p_1 και p_2 είναι στους άξονες x και y οπότε αναλύουμε μόνο την ορμή p μετά την κρούση σε p_x στον άξονα x και σε p_y στον άξονα y .

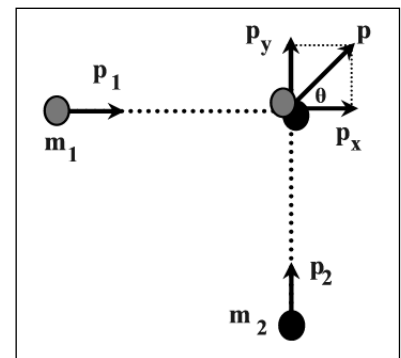
Οι ορμές: $p_1 = m_1 v_1$ $p_2 = m v_2$ και $p = (m_1 + m_2) V$

$$p_{\text{προ},x} = p_{\text{μετ},x} \rightarrow p_1 = p_x \rightarrow m_1 v_x = (m_1 + m_2) V_x \rightarrow V_x = 5\text{m/s}$$

$$p_{\text{προ},y} = p_{\text{μετ},y} \rightarrow p_2 = p_y \rightarrow m_2 v_y = (m_1 + m_2) V_y \rightarrow V_y = 5\text{m/s}$$

$$\text{Άρα } V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}\text{m/s}$$

$$\text{Για την κατεύθυνση: } \epsilon\phi\theta = \frac{V_y}{V_x} = 1 \rightarrow \theta = 45^\circ$$



(β) Η κινητική ενέργεια του συστήματος πριν την κρούση: $K_{\text{προ}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = 100\text{J}$

Μετά την κρούση: $K_{\text{μετ}} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 = 50\text{J}$

$$\text{Άρα } \Delta K = K_{\text{μετ}} - K_{\text{προ}} = 50\text{J} - 100\text{J} = -50\text{J}$$

4. Οι δύο σφαίρες με μάζες $m_1=m_2=1\text{kg}$ κινούνται με ταχύτητες $v_1=v_2=10\text{m/s}$ με τις τροχιές που φαίνονται στο σχήμα και συγκρούονται πλαστικά. Θα υπολογιστεί η ταχύτητα του συσσωματώματος. Δίνονται $\eta\mu\phi=0,6$ και $\sigma\upsilon\nu\phi=0,8$.

Γράφουμε ΑΔΟ σε κάθε άξονα χωριστά

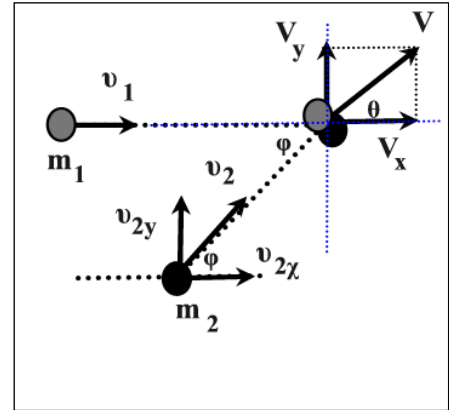
$$\text{ΑΔΟ } xx' \quad m_1v_1 + m_2v_{2x} = (m_1+m_2) \cdot V_x \rightarrow V_x=9\text{m/s}$$

$$\text{Όπου } v_{2x} = v_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\phi$$

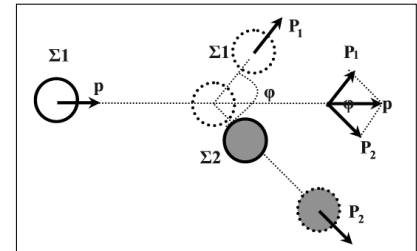
$$\text{ΑΔΟ } yy' \rightarrow m v_{2y} = (m_1+m_2) V_y \rightarrow m v_2 \eta\mu\phi = (m_1+m_2) V_y \rightarrow V_y=3\text{m/s.}$$

$$\text{Όπου } v_{2y} = v_2 \cdot \eta\mu\phi$$

$$\text{Άρα: } V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{90}\text{m/s} \quad \epsilon\phi\theta = \frac{V_y}{V_x} = 1/3$$



Πλάγια ελαστική κρούση: Σφαίρα Σ_1 , μάζας m_1 κινείται με ταχύτητα u και συγκρούεται έκκεντρα και ελαστικά με άλλη σφαίρα Σ_2 , ίσης μάζας $m_2=m_1=m$, που αρχικά είναι ακίνητη. Μετά την κρούση οι δύο σφαίρες κινούνται με ταχύτητες V_1, V_2 . Θα αποδείξουμε ότι οι ταχύτητες μετά την κρούση σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία $\phi=90^\circ$.



Απάντηση

$$\text{Από την ΑΔΚΕ} \rightarrow \frac{1}{2}m_1u^2 = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 \rightarrow u^2 = V_1^2 + V_2^2 \quad (1)$$

Από την ΑΔΟ ισχύει η διανυσματική σχέση $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$.

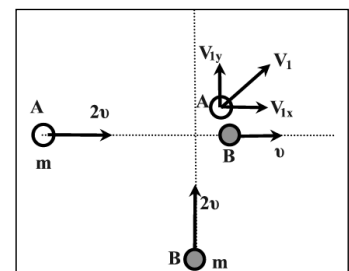
Από αυτήν ισχύει η σχέση των μέτρων έχουμε:

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\sigma\upsilon\nu\phi \rightarrow u^2 = V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\sigma\upsilon\nu\phi \rightarrow 2V_1V_2\sigma\upsilon\nu\phi = 0 \rightarrow \phi = 90^\circ$$

Πλάγια ανελαστική κρούση

Δύο σώματα Α και Β κινούνται σε κάθετες διευθύνσεις με μάζες $m_1=m$, $m_2=m$ και ταχύτητες μέτρων $u_1=u_2=2v$. Μετά την κρούση το σώμα Β κινείται στον άξονα των xx' με ταχύτητα μέτρον, $V_2=v$.

Θα υπολογίσουμε (α) το μέτρο της ταχύτητας του Α μετά την κρούση και (β) την απώλεια ενέργειας κατά την κρούση για να δούμε αν είναι ανελαστική ή ελαστική.



(α) Από την ΑΔΟ στον άξονα $xx' \rightarrow$

$$p_{\text{προ},x} = p_{\text{μετα},x} \rightarrow p_{\text{προ},x,A} + p_{\text{προ},x,B} = p_{\text{μετα},x,A} + p_{\text{μετα},x,B} \rightarrow m \cdot 2v + 0 = mv + mV_{1x} \rightarrow V_{1x} = v$$

Από την ΑΔΟ στον άξονα yy' :

$$p_{\text{προ},y} = p_{\text{μετα},y} \rightarrow p_{\text{προ},y,A} + p_{\text{προ},y,B} = p_{\text{μετα},y,A} + p_{\text{μετα},y,B} \rightarrow 0 + m \cdot 2v = mV_{1y} + 0 \rightarrow V_{1y} = 2v$$

$$V_1 = \sqrt{V_{1x}^2 + V_{1y}^2} = \sqrt{v^2 + 4v^2} \rightarrow V_1 = v\sqrt{5}.$$

(β) Για τον έλεγχο της ελαστικότητας ή μη της κρούσης συγκρίνω τις κινητικές ενέργειες πριν και μετά την κρούση

$$K_{\pi\rho} = K_{1,\pi\rho} + K_{2,\pi\rho} = \frac{1}{2}m(2v)^2 + \frac{1}{2}m(2v)^2 = 4mv^2$$

$$K_{\mu\epsilon\tau\alpha} = K_{1,\pi\rho} + K_{2,\pi\rho} = \frac{1}{2}m(\sqrt{5}v)^2 + \frac{1}{2}m(v)^2 = 3mv^2$$

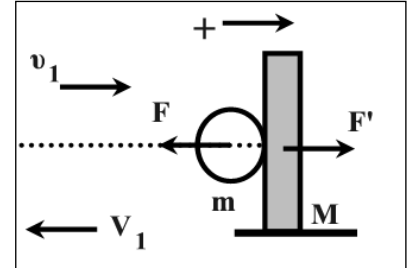
Άρα $K_{\mu\epsilon\tau\alpha} < K_{\pi\rho}$. Συνεπώς η κρούση είναι ανελαστική

• Ελαστική μετωπική κρούση με τοίχο

Στην περίπτωση της ελαστικής κρούσης θεωρούμε ότι συγκρούεται η σφαίρα μάζας m με τη Γη μάζας, M με $M \gg m$. Από τη διατήρηση της ορμής και της κινητικής ενέργειας του μονωμένου συστήματος σφαίρας-Γης, με δεδομένο ότι $m \approx 0$, έχουμε

$$\bullet \quad \text{Τότε: } V_1 = \frac{m-M}{m+M}v_1 \rightarrow V_1 = -\frac{M}{M}v_1 \rightarrow V_1 = -v_1$$

$$\text{Η ταχύτητα της Γης μετά την κρούση είναι } V_2 = \frac{2m}{m+M}v_1 = 0 \rightarrow V_2 = 0$$



• Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας είναι: $\Delta p = mV_1 - mv_1 = -mv_1 - mv_1 = -2mv_1$.

• Άρα η δύναμη που δέχεται η μπάλα από τον τοίχο είναι $F = \frac{\Delta p_1}{\Delta t} = -\frac{2mv_1}{\Delta t}$

Η αντίδραση της F , δηλαδή η $F' = -F = \frac{2mv_1}{\Delta t}$ ασκείται από τη σφαίρα στον τοίχο.

Πλάγια ελαστική κρούση με το λείο πάτωμα

Μια σφαίρα μάζας m , με ορμή $p_1 = p = mv_1$ συγκρούεται πλάγια και ελαστικά με χαλύβδινη λεία οριζόντια επιφάνεια υπό γωνία $\varphi = 45^\circ$ και ανακλάται.

(α): Θα δείξουμε ότι το μέτρο της ταχύτητας πρόσπτωσης είναι ίσο με το μέτρο της ταχύτητας ανάκλασης, η γωνία πρόσπτωσης ίση με τη γωνία ανάκλασης.

(β) Αν ο χρόνος κρούσης είναι Δt θα υπολογίσουμε και τη δύναμη που ασκεί το πάτωμα στη σφαίρα

(α) Η σφαίρα προσκρούει στο πάτωμα με ταχύτητα v_1 υπό γωνία φ και ανακλάται με ταχύτητα v_2 υπό τη γωνία, θ .

$$\text{Στον άξονα } x, \text{ η } \Sigma F_{\epsilon\chi\varsigma} = 0 \rightarrow p_{1x} = p_{2x} \rightarrow mv_{1x} = mv_{2x} \rightarrow v_{1x} = v_{2x} \quad (1)$$

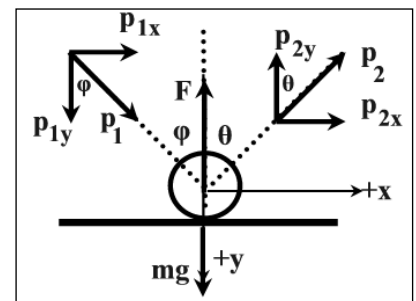
Στον άξονα y θεωρούμε ότι συγκρούονται ελαστικά η σφαίρα μάζας, m με την ακίνητη Γη μάζας, $M \gg m$. Η σφαίρα ανακλάται στον άξονα y με ταχύτητα:

$$v_{2y} = \frac{m-M}{m+M}v_{1y} \rightarrow v_{2y} = -v_{1y} \quad (2)$$

$$v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2} \quad \text{και} \quad v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2}$$

$$\text{Από (1)(2)} \rightarrow v_1 = v_2 = v \quad (3)$$

$$\text{από την } p_{1x} = p_{2x} \rightarrow mv_1 \eta \mu \varphi = mv_2 \eta \mu \theta \xrightarrow{(3)} \eta \mu \varphi = \eta \mu \theta \rightarrow \varphi = \theta = 45^\circ$$



Η μεταβολή ορμής ισούται με τη μεταβολή ορμής μόνο στον άξονα των y άρα:

$$\Delta p = \Delta p_y = p_{2y} - p_{1y} = mv_{2y} - mv_{1y} = -2mv_{1y} = -2mv_1 \sin \theta = -mv_1 \sqrt{2}$$

$$(\beta): \text{ Στον άξονα } y \text{ ισχύει: } \Sigma F_y = \frac{\Delta p_y}{\Delta t} \rightarrow F + mg = -\frac{mv_1 \sqrt{2}}{\Delta t} \rightarrow F = -mg - \frac{p \sqrt{2}}{\Delta t}$$

1. Οι κρούσεις

Ερωτήσεις θεωρίας

Θ1.1 Να συμπληρωθούν τα κενά στις προτάσεις που ακολουθούν:

- α. Κρούση ονομάζουμε κάθε φαινόμενο κατά το οποίο τα συγκρουόμενα σώματα αλληλεπιδρούν με σχετικά δυνάμεις, για χρονικό διάστημα.
- β.ονομάζεται η κρούση κατά την οποία τα διανύσματα των ταχυτήτων των κέντρων μάζας των σωμάτων που συγκρούονται είναι πάνω στην ίδια ευθεία πριν την κρούση.
- γ. Έκκεντρη ονομάζεται η κρούση κατά την οποία οι ταχύτητες των σωμάτων που συγκρούονται είναι αλλά όχι συγγραμμικές.
- δ. Αν οι ταχύτητες των σωμάτων που συγκρούονται βρίσκονται σε τυχαία διεύθυνση η κρούση είναι
- ε. Κατά τηνκρούση δύο σωμάτων τα σώματα μετά την κρούση μένουν ενωμένα.

Θ1.2 Να συμπληρώσετε τα κενά στις προτάσεις που ακολουθούν:

- α. Κατά τη διάρκεια μιας κρούσης, η ορμή του συστήματος
- β. Στην ελαστική κρούση εκτός από την ορμή, διατηρείται και ηενέργεια του συστήματος των σωμάτων που συγκρούονται.
- γ. Αν μέρος της αρχικής των σωμάτων που συγκρούονται μετατρέπεται σε θερμότητα η κρούση λέγεται
- δ. Κατά τη μετωπική ελαστική κρούση δυο σωμάτων, μάζας γίνεται ανταλλαγή ταχυτήτων.
- ε. Σφαίρα συγκρούεται κάθετα με οριζόντιο δάπεδο και η κρούση θεωρείται ελαστική. Η σφαίρα ανακλάται με ταχύτητα μέτρου.

Θ1.3 Να απαντήσετε στις ερωτήσεις που ακολουθούν:

- α. Ποιο φαινόμενο ονομάζεται κρούση ή σκέδαση;
- β. Ποια κρούση ονομάζεται κεντρική ή μετωπική;
- γ. Ποια κρούση ονομάζεται έκκεντρη;
- δ. Ποια κρούση ονομάζεται πλάγια;

Θ1.4 Ποιες είναι οι διαφορές μεταξύ μιας ελαστικής και μιας ανελαστικής κρούσης.

Θ1.5 Δύο σφαίρες με μάζες m_1 , m_2 κινούνται στην ίδια ευθεία με ταχύτητες v_1 , v_2 με $v_1 > v_2$ αντιστοίχως, προς την ίδια κατεύθυνση και συγκρούονται μετωπικά και ελαστικά. Να αποδείχθούν οι σχέσεις που δίνουν τις ταχύτητες μετά την κρούση.

Θ1.6 Σώμα μάζας m_1 ταχύτητας v_1 συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα μάζας m_2 . Να υπολογιστούν οι ταχύτητες μετά την κρούση.

Θ1.7 Ποιες είναι οι προϋποθέσεις ώστε μετά από μια κρούση δύο σωμάτων αυτά να ανταλλάσσουν ταχύτητες.

Θ1.8 I. Σφαίρα συγκρούεται ελαστικά μετωπικά με ακίνητο τοίχο. Δείξτε ότι ανακλάται με την αντίθετη ταχύτητα.

II. Σφαίρα συγκρούεται ελαστικά και πλάγια με ακίνητο τοίχο. Δείξτε ότι ανακλάται με ταχύτητα ίσου μέτρου και η γωνία πρόσπτωσης είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης.

ΘΕΜΑΤΑ Α

A1.1 Ποιες από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι σωστές;

Κρούση στη μηχανική είναι ένα φαινόμενο κατά το οποίο τα σώματα

- α. έρχονται οπωσδήποτε σε επαφή.
- β. αλληλεπιδρούν με σχετικά μεγάλες για πολύ μικρό χρονικό διάστημα.
- γ. ανταλλάσσουν τις κινητικές τους ενέργειες και τις ορμές.
- δ. υφίστανται απότομες μεταβολές στην κινητική τους κατάσταση.
- ε. αλλάζουν οπωσδήποτε κατεύθυνση κίνησης μετά την κρούση.

A1.2 Ποιες από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι σωστές;

Σκέδαση ονομάζουμε

- α. το φαινόμενο της κρούσης στο μακρόκοσμο.
- β. το φαινόμενο της κρούσης στο μικρόκοσμο.
- γ. το φαινόμενο του μικρόκοσμου στο οποίο τα σώματα αλληλεπιδρούν με σχετικά μεγάλες δυνάμεις για πολύ μικρό χρονικό διάστημα.
- δ. το φαινόμενο της κρούσης στο οποίο τα σώματα έρχονται σε επαφή.

A1.3 Ένα σύστημα δύο σωμάτων που κάνουν μεταφορική κίνηση θεωρείται απομονωμένο όταν

- α. η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων είναι σταθερή.
- β. η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδέν.
- γ. η συνισταμένη των εσωτερικών δυνάμεων είναι μηδέν.
- δ. η ορμή του συστήματος είναι μηδέν.

A1.4 Σε μια κεντρική κρούση δύο σωμάτων

- α. Οι ταχύτητες των κέντρων μάζας των σωμάτων πριν από την κρούση είναι στην ίδια ευθεία.
- β. Οι ταχύτητες των κέντρων μάζας των σωμάτων πριν από την κρούση έχουν αντίθετες κατευθύνσεις.
- γ. Η κινητική ενέργεια των συστήματος διατηρείται σταθερή.
- δ. Οι ταχύτητες των κέντρων μάζας των σωμάτων πριν από την κρούση έχουν παράλληλες διευθύνσεις.

A1.5 Σε μια έκκεντρη κρούση δύο σωμάτων

- α. Οι ταχύτητες των κέντρων μάζας των σωμάτων πριν από την κρούση είναι στην ίδια ευθεία.
- β. Οι ταχύτητες των κέντρων μάζας των σωμάτων πριν από την κρούση έχουν αντίθετες κατευθύνσεις.
- γ. Η κινητική ενέργεια των συστήματος διατηρείται σταθερή.
- δ. Οι ταχύτητες των κέντρων μάζας των σωμάτων πριν από την κρούση έχουν παράλληλες διευθύνσεις.

A1.6 Μια κρούση λέγεται πλάγια όταν

- α. δεν ικανοποιεί την αρχή διατήρησης της ορμής.
- β. δεν ικανοποιεί την αρχή διατήρησης της ενέργειας.
- γ. οι ταχύτητες των κέντρων μάζας των σωμάτων πριν από την κρούση έχουν τυχαία διεύθυνση.
- δ. οι ταχύτητες των κέντρων μάζας των σωμάτων πριν από την κρούση είναι παράλληλες.

A1.7 Δύο σφαίρες Α και Β συγκρούονται πάνω στο τραπέζι του μπιλιάρδου. Διατηρείται σταθερή η ορμή

- α. της σφαίρας Α.
- β. της σφαίρας Β.

γ. του συστήματος των δύο σφαιρών.

δ. του συστήματος των δύο σφαιρών, μόνο αν η κρούση είναι ελαστική.

A1.8 Σε κάθε κρούση δύο σωμάτων, που αποτελούν μονωμένο σύστημα

α. διατηρείται η ορμή του κάθε σώματος.

β. ισχύει η αρχή διατήρησης της ενέργειας.

γ. ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής του συστήματος, μόνο αν διατηρείται ταυτόχρονα και η κινητική ενέργεια του συστήματος.

δ. διατηρείται η κινητική ενέργεια του συστήματος.

A1.9 Σε μια ελαστική κρούση δύο σωμάτων διατηρείται

α. μόνο η ορμή του συστήματος των σωμάτων.

β. η ορμή και η κινητική ενέργεια του κάθε σώματος.

γ. η ορμή και η κινητική ενέργεια του συστήματος των σωμάτων.

δ. η ορμή του συστήματος και η κινητική ενέργεια του κάθε σώματος.

A1.10 Σε μια ανελαστική κρούση:

α. μέρος της κινητικής ενέργειας των σωμάτων μετατρέπεται σε θερμότητα.

β. η κινητική ενέργεια του συστήματος διατηρείται.

γ. το μέτρο της ορμής του κάθε σώματος μειώνεται.

δ. η ορμή του συστήματος μειώνεται.

A1.11 Σε μια πλαστική κρούση δύο σωμάτων, που αποτελούν μονωμένο σύστημα

α. διατηρείται η κινητική ενέργεια του συστήματος.

β. τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες.

γ. τα σώματα μένουν ενωμένα και η κινητική ενέργεια του συστήματος μειώνεται.

δ. η κινητική ενέργεια του συστήματος μειώνεται αλλά τα σώματα μένουν χωριστά.

A1.12 Η ορμή ενός απομονωμένου συστήματος σωμάτων διατηρείται

α. μόνο στις ελαστικές κρούσεις.

β. μόνο στις κεντρικές κρούσεις.

γ. μόνο στις ανελαστικές κρούσεις.

δ. σε όλες τις κρούσεις.

A1.13 Η διατήρηση της κινητικής ενέργειας ενός απομονωμένου συστήματος σωμάτων ισχύει

α. σε κάθε κρούση.

β. μόνο στις μετωπικές και ελαστικές κρούσεις.

γ. στις πλαστικές και μετωπικές κρούσεις.

δ. μόνο στις ελαστικές κρούσεις.

A1.14 Δύο σφαίρες με μάζες m_1 , m_2 κινούνται στην ίδια ευθεία με ταχύτητες v_1 , v_2 με $v_1 > v_2$ αντιστοίχως, προς την ίδια κατεύθυνση και συγκρούονται μετωπικά και ελαστικά. Οι ταχύτητες μετά την κρούση είναι:

$$\alpha. \quad V_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}, \quad V_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}$$

$$\beta. \quad V_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}, \quad V_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

A1.15 Σώμα μάζας m_1 ταχύτητας v_1 συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα μάζας m_2 . Οι ταχύτητες μετά την κρούση είναι:

α. $V_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$, $V_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$

γ. $V_1 = 0$, $V_2 = v_1$

β. $V_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2} v_1$, $V_2 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_1$

δ. $V_1 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$, $V_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$

A1.16 Δύο σφαίρες με μάζες m_1 , m_2 κινούνται στην ίδια ευθεία με ταχύτητες v_1 , v_2 ($v_1 > v_2$) αντιστοίχως, προς την ίδια κατεύθυνση και συγκρούονται μετωπικά και ελαστικά. Μετά την κρούση ισχύει

α. $V_1 < v_1$ και $V_2 < v_2$

β. $V_1 = 0$ και $V_2 = v_1$

γ. $V_1 < v_1$ και $V_2 > v_2$

A1.17 Σώμα μάζας m_1 ταχύτητας v_1 συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα ίσης μάζας $m_2 = m_1$. Οι ταχύτητες μετά την κρούση είναι:

α. $V_1 = -v_1$, $V_2 = v_1$,

β. $V_1 = 0$, $V_2 = v_1$

γ. $V_1 = \frac{1}{2} v_1$, $V_2 = v_1$

A1.18 Αν ένα σώμα συγκρουστεί μετωπικά και ελαστικά με άλλο ακίνητο σώμα ίσης μάζας τότε η ταχύτητά του θα

α. διπλασιαστεί.

γ. μείνει σταθερή.

β. μηδενιστεί.

δ. αντιστρέψει φορά.

A1.19 Αν ένα σώμα συγκρουστεί μετωπικά και ελαστικά με άλλο ακίνητο σώμα μικρότερης μάζας τότε η ταχύτητά του:

α. Θα έχει μικρότερο μέτρο και την ίδια φορά.

β. Θα μηδενιστεί.

γ. Θα έχει μικρότερο μέτρο αλλά την αντίθετη φορά.

δ. Θα μείνει σταθερή.

A1.20 Αν ένα σώμα συγκρουστεί μετωπικά και ελαστικά με άλλο ακίνητο σώμα μεγαλύτερης μάζας τότε η ταχύτητά του θα

α. έχει μικρότερο μέτρο και την ίδια φορά.

β. μηδενιστεί.

γ. έχει μικρότερο μέτρο αλλά την αντίθετη φορά.

δ. μείνει σταθερή.

A1.21 Δύο σφαίρες ίσης μάζας συγκρούονται. Για να ανταλλάξουν ταχύτητες πρέπει η κρούση τους να είναι

α. μετωπική ανελαστική.

β. ελαστική έκκεντρη.

γ. μετωπική και ανελαστική.

δ. μετωπική και ελαστική.

A1.22 Κατά την ελαστική και μετωπική κρούση δύο σωμάτων με ίσες μάζες, τα σώματα ανταλλάσσουν:

α. μόνο ταχύτητες.

β. μόνο ορμές.

γ. μόνο κινητικές ενέργειες.

δ. όλα τα προηγούμενα.

A1.23 Απόλυτα ελαστική κρούση μπορεί να θεωρηθεί η κρούση δύο

α. χαλύβδινων σφαιρών.

γ. πυρήνων ατόμων.

β. σφαιρών από σκληρό καουτσούκ.

δ. σφαιρών από πλαστελίνη.

A1.24 Σε μια ελαστική μετωπική κρούση δύο σωμάτων ισχύει

α. $\Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2$ και $\Delta K_1 = \Delta K_2$

β. $\Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2$ και $\Delta K_1 = -\Delta K_2$

γ. $\Delta \vec{p}_1 = \Delta \vec{p}_2$ και $\Delta K_1 = \Delta K_2$

δ. $\Delta \vec{p}_1 = \Delta \vec{p}_2$ και $\Delta K_1 = -\Delta K_2$

A1.25 Δύο σφαίρες συγκρούονται μετωπικά και ελαστικά. Πριν την κρούση έχουν ταχύτητες με αλγεβρικές τιμές u_1 , u_2 και μετά την κρούση V_1 και V_2 . Για τις αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων ισχύει

α. $u_1 + V_1 = u_2 + V_2$

β. $u_1 - V_1 = u_2 - V_2$

γ. $u_1 + V_2 = u_2 + V_1$

A1.26 Σε κάθε κρούση ισχύει

α. η αρχή διατήρησης της ενέργειας.

β. η αρχή διατήρησης της ορμής.

γ. η αρχή διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου.

δ. όλες οι παραπάνω αρχές.

A1.27 Σφαίρα Σ_1 συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα Σ_2 τετραπλάσιας μάζας. Μετά την κρούση

α. η σφαίρα Σ_1 παραμένει ακίνητη

β. η σφαίρα Σ_1 συνεχίζει να κινείται στην ίδια κατεύθυνση

γ. όλη η κινητική ενέργεια της σφαίρας Σ_1 μεταφέρθηκε στη σφαίρα Σ_2

δ. ισχύει, $\Delta \vec{p}_1 = -\Delta \vec{p}_2$ όπου $\Delta \vec{p}_1$ και $\Delta \vec{p}_2$ οι μεταβολές των ορμών των δύο σφαιρών.

A1.28 Δύο σφαίρες, με διαφορετικές μάζες, συγκρούονται κεντρικά και πλαστικά. Αν αμέσως μετά την κρούση η κινητική ενέργεια του συστήματος μηδενίζεται, τότε οι σφαίρες πριν την κρούση είχαν:

α. ίσες κινητικές ενέργειες.

β. ίσες ταχύτητες.

γ. αντίθετες ορμές.

δ. αντίθετες ταχύτητες.

! E1.29 Ποια από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι σωστή;

α. Ένα σύστημα σωμάτων μπορεί να έχει ορμή, αλλά όχι κινητική ενέργεια.

β. Ένα σώμα μπορεί να έχει κινητική ενέργεια, αλλά όχι ορμή.

γ. Ένα σύστημα σωμάτων μπορεί να έχει κινητική ενέργεια, αλλά όχι ορμή.

δ. Ένα σώμα μπορεί να έχει ορμή, αλλά όχι κινητική ενέργεια.

A1.30 Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις που αναφέρονται σε σύστημα σωμάτων που κάνουν μεταφορική κίνηση είναι σωστές;

α. Το σύστημα μπορεί να έχει κινητική ενέργεια, χωρίς να έχει ορμή.

β. Το σύστημα μπορεί να έχει ορμή χωρίς να έχει κινητική ενέργεια.

γ. Οι εσωτερικές δυνάμεις του συστήματος μπορούν να του μεταβάλλουν την ορμή αλλά όχι την κινητική ενέργεια.

δ. Οι εσωτερικές δυνάμεις του συστήματος μπορούν να του μεταβάλλουν την κινητική του ενέργεια αλλά όχι την ορμή.

ε. Οι εξωτερικές δυνάμεις μπορούν να του μεταβάλλουν την ορμή και την κινητική ενέργεια.

στ. Η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή μόνο αν η συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδέν .

ζ. Η κινητική ενέργεια του συστήματος διατηρείται αν συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων είναι μηδέν .

A1.31 Ποιες από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι σωστές ή λανθασμένες;

α. Στις κεντρικές κρούσεις δύο σφαιρών τα κέντρα μάζας των ταχυτήτων των σφαιρών βρίσκονται στην ίδια ευθεία πριν και μετά την κρούση

β. Σε ένα μονωμένο σύστημα δύο σφαιρών που συγκρούονται ελαστικά, η ορμή της κάθε σφαίρας διατηρείται σταθερή.

γ. Στις κεντρικές κρούσεις δύο σωμάτων τα κέντρα μάζας των ταχυτήτων των σωμάτων είναι στην ίδια ευθεία πριν και μετά την κρούση

- δ. Κατά την ελαστική μετωπική κρούση δύο σωμάτων η μεταβολή ορμής του ενός σώματος είναι αντίθετη της μεταβολής ορμής του άλλου.
- ε. Στην ανελαστική κρούση η κινητική ενέργεια του συστήματος των σωμάτων μειώνεται.
- στ. Όταν μια μικρή σφαίρα συγκρούεται πλάγια και ελαστικά με κατακόρυφο τοίχο, τότε η ορμή της σφαίρας παραμένει σταθερή.

A1.32 Ποιες από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι σωστές ή λανθασμένες;

- α. Σε κάθε κρούση ισχύει η αρχή διατήρησης της ενέργειας.
- β. Στην μετωπική ελαστική κρούση δύο σωμάτων παρατηρείται ανταλλαγή ταχυτήτων.
- γ. Στην πλαστική κρούση μέρος της αρχικής κινητικής ενέργειας των σωμάτων γίνεται θερμότητα.
- δ. Στην ελαστική κρούση σφαίρας με ακλόνητο τοίχο η ορμή της σφαίρας διατηρείται σταθερή.
- ε. Κατά την κρούση δύο σωμάτων η κινητική ενέργεια του συστήματος πάντα διατηρείται.
- στ. Στην κεντρική κρούση δύο σφαιρών τα κέντρα μάζας αυτών κινούνται στην ίδια ευθεία πριν και μετά την κρούση.

A1.33 Ποιες από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι σωστές ή λανθασμένες;

- α. Αν διπλασιαστεί η ορμή ενός σώματος τότε διπλασιάζεται και η κινητική του ενέργεια.
- β. Κατά την ελαστική κρούση σφαίρας και ακλόνητο τοίχο η κινητική ενέργεια της σφαίρας διατηρείται σταθερή.
- γ. Η κρούση δύο θετικά φορτισμένων σωματιδίων μπορεί να είναι απολύτως ελαστική.
- δ. Σε μια πλάγια ανελαστική κρούση διατηρείται η ορμή του συστήματος.

A1.34 Δύο σώματα κινούνται χωρίς τριβές με την ίδια ταχύτητα αλλά κατά αντίθετη φορά πάνω σε μια ευθεία και συγκρούονται μετωπικά και μετά την κρούση μένουν ενωμένα και ακίνητα. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;

- α. Έχουν μάζες ίσες.
- β. Η κινητική τους ενέργεια μετατράπηκε εξ ολοκλήρου σε θερμότητα.
- γ. Η ορμή του συστήματος είναι μηδέν πριν και μετά την κρούση.
- δ. Η κρούση των δύο σωμάτων είναι πλαστική.

A1.35 Βλήμα μάζας m_1 σφηνώνεται με ταχύτητα v σε κύβο μάζας m_2 που ήταν αρχικά ακίνητος πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Μετά την κρούση δημιουργείται συσσωμάτωμα. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λανθασμένες;

- α. Η δύναμη που ασκεί το βλήμα στον κύβο είναι μεγαλύτερη από εκείνη που δέχεται από αυτόν.
- β. Η κινητική ενέργεια της σφαίρας μηδενίζεται μετά την κρούση.
- γ. Η ορμή της σφαίρας διατηρείται σταθερή μετά την κρούση.
- δ. Μέρος της αρχικής ενέργειας του συστήματος των σωμάτων μετατράπηκε σε θερμότητα.

A1.36 Ποιες από τις επόμενες προτάσεις είναι σωστές ή λανθασμένες;

- α. Τα σώματα ανταλλάσσουν ταχύτητες σε κάθε μετωπική ελαστική κρούση σωμάτων με ίσες μάζες.
- β. Η κινητική ενέργεια ενός συστήματος σωμάτων διατηρείται σταθερή σε κάθε κρούση.
- γ. Η κινητική ενέργεια ενός συστήματος μετατρέπεται όλη σε θερμότητα σε μετωπική, πλαστική κρούση δύο σωμάτων με αντίθετες ορμές.
- δ. Μετά την κρούση το ένα από τα δύο σταματάει αν η κρούση είναι ελαστική μετωπική με ίσες μάζες και το άλλο σώμα ήταν αρχικά ακίνητο.
- ε. Στην κεντρική κρούση δύο σφαιρών τα κέντρα μάζας αυτών κινούνται στην ίδια ευθεία πριν αλλά όχι μετά την κρούση.

A1.37 Μια μπάλα του τένις μάζας m που κινείται οριζόντια με ταχύτητα $υ$ χτυπάει κάθετα την επιφάνεια της ρακέτας και ανακλάται κάθετα με ταχύτητα $4υ$. Το μέτρο μεταβολής της ορμής της μπάλας είναι

α. $\Delta p = 3mυ$

β. $\Delta p = 5mυ$

γ. $\Delta p = 2mυ$

δ. $\Delta p = 0$

A1.38 Μια σφαίρα που κινείται οριζόντια σε λείο οριζόντιο επίπεδο συγκρούεται με κατακόρυφο ακλόνητο τοίχο, κάθετα και ανακλάται κάθετα.

α. Η κινητική ενέργεια του συστήματος «σφαίρα – τοίχος» διατηρείται σταθερή.

β. Η ορμή της σφαίρας διατηρείται σταθερή.

γ. Η κινητική ενέργεια της σφαίρας διατηρείται σταθερή.

δ. Η ορμή της σφαίρας μεταβάλλεται.

A1.39 Μια σφαίρα μάζας m που κινείται οριζόντια σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $\vec{υ}$ συγκρούεται ελαστικά με κατακόρυφο ακλόνητο τοίχο, κάθετα και ανακλάται κάθετα:

α. Η ορμή της σφαίρας διατηρείται σταθερή.

β. Η σφαίρα ανακλάται με ταχύτητα ίσου μέτρου.

γ. Η κινητική ενέργεια του συστήματος σφαίρα – Γη διατηρείται σταθερή.

δ. Το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας μειώνεται.

ε. Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας έχει μέτρο $2mυ$.

στ. Κατά τη διάρκεια της επαφής της με τον τοίχο η σφαίρα δέχεται σταθερή δύναμη

Ποιες από τις προηγούμενες προτάσεις είναι σωστές;

A1.40 Όταν μια μικρή σφαίρα προσπίπτει πλάγια σε κατακόρυφο τοίχο και συγκρούεται με αυτόν ελαστικά, τότε

α. η κινητική ενέργεια της σφαίρας πριν την κρούση είναι μεγαλύτερη από την κινητική ενέργεια που έχει μετά την κρούση.

β. η ορμή της σφαίρας δεν μεταβάλλεται κατά την κρούση.

γ. η γωνία πρόσπτωσης της σφαίρας είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης.

δ. η δύναμη που ασκεί ο τοίχος στη σφαίρα έχει την ίδια διεύθυνση με την αρχική ταχύτητα της σφαίρας.

A1.41 Ποιες από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι σωστές;

Μια σφαίρα συγκρούεται πλάγια με το ακλόνητο πάτωμα. Αν προσπίπτει με ταχύτητα μέτρου, $υ$ και γωνία πρόσπτωσης, ϕ , και ανακλάται με ταχύτητα ίσου μέτρου $υ$, τότε

α. Η κρούση είναι ελαστική

β. Διατηρείται η ορμή και η κινητική ενέργεια του συστήματος «σφαίρα–Γη»

γ. Η γωνία πρόσπτωσης είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης.

δ. Η μεταβολή της ορμής της σφαίρας είναι μηδέν.

ε. Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας της σφαίρας είναι μηδέν

στ. Η μέση δύναμη που δέχεται η σφαίρα από το πάτωμα είναι ίση με το βάρος της.

A1.42 Μια σφαίρα με ορμή μέτρου, $p=mυ$, πέφτει κατακόρυφα και συγκρούεται ελαστικά με οριζόντιο και τελείως λείο επίπεδο και ακλόνητο πάτωμα.

I. Η μεταβολή του μέτρου της ορμής της σφαίρας είναι:

α. μηδέν

β. $2mυ$

γ. $mυ$

II. Το μέτρο της μεταβολής της ορμής της σφαίρας είναι:

α. μηδέν

β. $2mυ$

γ. $mυ$

A1.43 Μια σφαίρα, βάρους $w=mg$ πέφτει κατακόρυφα στο οριζόντιο δάπεδο με ταχύτητα μέτρου v_1 και ανακλάται με ταχύτητα μέτρου v_2 . Η δύναμη, που δέχεται από το δάπεδο κατά τη διάρκεια της κρούσης θεωρείται σταθερή και έχει μέτρο:

α. $F=mg$

β. $F>mg$

γ. $F<mg$

A1.44 Μπάλα μάζας m που κινείται οριζόντια με ταχύτητα v συγκρούεται με λείο, κατακόρυφο και ακλόνητο τοίχο. Η κρούση είναι μετωπική. Ποιες από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι σωστές ή λάθος. Να αιτιολογήσετε την κάθε απάντησή σας.

α. Η μπάλα ανακλάται με ταχύτητα ίσου μέτρου, v , σε κάθε περίπτωση.

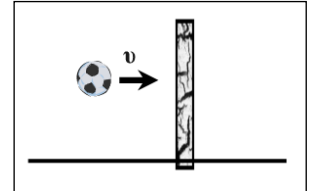
β. Η ορμή της σφαίρας διατηρείται σταθερή, αν η κρούση είναι ελαστική.

γ. Η κινητική ενέργεια της σφαίρας διατηρείται, αν η κρούση είναι και ελαστική.

δ. Αν διατηρείται η κινητική ενέργεια της σφαίρας, θα διατηρείται και η ορμή της.

ε. Η μεταβολή ορμής της σφαίρας έχει μέτρο $2mv$, αν η κρούση είναι ελαστική.

στ. Η μέση τιμή της δύναμης που δέχεται η μπάλα από τον τοίχο είναι αντιστρόφως ανάλογη με τη διάρκεια της επαφής τους.



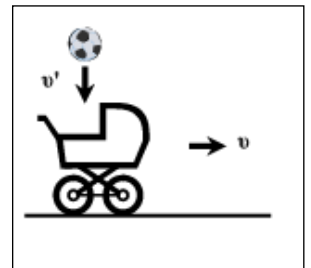
A1.45 Το καρότσι μάζας M κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα v και η μπάλα, μάζας, m , πέφτει κατακόρυφα προς τα κάτω και συγκρούεται πλαστικά με το καρότσι. Λίγο πριν την κρούση η μπάλα είχε ταχύτητα v' . Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα μπορεί να συνεχίσει να κινείται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Ποιες από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι σωστές ή λανθασμένες;

α. Η ορμή του συστήματος των δύο αυτών σωμάτων διατηρείται.

β. Η κινητική ενέργεια του συστήματος των δύο σωμάτων διατηρείται.

γ. Η ταχύτητα του συσσωματώματος είναι ανεξάρτητη από την ταχύτητα της μπάλας v' .

δ. Το μέτρο της ταχύτητας του καροτσιού μειώνεται μετά την κρούση.



A1.46 Μια μπάλα συγκρούεται ελαστικά με λείο οριζόντιο πάτωμα με την ταχύτητά της v_1 να σχηματίζει γωνία ϕ με την κάθετο στο πάτωμα. Ποιες από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι οι σωστές;

α. Η ορμή της μπάλας στον κατακόρυφο άξονα διατηρείται σταθερή.

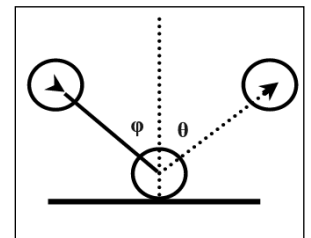
β. Η ορμή της μπάλας στον οριζόντιο άξονα διατηρείται σταθερή.

γ. Η μπάλα ανακλάται με ταχύτητα μέτρου $v_2 < v_1$.

δ. Αν η μπάλα ανακλάται με γωνία θ , τότε $\phi = \theta$.

ε. Η ορμή της μπάλας διατηρείται σταθερή

στ. Η ορμή του συστήματος μπάλα – Γη διατηρείται σταθερή



A1.47 Μια ελαφριά μπάλα συγκρούεται ελαστικά με λείο κατακόρυφο τοίχο με την ταχύτητά της v_1 να σχηματίζει γωνία ϕ με την κάθετο στον τοίχο. Ποιες από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι οι σωστές;

α. Η ορμή της μπάλας στον κατακόρυφο άξονα διατηρείται σταθερή.

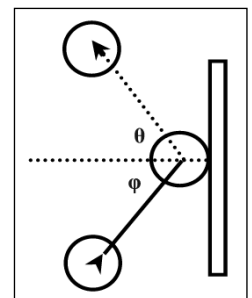
β. Η ορμή της μπάλας στον οριζόντιο άξονα διατηρείται σταθερή.

γ. Η μπάλα ανακλάται με ταχύτητα μέτρου $v_2 = v_1$.

δ. Αν η μπάλα ανακλάται με γωνία θ , τότε $\phi = \theta$.

ε. Η ορμή της μπάλας διατηρείται σταθερή.

στ. Η ορμή του συστήματος μπάλα – Γη διατηρείται σταθερή



ΘΕΜΑΤΑ Β

B1.1 Σφαίρα μάζας m_1 συγκρούεται με ταχύτητα v_0 , μετωπικά και ελαστικά με άλλη ακίνητη σφαίρα μάζας m_2 . Μετά την κρούση οι δύο σφαίρες κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση με τη m_1 να έχει ταχύτητα μέτρου $V_1=v_1/3$. Ο λόγος των μαζών των δύο σφαιρών, m_1/m_2 , είναι:

$$\alpha. \frac{m_1}{m_2}=2 \qquad \beta. \frac{m_1}{m_2}=3 \qquad \gamma. \frac{m_1}{m_2}=\frac{1}{2}$$

B1.2 Μια μικρή σφαίρα μάζας m_1 συγκρούεται μετωπικά ελαστικά με ακίνητη σφαίρα μάζας m_2 . Μετά την κρούση οι σφαίρες κινούνται με αντίθετες ταχύτητες ίσων μέτρων. Ο λόγος των μαζών των δύο σφαιρών, m_1/m_2 είναι:

$$\alpha. 1 \qquad \beta. 1/3 \qquad \gamma. 1/2$$

(Πανελλαδικές εξετάσεις 2004)

B1.3 Σωματίδιο με κινητική ενέργεια K_1 συγκρούεται μετωπικά ελαστικά με ακίνητο πυρήνα διπλάσιας μάζας. Μετά την κρούση η κινητική ενέργεια του πυρήνα θα είναι:

$$\alpha. 9K_1/8 \qquad \beta. 8K_1/9 \qquad \gamma. K_1$$

B1.4 Σωματίδιο μάζας m_1 , ταχύτητας v_1 , συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με ακίνητο πυρήνα μάζας m_2 . Μετά την κρούση το σωματίδιο κινείται αντίθετα με ταχύτητα, μέτρου, $V_1=2v_1/3$.

I. Ο λόγος των μαζών των δύο σωμάτων, m_1/m_2 είναι:

$$\alpha. 1/5 \qquad \beta. 1/4 \qquad \gamma. 5$$

II. Το κλάσμα της κινητικής ενέργειας του σωματιδίου που μεταφέρθηκε στον πυρήνα, είναι

$$\alpha. \frac{|\Delta K_1|}{K_1} = \frac{1}{5} \qquad \beta. \frac{|\Delta K_1|}{K_1} = \frac{5}{9} \qquad \gamma. \frac{|\Delta K_1|}{K_1} = \frac{4}{5}$$

B1.5 Μια μικρή σφαίρα Σ_1 , μάζας m_1 , συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με ακίνητη μικρή σφαίρα Σ_2 , μάζας m_2 . Μετά την κρούση οι σφαίρες κινούνται με αντίθετες κατευθύνσεις και τα μέτρα των ταχυτήτων τους συνδέονται με τη σχέση $V_1=2V_2$. Ο λόγος των μαζών των δύο σφαιρών, m_1/m_2 είναι ίσος με:

$$\alpha. 1/4 \qquad \beta. 1/3 \qquad \gamma. 1/5$$

•B1.6 Σφαίρας μάζας m_1 συγκρούεται κεντρικά ελαστικά με ακίνητη σφαίρα μάζας m_2 ($m_1 > m_2$).

I. Αν το ποσοστό της κινητικής ενέργειας της m_1 που μεταβιβάστηκε στη m_2 είναι 36% τότε για τις μάζες ισχύει η σχέση:

$$\alpha. m_2=m_1 \qquad \beta. m_1=9m_2 \qquad \gamma. m_1=4m_2$$

II. Ποια πρέπει να είναι η σχέση των μαζών ώστε το ποσοστό μεταφοράς ενέργειας να είναι 100%

$$\alpha. m_2=m_1 \qquad \beta. m_1=2m_2 \qquad \gamma. m_2=2m_1$$

♣**B1.7** Σφαίρα Α μάζας m κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο και συγκρούεται μετωπικά ελαστικά με ακίνητη σφαίρα, Β, μάζας M . Να δείξετε ότι για να αποκτήσει η σφαίρα Β μετά την κρούση

I. μέγιστη ταχύτητα πρέπει να ισχύει: $m/M \rightarrow \infty$

II. μέγιστη κινητική ενέργεια πρέπει να ισχύει: $m/M=1$

III. μέγιστη ορμή, πρέπει να ισχύει $m/M \rightarrow 0$

B1.8 Δύο σφαίρες με μάζες m_1, m_2 , με $m_2=4m_1$, συγκρούονται μετωπικά ελαστικά με ταχύτητες ίσου μέτρου και αντίθετης κατεύθυνσης. Ο λόγος των μέτρων των ταχυτήτων $|V_1|/|V_2|$, μετά την κρούση, είναι:

α. 5

β. 6

γ. 11

B1.9 Δύο σφαίρες με μάζες m_1, m_2 συγκρούονται μετωπικά ελαστικά με ταχύτητες ίσου μέτρου και αντίθετης κατεύθυνσης. Αν μετά την κρούση η σφαίρα μάζας, m_2 , παραμένει ακίνητη, τότε ο λόγος των μαζών m_2/m_1 των δύο σφαιρών είναι:

α. $\frac{1}{2}$

β. 2

γ. 3

B1.10 Δύο σώματα Σ_1, Σ_2 , με μάζες m και M με $m \ll M$ κινούνται στην ίδια ευθεία με αντίθετες ταχύτητες ίσου μέτρου u . Μετά την ελαστική τους κρούση το μέτρο της ταχύτητας του σώματος, Σ_1 , θα είναι :

α. u

β. $2u$

γ. $3u$

B1.11 Δύο σφαίρες ίσης μάζας κινούνται κατά μήκος του άξονα xx' με ταχύτητες $v_1=10\text{m/s}$ και $v_2=-15\text{m/s}$ και συγκρούονται μετωπικά και ελαστικά. Μετά την κρούση οι ταχύτητες των σφαιρών V_1, V_2 , είναι:

α. $V_1=10\text{m/s}$ και $V_2=-15\text{m/s}$

β. $V_1=15\text{m/s}$ και $V_2=-10\text{m/s}$

γ. $V_1=-15\text{m/s}$ και $V_2=10\text{m/s}$

B1.12 Δύο σφαίρες με μάζες m_1, m_2 με $m_2=2m_1$, κινούνται κατά μήκος του άξονα xx' με ταχύτητες $v_1=3\text{m/s}$ και $v_2=-3\text{m/s}$ και συγκρούονται μετωπικά και ελαστικά. Μετά την κρούση οι ταχύτητες των σφαιρών, V_1, V_2 θα είναι:

α. -5m/s και $+5\text{m/s}$

β. -5m/s και $+1\text{m/s}$

γ. -2m/s και $+4\text{m/s}$

B1.13 Δύο σφαίρες κινούνται πάνω στην ίδια ευθεία και με την ίδια φορά με ταχύτητες $v_1=5\text{m/s}$ και $v_2=3\text{m/s}$. Μετά την κρούση η σφαίρα (1) έχει ταχύτητα $V_1=2\text{m/s}$ και η άλλη $V_2=4\text{m/s}$.

Η κρούση είναι:

α. Ελαστική

β. Ανελαστική

•**B1.14** Οι σφαίρες που φαίνονται στο σχήμα συγκρούονται μετωπικά και ελαστικά.

I. Μετά την κρούση η κινητική ενέργεια της σφαίρας m :

α. αυξάνεται β. μειώνεται γ. μένει σταθερή

II. Αν είναι $m=M$ το ποσοστό της κινητικής ενέργειας της σφαίρας m που μεταβιβάζεται στη M είναι:

α. 50%

β. 75%

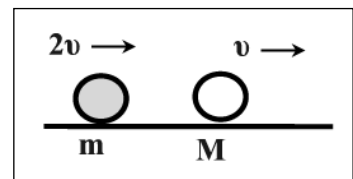
γ. 90%

III. Αν το ποσοστό της κινητικής ενέργειας της μάζας m που μεταφέρεται στη σφαίρα M είναι 96% τότε η σχέση των μαζών είναι:

α. $M=2m$

β. $M=3m$

γ. $M=9m$



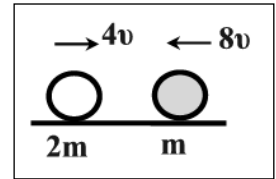
B1.15 Τα δύο σώματα που φαίνονται στο σχήμα, συγκρούονται ελαστικά και μετωπικά.

I. Ποιες από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι σωστές και ποιες λανθασμένες;

- α. Η ορμή του συστήματος των δύο σφαιρών μετά την κρούση είναι μηδέν.
- β. Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος είναι μηδέν.
- γ. Οι μεταβολές της ορμής των σφαιρών είναι μεταξύ τους αντίθετες.

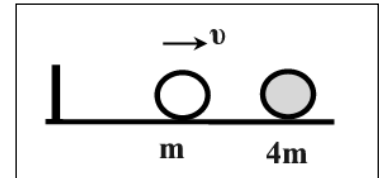
II. Οι ταχύτητες μετά την κρούση είναι

- α. $V_1 = -4v$ και $V_2 = 8v$
- β. $V_1 = -6v$ και $V_2 = 6v$
- γ. $V_1 = -4v$ και $V_2 = 4v$



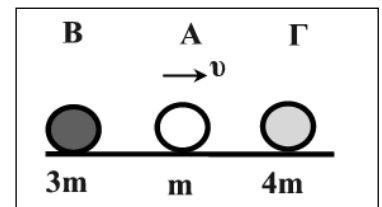
B1.16 Η σφαίρα Σ_1 μάζας m συγκρούεται ελαστικά και μετωπικά με την ακίνητη σφαίρα Σ_2 μάζας $4m$. μετά την κρούση η σφαίρα Σ_1 επιστρέφει και συγκρούεται ελαστικά με το ακλόνητο τοίχωμα. Μεταξύ των δύο σφαιρών οι κρούσεις που συμβαίνουν συνολικά είναι:

- α. μία
- β. δύο
- γ. τρεις



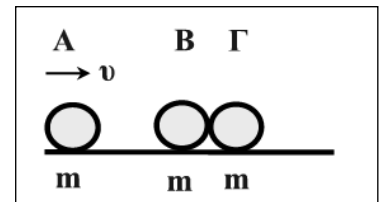
B1.17 Τρεις σφαίρες, A, B, Γ με μάζες m , $3m$, $4m$ ηρεμούν αρχικά σε λείο οριζόντιο επίπεδο με τα κέντρα τους στην ίδια ευθεία. Η σφαίρα A εκτοξεύεται με ταχύτητα v προς τη σφαίρα Γ. Όλες οι κρούσεις που συμβαίνουν είναι μετωπικές και ελαστικές. Ο συνολικός αριθμός των κρούσεων είναι:

- α. μία
- β. δύο
- γ. τρεις



B1.18 Οι τρεις σφαίρες του σχήματος είναι όμοιες, ίσης μάζας m και τα κέντρα τους βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Εκτοξεύουμε τη σφαίρα A με ταχύτητα v προς τη σφαίρα B και όλες οι κρούσεις θεωρούνται ελαστικές. Ποια από τις ακόλουθες προτάσεις είναι η σωστή;

- α. Η A θα σταματήσει και οι B και Γ θα φύγουν δεξιά με ταχύτητα v .
- β. Η B θα μείνει ακίνητη και οι A και Γ θα κινηθούν αντίθετα με ταχύτητες μέτρου v .
- γ. Η A θα σταματήσει, η B θα μείνει ακίνητη και η Γ θα φύγει με ταχύτητα, v .



B1.19 Σώμα, A, μάζας m που έχει κινητική ενέργεια, K συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα, B, τριπλάσιας μάζας, $3m$ και στη συνέχεια το σώμα, B, συγκρούεται πλαστικά με άλλο ακίνητο σώμα, Γ, μάζας $6m$. Το ποσό θερμότητας που παράγεται κατά τις κρούσεις είναι:

- α. $K/2$
- β. $K/3$
- γ. $2K/3$

B1.20 Από σημείο που βρίσκεται σε ύψος h από το έδαφος αφήνονται διαδοχικά δύο σφαίρες με μάζες $m_1 = m$ και $m_2 = m$, αντίστοιχα. Οι σφαίρες θεωρούνται υλικά σημεία. Η m_1 συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με το έδαφος και τη στιγμή που αποχωρίζεται από αυτό συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με τη m_2 που κατεβαίνει πίσω της. Το ύψος στο οποίο θα εκτιναχτεί η m_2 μετά την κρούση είναι:

- α. $h' > h$
- β. $h' < h$
- γ. $h' = h$

•**B1.21** Από σημείο που βρίσκεται σε ύψος h από το έδαφος αφήνονται διαδοχικά δύο σφαίρες με μάζες $m_1=3m$ και $m_2=m$, αντίστοιχα. Οι σφαίρες θεωρούνται υλικά σημεία. Η m_1 συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με το έδαφος και τη στιγμή που αποχωρίζεται από αυτό συγκρούεται ξανά μετωπικά και ελαστικά με τη m_2 που κατεβαίνει πίσω της. Το ύψος που θα εκτιναχτεί η m_2 μετά την κρούση είναι

α. $h'=4h$

β. $h'=h$

γ. $h'=2h$

!B1.22 Σωματίο μάζας m_1 συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με ακίνητο σωματίο μάζας m_2 . Το ποσοστό απώλειας της κινητικής ενέργειας του σωματίου m_1 .

α. $\frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}$

β. $\frac{4m_1^2}{(m_1+m_2)^2}$

γ. $\frac{4m_2^2}{(m_1+m_2)^2}$

B1.23 Παίκτης του American Football μάζας 90kg κινείται με τη μπάλα και με ταχύτητα 4m/s. Για να τον σταματήσουν σπεύδουν δύο αντίπαλοι αμυντικοί για να κάνουν μετωπική πλαστική κρούση μ' αυτόν. Ο ένας έχει 100kg μάζα και 3,6m/s ταχύτητα και ο άλλος 80kg και 4,5m/s. Ποιος είναι καταλληλότερος να τον σταματήσει;

α. Ο βαρύτερος

β. Ο ελαφρύτερος

γ. Και ο δύο το ίδιο

B1.24 Μια σφαίρα Α που κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με κινητική ενέργεια, K , συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με άλλη όμοια αλλά ακίνητη σφαίρα, Β, που βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο. Η κινητική ενέργεια του συσσωματώματος μετά την κρούση είναι ίση με

α. $K/5$

β. $K/4$

γ. $K/2$

!B1.25 Βλήμα μάζας m που κινείται με ταχύτητα v διαπερνά ακίνητο σώμα μάζας $M=2m$ και όταν βγαίνει από αυτό έχει ταχύτητα μέτρου $v/2$. Το ποσοστό της αρχικής ενέργειας του βλήματος που έγινε θερμότητα λόγω ανελαστικής κρούσης είναι:

α. $5/8$

β. $3/8$

γ. $1/8$

B1.26 Δύο σώματα με μάζες $m_1=m$ και $m_2=4m$ κινούνται στην ίδια ευθεία με ταχύτητες μέτρου $v_1=2v$ και $v_2=v$ σε αντίθετες κατευθύνσεις. Τα σώματα συγκρούονται πλαστικά. Το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος που έγινε θερμότητα είναι:

α. $3/10$

β. $5/10$

γ. $9/10$

!B1.27 Σώμα μάζας m_1 συγκρούεται πλαστικά και μετωπικά με άλλο σώμα μάζας m_2 που αρχικά ηρεμούσε. Το κλάσμα, $E_{απωλ}/K_{προ}$, της αρχικής μηχανικής ενέργειας του σώματος m_1 που έγινε θερμότητα λόγω της πλαστικής κρούσης είναι:

α. $\frac{m_1}{m_2}$

β. $\frac{m_1}{m_1+m_2}$

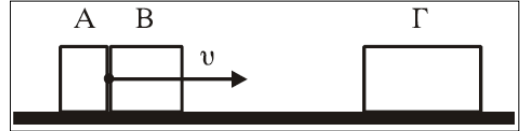
γ. $\frac{m_2}{m_1+m_2}$

B1.28 Δύο σώματα Α και Β με μάζες m και $4m$ αντίστοιχα, κινούνται πάνω στην ίδια ευθεία με αντίθετη φορά. Τα δύο σώματα έχουν ίσες κινητικές ενέργειες και συγκρούονται μετωπικά και

πλαστικά. Αν v_1 είναι το μέτρο της ταχύτητας του σώματος A και V το μέτρο της ταχύτητας του συσσωματώματος που δημιουργείται μετά την κρούση, τότε

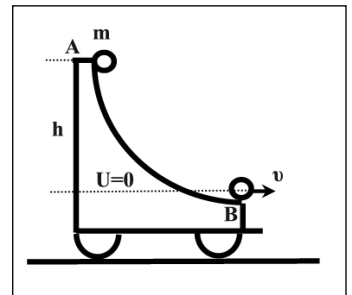
α. $V = v_1/5$ β. $V = 2v_1/5$ γ. $V = 3v_1/5$

B1.29 Δύο σώματα, το A με μάζα m_1 και το B με μάζα m_2 , είναι διαρκώς σε επαφή και κινούνται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με την ίδια ταχύτητα v . Τα σώματα συγκρούονται κεντρικά με σώμα Γ μάζας $4m_1$, το οποίο αρχικά είναι ακίνητο. Μετά την κρούση το A σταματά, ενώ το B κολλάει στο Γ και το συσσωμάτωμα αυτό κινείται με ταχύτητα $v/3$. Τότε θα ισχύει:



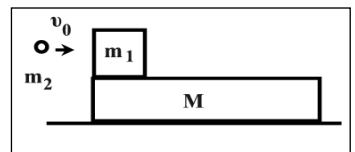
α. $m_1/m_2=2$ β. $m_1/m_2=4$ γ. $m_1/m_2=1/2$

B1.30 Η σφαίρα μάζας m αφήνεται από το σημείο A του οχήματος μάζας $M=2m$ που φαίνεται στο σχήμα. Αυτή κατεβαίνει χωρίς τριβές κάνοντας μεταφορική κίνηση και όταν το κέντρο της έχει πέσει κατά h εγκαταλείπει το όχημα από το άκρο B. Το όχημα μπορεί να κινείται σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές. Η ταχύτητα με την οποία η σφαίρα εγκαταλείπει το όχημα είναι:



α. $v=\sqrt{2gh}$ β. $v=2\sqrt{2gh}$ γ. $v=2\sqrt{\frac{gh}{3}}$

•**B1.31** Σώμα, Σ_1 , μάζας $m_1=m$ ισορροπεί πάνω σε πλατφόρμα μάζας $M=8m$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σύστημα αρχικά ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το Σώμα Σ_1 παρουσιάζει με την πλατφόρμα συντελεστή τριβής ολίσθησης, μ . Βλήμα μάζας $m_2=m$ που κινείται οριζόντια σφηνώνεται με ταχύτητα v_0 στο σώμα Σ .



I. Η τελική ταχύτητα του συστήματος όταν το συσσωμάτωμα m_1+m_2 θα σταματήσει να ολισθαίνει πάνω στην πλατφόρμα, είναι:

α. $v_0/9$ β. $v_0/5$ γ. $v_0/10$

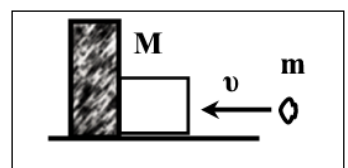
II. Η θερμότητα που εκλύθηκε λόγω τριβής από τη στιγμή που τέλειωσε η κρούση μέχρι να σταματήσει να ολισθαίνει το συσσωμάτωμα πάνω στην πλατφόρμα είναι:

α. $mv_0^2/20$ β. $mv_0^2/10$ γ. $mv_0^2/5$

III. Το διάστημα που διανύει το συσσωμάτωμα πάνω στην πλατφόρμα μέχρι να σταματήσει είναι:

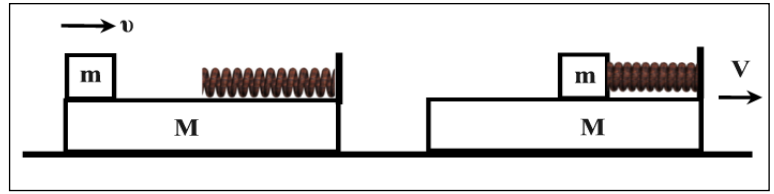
α. $v_0^2/20\mu g$ β. $v_0^2/10\mu g$ γ. $2v_0^2/5\mu g$

♣**B1.32** Στο διπλανό σχήμα βλήμα μάζας m που κινείται οριζόντια σφηνώνεται σε ακίνητο σώμα μάζας $M=3m$ που ακουμπά σε τοίχο. Η ελάχιστη κινητική ενέργεια που απαιτείται για να σφηνωθεί όλο το βλήμα στο ξύλο είναι K. Αν δεν υπάρχει τοίχος και το σώμα μάζας M είναι ελεύθερο να κινηθεί πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο, η ελάχιστη απαιτούμενη κινητική ενέργεια ώστε το βλήμα να σφηνωθεί όλο στο σώμα είναι:



α. $4K/3$ β. $2K/5$ γ. $3K$

B1.33 Σώμα μάζας m εκτοξεύεται με ταχύτητα, v , πάνω σε πλατφόρμα μάζας $M=3m$ που ηρεμεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Μεταξύ σώματος και πλατφόρμας δεν υπάρχουν τριβές. Το σώμα συναντά ελατήριο που είναι στερεωμένο πάνω στην πλατφόρμα και το συσπειρώνει χωρίς απώλειες ενέργειας. Η μέγιστη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι

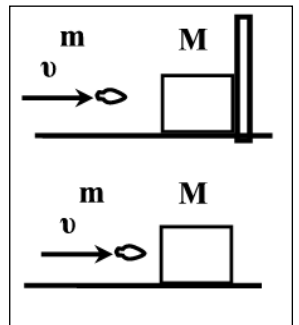


α. $U = \frac{3}{4}mv^2$

β. $U = \frac{1}{2}mv^2$

γ. $U = \frac{3}{8}mv^2$

•**B1.34** Βλήμα μάζας m κινούμενο οριζόντια με ταχύτητα v σφηνώνεται σε ένα κύβο μάζας M που είναι ακλόνητος και εισχωρεί μέσα του κατά d_1 . Όταν το ίδιο βλήμα κινούμενο με την ίδια ταχύτητα προσκρούει στον ίδιο κύβο, αλλά αυτός μπορεί να κινηθεί ελεύθερα και χωρίς τριβές σε οριζόντιο επίπεδο, εισχωρεί κατά d_2 . Η σχέση των d_1 και d_2 είναι:

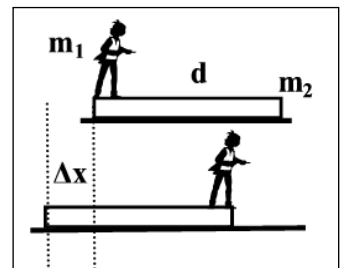


α. $d_2 = d_1 \frac{m}{M}$

β. $d_2 = d_1 \frac{M+m}{M}$

γ. $d_2 = d_1 \frac{M}{M+m}$

•**B1.35** Ο ναύτης μάζας m_1 στέκεται στην άκρη μιας σχεδίας μάζας m_2 και μήκους d , που ηρεμεί στην ήρεμη επιφάνεια του νερού. Αν ο ναύτης μετατοπιστεί από την μια άκρη στην άλλη, πόση είναι η αντίστοιχη μετατόπιση της σχεδίας ως προς ακίνητο παρατηρητή που κάθετα στην προκυμαία; Οι τριβές μεταξύ νερού και βάρκας να θεωρηθούν αμελητέες.

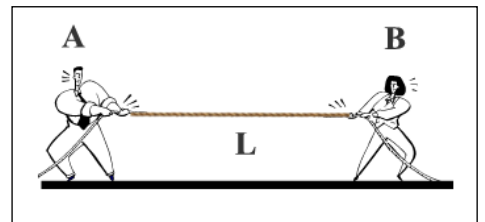


α. $\Delta x = d \cdot \frac{m_1}{m_1 - m_2}$

β. $\Delta x = d \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2}$

γ. $\Delta x = d \cdot \frac{2m_1}{m_1 + m_2}$

•**B1.36** Οι δύο παίκτες Α και Β έχουν μάζες $m=60\text{kg}$ και $M=80\text{kg}$ αντιστοίχως και κρατάνε ένα σχοινί ενώ πατάνε πάνω σε τελείως λεία επιφάνεια πάγου. Τραβάνε το σχοινί και συναντιούνται σε ένα ενδιάμεσο σημείο αφού διανύσουν αποστάσεις d_1 και d_2 από τις αρχικές τους θέσεις. Η σχέση των d_1 και d_2 είναι:

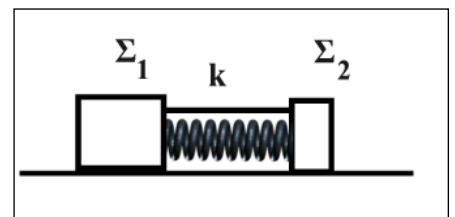


α. $d_1 = d_2$

β. $3d_1 = 4d_2$

γ. $4d_1 = 3d_2$

•**B1.37** Τα δύο σώματα του σχήματος έχουν μάζες m_1, m_2 με $m_1=3m_2$ και βρίσκονται πάνω σε τελείως λείο επίπεδο. Ανάμεσα τους υπάρχει ένα συσπειρωμένο ελατήριο με δυναμική ενέργεια ελαστικότητας U . Τα σώματα είναι ακίνητα και συνδεδεμένα με νήμα ώστε το ελατήριο να μένει συσπειρωμένο. Κόβουμε το νήμα και τα σώματα εκτινάσσονται. Τη στιγμή που εγκαταλείπουν τα άκρα του ελατηρίου η ταχύτητα του σώματος Σ_1 είναι



α. $v_1 = \sqrt{U/2m_1}$

β. $v_1 = \sqrt{U/3m_1}$

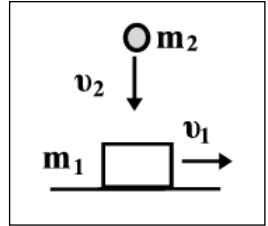
γ. $v_1 = \sqrt{U/m_1}$

B1.38 Το κιβώτιο μάζας $m_1=3m$ κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου $v_1=v$ σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Σώμα μάζας $m_2=2m$ πέφτει κατακόρυφα και συγκρούεται πλαστικά με ταχύτητα μέτρου $v_2=v$. Η ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση είναι

α. $V=0,6v$

β. $V=0,5v$

γ. $V=v$



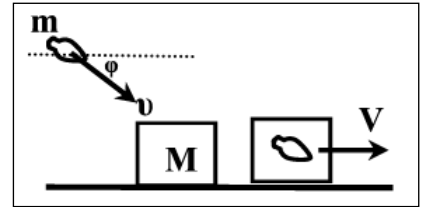
B1.39 Το βλήμα μάζας m καρφώνεται με ταχύτητα μέτρου v σε ακίνητο στόχο μάζας $M=3m$ που ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Η ταχύτητα v σχηματίζει γωνία $\phi=60^\circ$ με το οριζόντιο επίπεδο. Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα κινείται πάνω στο οριζόντιο επίπεδο. Να υπολογιστούν

I. Η ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση είναι

α. $V=v/2$

β. $V=v/4$

γ. $V=v/8$



II. Το κλάσμα της αρχικής κινητικής ενέργειας, K , του βλήματος που έγινε θερμότητα κατά την πλαστική κρούση

α. $15/16$

β. $2/3$

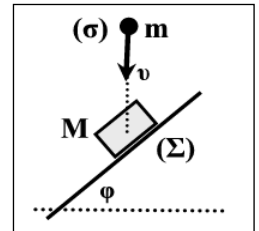
γ. $4/5$

B1.40 Το σώμα σ μάζας m πέφτει κατακόρυφα και συγκρούεται πλαστικά με το σώμα Σ μάζας $M=3m$ που αρχικά ηρεμεί στο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\phi=30^\circ$. Το σώμα σ τη στιγμή της κρούσης έχει ταχύτητα μέτρου v . Η ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση θα είναι ίση με

α. $V=3v/4$

β. $V=v/4$

γ. $V=v/8$

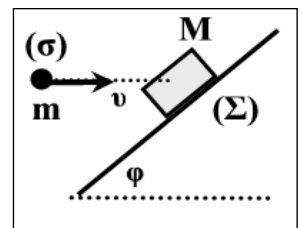


B1.41 Το σώμα σ μάζας m που κινείται οριζόντια συγκρούεται πλαστικά με το σώμα Σ μάζας $M=3m$ που αρχικά ηρεμεί στο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\phi=60^\circ$. Το (σ) τη στιγμή της κρούσης έχει ταχύτητα μέτρου v . Η ταχύτητα του συσσωματώματος V μετά την κρούση είναι

α. $V=v/3$

β. $V=v/8$

γ. $V=v/6$

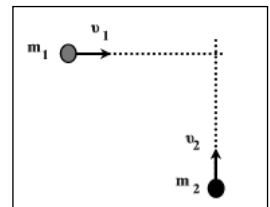


!B1.42 Τα σωματίδια με μάζες $m_1=m_2=m$ κινούνται με ταχύτητες v_1, v_2 , όπως φαίνεται στο σχήμα και συγκρούονται πλαστικά. Μετά την κρούση η ταχύτητα, V , του συσσωματώματος είναι:

α. $V=\sqrt{v_1^2+v_2^2}$

β. $V=\frac{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}{2}$

γ. $V=\frac{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}{4}$



B1.43 Σφαίρα Σ_1 , μάζας m_1 συγκρούεται έκκεντρα και ελαστικά με άλλη σφαίρα Σ_2 , μάζας m_2 , που αρχικά είναι ακίνητη. Μετά την κρούση οι δύο σφαίρες κινούνται σε κάθετες διευθύνσεις. Ο λόγος των μαζών τους m_1/m_2 είναι:

α. 1

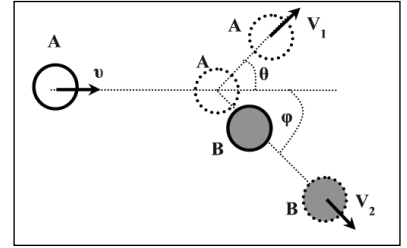
β. 2

γ. $1/2$

•B1.44 Σφαίρα Σ_1 , μάζας m_1 , ταχύτητας $v_1=v$ συγκρούεται έκκεντρα και ελαστικά με άλλη σφαίρα Σ_2 , ίσης μάζας $m_2=m_1$, που αρχικά είναι ακίνητη.

I. Μετά την κρούση οι διευθύνσεις των ταχυτήτων των δύο σφαιρών σχηματίζουν γωνία:

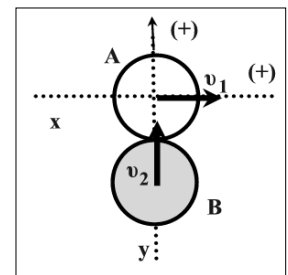
- α. 30° β. 45° γ. 90°



II. Αν μετά την κρούση οι ταχύτητες των δύο σφαιρών συνδέονται με τη σχέση $V_2 = \frac{V_1}{\sqrt{3}}$, τότε οι ταχύτητες αυτές είναι:

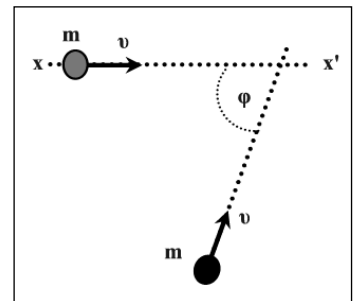
- α. $V_1=v\sqrt{3}/2$ & $V_2=v/2$ β. $V_1=v/2$ & $V_2=v\sqrt{3}/2$ γ. $V_1=V_2=v\sqrt{2}/2$

•B1.45 Οι όμοιες σφαίρες A και B έχουν ίσες μάζες $m_1=m_2=m$ και κινούνται μεταφορικά σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητες μέτρων $v_1=v_2=v$. Τα κέντρα μάζας των σφαιρών A και B κινούνται αντίστοιχα στους ορθογώνιους άξονες x και y. Τη στιγμή της σύγκρουσης των δύο σφαιρών η δύναμη που ασκεί η μία στην άλλη είναι κάθετη στην επιφάνεια επαφής τους. Η κρούση θεωρείται ελαστική. Οι ταχύτητες των δύο σφαιρών μετά την κρούση έχουν μέτρα



- α. $V_2=0$, $V_1=v\sqrt{2}$ β. $V_2=-v$, $V_1=v\sqrt{2}$ γ. $V_2=0$, $V_1=v\sqrt{3}$

•B1.46 Τα σωματίδια με ίδιες μάζες, m και ίδια μέτρα ταχυτήτων, v κινούνται σε ευθείες τροχιές που σχηματίζουν γωνία $\varphi=60^\circ$, συγκρούονται πλαστικά και το συσσωμάτωμα κινείται με ταχύτητα μέτρου, V, που σχηματίζει με τον άξονα xx' γωνία, θ .



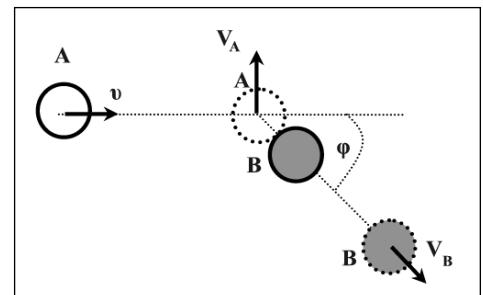
I. Το μέτρο της ταχύτητας V είναι:

- α. $v\sqrt{2}/2$ β. $v\sqrt{3}/2$ γ. $v\sqrt{3}$

II. Η γωνία θ είναι:

- α. 30° β. 45° γ. 60°

•B1.47 Η σφαίρα A μάζας m συγκρούεται με ταχύτητα v με την αρχικά ακίνητη σφαίρα, B, μάζας 2m. Η κρούση θεωρείται ελαστική. Μετά την κρούση η σφαίρα A κινείται κάθετα στην αρχική της διεύθυνση με ταχύτητα V_A και η B με ταχύτητα V_B υπό γωνία φ ως προς τον άξονα xx' .



I. Για τη γωνία φ ισχύει

- α. $\varphi=30^\circ$ β. $\varphi=45^\circ$ γ. $\varphi=60^\circ$

II. Για τις ταχύτητες μετά την κρούση ισχύει:

- α. $V_A=V_B=v$ β. $V_A=V_B=v\sqrt{3}/3$ γ. $V_A=v/2$, $V_B=\frac{1}{2}v\sqrt{3}$

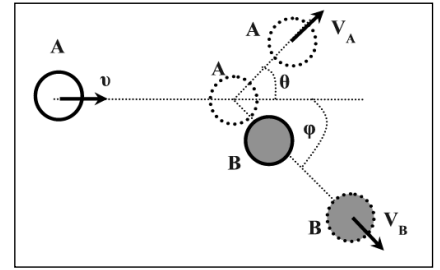
B1.48 Σώμα, A, μάζας m συγκρούεται με έκκεντρα με σώμα B, μάζας $2m$ που αρχικά είναι ακίνητο. Μετά την κρούση το σώμα A φεύγει με ταχύτητα που σχηματίζει γωνία $\theta=30^\circ$ με τον φορέα της ταχύτητας που είχε πριν την κρούση. Το σώμα B μετά την κρούση έχει ταχύτητα που σχηματίζει γωνία $\varphi=45^\circ$ με τον με τον φορέα της ταχύτητας που είχε το A πριν την κρούση. Δίνονται $\sqrt{2}=1,4$ και $\sqrt{3}=1,7$.

I. Ο λόγος V_A/V_B των ταχυτήτων των δύο σωμάτων μετά την κρούση είναι:

α. $V_A/V_B = \sqrt{2}/2$ β. $V_A/V_B = 2\sqrt{2}$

II. Η κρούση είναι:

α. Ελαστική β. Ανελαστική

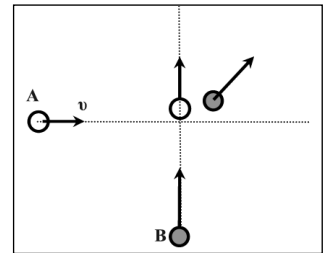


B1.49 Δύο σώματα A και B κινούνται σε κάθετες διευθύνσεις με μάζες $m_1=m$, $m_2=m$ και ταχύτητας $v_1=v$ και $v_2=2v$. Μετά την κρούση το σώμα A κινείται στον άξονα των yy' με ταχύτητα μέτρου, $V_1=v$.

I. Η ταχύτητα του B μετά την κρούση είναι:

α. $v\sqrt{2}$ β. $v/2$ γ. $v\sqrt{3}$

II. Η κρούση είναι: α. ελαστική, β. ανελαστική

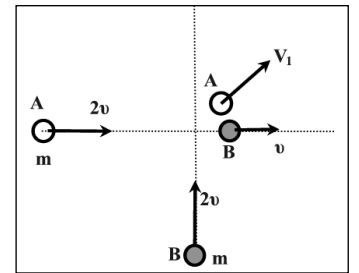


B1.50 Δύο σώματα A και B κινούνται σε κάθετες διευθύνσεις με μάζες $m_1=m$, $m_2=m$ και ταχύτητας $v_1=2v$ και $v_2=2v$. Μετά την κρούση το σώμα B κινείται στον άξονα των xx' με ταχύτητα μέτρου, $V_2=v$.

I. Η ταχύτητα του A μετά την κρούση είναι:

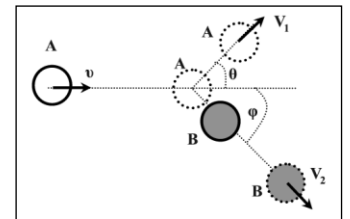
α. $v\sqrt{2}$ β. $v\sqrt{5}$ γ. $v\sqrt{3}$

II. Η κρούση είναι: α. ελαστική β. ανελαστική



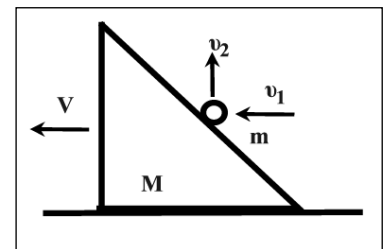
B1.51 Σώμα, A, μάζας $m_1=m$ συγκρούεται με ταχύτητα v , έκκεντρα, με σώμα B μάζας $m_2=\frac{1}{2}m$ που αρχικά είναι ακίνητο. Μετά την κρούση το σώμα A φεύγει με ταχύτητα V_1 που σχηματίζει γωνία $\theta=30^\circ$ με τον φορέα της ταχύτητας που είχε πριν την κρούση. Το σώμα B μετά την κρούση έχει ταχύτητα V_2 που σχηματίζει γωνία $\varphi=45^\circ$ με τον με τον φορέα της ταχύτητας που είχε το A πριν την κρούση. Η σχέση που συνδέει τα μέτρα των ταχυτήτων v και V_1 είναι:

α. $V_1 = (\sqrt{3}-1)v$ β. $V_1 = (\sqrt{2}-1)v$ γ. $V_1 = 2v$



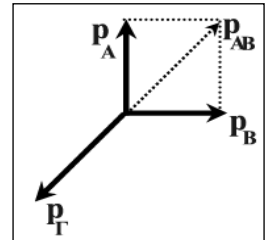
B1.52 Μια σφήνα μάζας M ηρεμεί πάνω σε τελείως λείο επίπεδο. Σφαίρα μάζας $m=8M/9$ κινείται οριζόντια με ταχύτητα v_1 και προσκρούει στην υποτείνουσα έδρα της σφήνας. Η κρούση είναι ελαστική και μετά από αυτήν η σφαίρα κινείται κατακόρυφα με ταχύτητα v_2 . Η σχέση των v_1 και v_2 είναι:

α. $v_2=3v_1$ β. $v_2=v_1/3$ γ. $v_2=v_1/8$



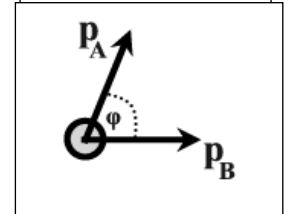
B1.53 Ένα ακίνητο βλήμα εκρήγνυται σε τρία μέρη. Τα μέρη Α και Β έχουν ορμές που βρίσκονται σε διευθύνσεις κάθετες μεταξύ τους με μέτρα που είναι ίσα με: $p_1=p_2=p$. Το μέτρο της ορμής του τρίτου κομματιού είναι:

- α. $\frac{1}{2}p$ β. p γ. $p\sqrt{2}$



B1.54 Ένα ακίνητο βλήμα εκρήγνυται σε τρία μέρη. Τα μέρη Α και Β έχουν ορμές που βρίσκονται σε διευθύνσεις που σχηματίζουν γωνία $\varphi=60^\circ$ μεταξύ τους με μέτρα που είναι ίσα με: $p_A=p_B=p$. Το μέτρο της ορμής του τρίτου κομματιού είναι:

- α. $\frac{1}{2}p$ β. p γ. $p\sqrt{3}$



B1.55 Μια σφαίρα πέφτει κατακόρυφα και συναντά το οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα μέτρου, v και ανακλάται με ταχύτητα μέτρου $\frac{1}{2}v$.

I. Το μέτρο μεταβολής της ορμής της είναι:

- α. $\frac{mv}{2}$ β. $\frac{3mv}{2}$ γ. $2mv$

II. Το ποσοστό μεταβολής της κινητικής της ενέργειας είναι:

- α. 75% β. -75% γ. -50%

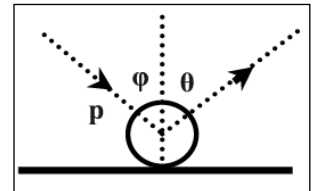
III. Αν η επαφή διαρκεί χρονικό διάστημα Δt , η μέση τιμή της δύναμης που δέχεται η σφαίρα από το επίπεδο έχει μέτρο

- α. $F=\frac{3mv}{2\Delta t}$ β. $F=mg+\frac{3mv}{2\Delta t}$ γ. $F=mg-\frac{3mv}{2\Delta t}$

B1.56 Μια σφαίρα βάρους mg συγκρούεται πλάγια αλλά ελαστικά με λεία χαλύβδινη οριζόντια επιφάνεια με ορμή μέτρου p , υπό γωνία $\varphi=30^\circ$ και ανακλάται.

I. Το μέτρο μεταβολής της ορμής της σφαίρας είναι:

- α. p β. $2p$ γ. $p\sqrt{3}$



II. Αν η επαφή διαρκεί χρονικό διάστημα Δt , η μέση τιμή της δύναμης που δέχεται η σφαίρα από το επίπεδο έχει μέτρο

- α. $F=mg+\frac{p}{\Delta t}$ β. $F=mg+\frac{2p}{\Delta t}$ γ. $F=mg+\frac{p\sqrt{3}}{\Delta t}$

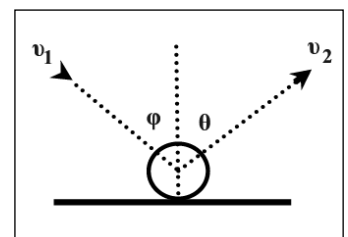
B1.57 Μια σφαίρα πέφτει πάνω σε τελείως λείο οριζόντιο δάπεδο με ταχύτητα μέτρου v_1 υπό γωνία φ ως προς την κάθετο σε αυτό και ανακλάται με ταχύτητα μέτρου v_2 υπό γωνία θ . Για τις ταχύτητες και τις γωνίες ισχύει

I. Αν η κρούση είναι ελαστική

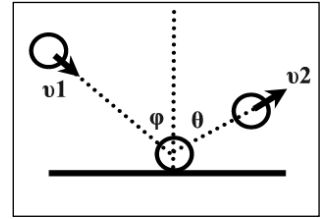
- α. $\theta=\varphi, v_1=v_2$ β. $\theta>\varphi, v_1>v_2$ γ. $\theta<\varphi, v_1<v_2$

II. Αν κατά την κρούση η σφαίρα παραμορφώνεται μόνιμα τότε

- α. $\theta=\varphi, v_1=v_2$ β. $\theta>\varphi, v_1>v_2$ γ. $\theta<\varphi, v_1<v_2$

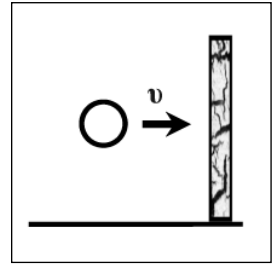


B1.58 Η μικρή σφαίρα μάζας m κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα μέτρου v_1 και συγκρούεται πλάγια με ακλόνητο λείο τοίχο με γωνία πρόσπτωσης $\varphi=30^\circ$. Μετά την κρούση η σφαίρα ανακλάται υπό γωνία $\theta=60^\circ$. Το ποσοστό % μείωσης της κινητικής ενέργειας της σφαίρας είναι



- α. 0% β. 100/3% γ. 200/3%

!B1.59 Τρεις σφαίρες Α, Β, Γ, πέφτουν κάθετα στον ίδιο τοίχο με την ίδια ταχύτητα u . Η Α κάνει κρούση ελαστική, η Β ανελαστική και η Γ πλαστική. Η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι η ίδια και στις τρεις περιπτώσεις. Να κατατάξετε τις μέσες τιμές της δύναμης που δέχεται ο τοίχος σε όλες τις περιπτώσεις



- α. $F_A < F_B < F_\Gamma$ β. $F_A < F_\Gamma < F_B$ γ. $F_A > F_B > F_\Gamma$

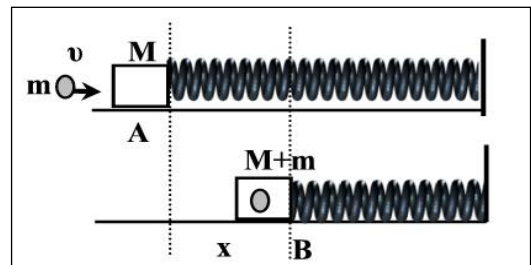
! B1.60 Η σχέση που συνδέει τη μάζα ενός σώματος m , την ορμή p και την κινητική ενέργεια, K είναι:

- α. $K = \frac{p}{2m}$ β. $K = \frac{p^2}{m}$ γ. $p^2 = 2Km$

! B1.61 Ένα ελαφρύ και ένα βαρύ σώμα έχουν ίσες κινητικές ενέργειες. Ποιο έχει μεγαλύτερη ορμή;

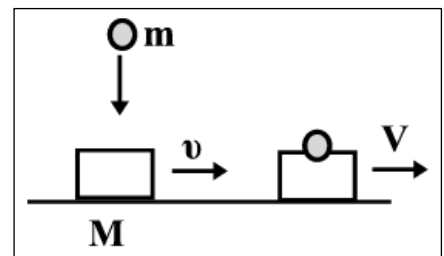
- α. Το βαρύτερο β. Το ελαφρύτερο γ. Κανένα από τα δύο.

B1.62 Βλήμα μάζας m συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με σώμα μάζας $M=m$ με ταχύτητα. Το σώμα M είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο ελατηρίου σταθεράς k που είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο με τον τρόπο που φαίνεται στο σχήμα. Οι τριβές θεωρούνται αμελητέες και το ελατήριο βρίσκεται αρχικά στο φυσικό του μήκος. Η μέγιστη συσπίρωση, x , του ελατηρίου είναι



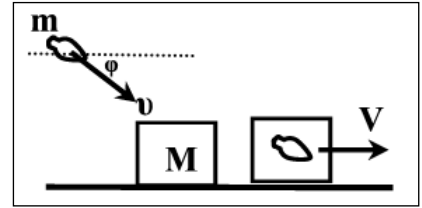
- α. $x = v\sqrt{k/m}$ β. $x = v\sqrt{2m/k}$ γ. $x = v\sqrt{m/2k}$

B1.63 Το σώμα μάζας M κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα u και άλλο σώμα ίσης μάζας m , ($M=m$) πέφτει πάνω του, ενώ κινείται κατακόρυφα προς τα κάτω. Το συσσωμάτωμα αποκτάει κοινή ταχύτητα, V . Το μέτρο της μεταβολής ορμής του σώματος μάζας m , είναι



- α. $|\Delta p| = \frac{1}{2}mu\sqrt{5}$ β. $|\Delta p| = mu\sqrt{3}$ γ. $|\Delta p| = 2mu$

B1.64 Το βλήμα μάζας m καρφώνεται με ταχύτητα μέτρου v σε ακίνητο στόχο μάζας $M=m$ που ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Η ταχύτητα v σχηματίζει γωνία $\varphi=60^\circ$ με το οριζόντιο επίπεδο. Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα κινείται πάνω στο οριζόντιο επίπεδο. Το μέτρο μεταβολής της ορμής του βλήματος μάζας m , είναι

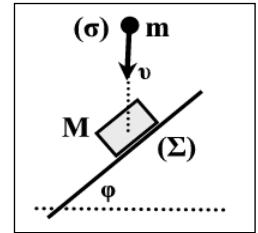


α. $|\Delta p| = \frac{1}{4}mv\sqrt{13}$

β. $|\Delta p| = mv\sqrt{13}$

γ. $|\Delta p| = mv$

B1.65 Το σώμα σ μάζας m πέφτει κατακόρυφα και συγκρούεται πλαστικά με το σώμα Σ μάζας $M=m$ που αρχικά ηρεμεί στο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\varphi=30^\circ$. Το σώμα σ τη στιγμή της κρούσης έχει ταχύτητα μέτρου v . Το μέτρο μεταβολής της ορμής του σώματος μάζας m , είναι

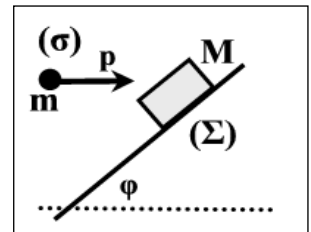


α. $|\Delta p| = \frac{1}{4}mv\sqrt{13}$

β. $|\Delta p| = mv\sqrt{13}$

γ. $|\Delta p| = mv$

B1.66 Το σώμα σ μάζας m κινείται οριζόντιο με ορμή μέτρου p και συγκρούεται πλαστικά με το σώμα Σ μάζας $M=3m$ που αρχικά ηρεμεί στο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\varphi=60^\circ$. Το μέτρο μεταβολής της ορμής του σώματος μάζας m , είναι



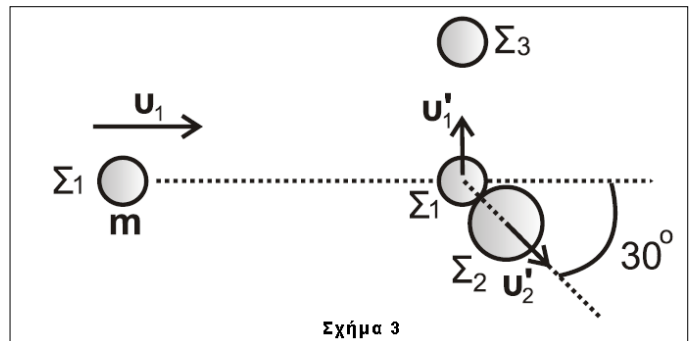
α. $|\Delta p| = \frac{p}{8}\sqrt{57}$

β. $|\Delta p| = p\sqrt{57}$

γ. $|\Delta p| = \frac{1}{2}p$

B1.67 Σε λείο οριζόντιο επίπεδο σφαίρα $\Sigma 1$ μάζας $m_1=m$ που κινείται με ταχύτητα v_1 , συγκρούεται όχι κεντρικά, με δεύτερη σφαίρα $\Sigma 2$ μάζας $m_2=2m$, η οποία είναι αρχικά ακίνητη.

Αμέσως μετά την κρούση, η σφαίρα $\Sigma 1$ κινείται κάθετα στην αρχική της διεύθυνση με ταχύτητα v'_1 και η σφαίρα $\Sigma 2$ κινείται με ταχύτητα v'_2 σε διεύθυνση που σχηματίζει γωνία 30° με την αρχική διεύθυνση κίνησης της σφαίρας $\Sigma 1$.



Στη συνέχεια, η σφαίρα $\Sigma 1$ συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με ακίνητη σφαίρα $\Sigma 3$ μάζας $m_3=m$ που βρίσκεται ακίνητη στο ίδιο λείο οριζόντιο επίπεδο, όπως φαίνεται σε κάτωψη στο σχήμα. Ο λόγος της τελικής κινητικής ενέργειας του συσσωματώματος των σφαιρών $\Sigma 1$ και $\Sigma 3$ προς την αρχική κινητική ενέργεια της σφαίρας $\Sigma 1$, πριν την κρούση της με τη σφαίρα $\Sigma 2$, είναι ίσος με:

α. $1/2$

β. $1/3$

γ. $1/6$

ΘΕΜΑΤΑ Γ

!Γ1.1 Σώμα μάζας $m_1=1\text{kg}$ που κινείται με ταχύτητα $v_1=3\text{m/s}$ στην θετική κατεύθυνση του άξονα $x'Ox$, συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα μάζας, $m_2=2\text{kg}$.

α. Να υπολογίσετε τις ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση.

β. Να υπολογίσετε τις μεταβολές ορμής των δύο σωμάτων.

γ. Να υπολογίσετε το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του m_1 που μεταβιβάστηκε στο m_2 .

δ. Αν η επαφή των δύο σωμάτων διαρκεί $dt=10^{-3}\text{s}$, πόσο είναι το μέτρο της μέσης τιμής της δύναμης που άσκησε το ένα σώμα στο άλλο;

$$\alpha. V_1=-1\text{m/s } V_2=2\text{m/s}, \beta. \Delta p_1=-4\text{kgm/s}, \Delta p_2=4\text{kgm/s}, \gamma. \pi=8/9, \delta. |F|=4 \cdot 10^3\text{N}$$

!Γ1.2 Δύο σφαίρες Σ_1, Σ_2 με μάζες $m_1=1\text{kg}$, και $m_2=2\text{kg}$ που κινούνται πάνω σε άξονα $x'Ox$ με ταχύτητες $v_1=3\text{m/s}$ και $v_2=-3\text{m/s}$ συγκρούονται μετωπικά και ελαστικά.

α. Να υπολογίσετε τις αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των δύο σφαιρών μετά την κρούση.

β. Να υπολογίσετε τις μεταβολές ορμής των δύο σωμάτων.

γ. Αν η επαφή των δύο σωμάτων διαρκεί $dt=10^{-3}\text{s}$, να υπολογίσετε το μέτρο της μέσης τιμής της δύναμης που άσκησε το ένα σώμα στο άλλο;

δ. Να υπολογίσετε το ποσοστό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της κάθε σφαίρας

$$\alpha. V_1=-5\text{m/s}, V_2=1\text{m/s}, \beta. \Delta p_1=-8\text{kgm/s}, \Delta p_2=8\text{kgm/s}, \gamma. |F|=8 \cdot 10^3\text{N}, \delta. 177,8\%, -88,9\%$$

Γ1.3 Μια σφαίρα, A, μάζας $m_1=1\text{kg}$ κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα xx' με ταχύτητα μέτρου $v_1=5\text{m/s}$ και συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με άλλη σφαίρα, B που έχει μάζα $m_2=4\text{kg}$. Να υπολογίσετε τις ταχύτητες των σφαιρών μετά την κρούση, αν η σφαίρα, B, πριν την κρούση:

α. Είναι ακίνητη.

β. Κινείται στην ίδια κατεύθυνση με την A με ταχύτητα μέτρου $v_2=2\text{m/s}$.

γ. Κινείται σε αντίθετη κατεύθυνση από την A με ταχύτητα μέτρου $v_2=2\text{m/s}$.

$$\alpha. -3\text{m/s}, 2\text{m/s } \beta. 0, 2\text{m/s}, 3, 2\text{m/s}, \gamma. -6, 2\text{m/s}, 0, 8\text{m/s}$$

Γ1.4 Σφαίρα μάζας $m_1=4\text{kg}$ κινείται με σταθερή ταχύτητα $v_1=10\text{m/s}$ κατά τη θετική φορά του άξονα $x'Ox$ και συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με άλλη σφαίρα μάζας $m_2=1\text{kg}$, που κινείται στην ίδια ευθεία με ταχύτητα $v_2=-30\text{m/s}$ Να υπολογιστούν:

α. Οι ταχύτητες των σφαιρών μετά την κρούση.

β. Οι μεταβολές της ορμής των σφαιρών μετά την κρούση.

γ. Η απόσταση που θα απέχουν 1s μετά την κρούση.

$$\alpha. -6\text{m/s και } 34\text{m/s}, \beta. -64\text{kgm/s και } 64\text{kgm/s}, \gamma. 40\text{m}$$

!Γ1.5 Μια σφαίρα Σ_1 , μάζας $m_1=3\text{kg}$ κινείται με ταχύτητα μέτρου $v_1=1\text{m/s}$ και συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με άλλη ακίνητη σφαίρα Σ_2 , μάζας m_2 . Μετά την κρούση η σφαίρα Σ_2 κινείται με ταχύτητα $V_2=1,2\text{m/s}$. Να υπολογιστούν:

α. Η μάζα m_2 της σφαίρας Σ_2

β. Η ταχύτητα της σφαίρας, Σ_1 μετά την κρούση.

γ. Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας της σφαίρας Σ_1 που μεταβιβάστηκε στη σφαίρα Σ_2 .

δ. Αν υποθέσουμε ότι τη στιγμή της μέγιστης παροδικής ελαστικής παραμόρφωσης των δύο σφαιρών αυτές έχουν κοινή ταχύτητα, πόσο είναι η μέγιστη δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης;

$$\alpha. m_2=2\text{kg}, \beta. V_1=0,2\text{m/s}, \gamma. 96\%, \delta. U=0,6\text{J}$$

Γ1.6 Δύο σφαίρες με μάζες $m_1=2\text{kg}$ και $m_2=8\text{kg}$ κινούνται με ταχύτητες μέτρου v_1 και v_2 αντίστοιχα κατά την ίδια θετική φορά του άξονα $x'Ox$ και συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Μετά τη κρούση κινούνται με ταχύτητες αλγεβρικής τιμής $V_1=8\text{m/s}$ και $V_2=28\text{m/s}$ αντιστοίχως. Να υπολογιστούν:

α. Οι ταχύτητες των σφαιρών πριν την κρούση.

β. Η μεταβολή της ορμής της κάθε σφαίρας.

γ. Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας της κάθε σφαίρας.

$$\alpha. 40\text{m/s}, 20\text{m/s}, \beta. -64\text{kgm/s}, 64\text{kgm/s}, \gamma. -1536\text{J}, 1536\text{J}$$

Γ1.7 Μια σφαίρα μάζας $m_1=1\text{kg}$ συγκρούεται ελαστικά και μετωπικά με άλλη ακίνητη σφαίρα μάζας m_2 . Μετά την κρούση οι σφαίρες κινούνται μεταφορικά με ταχύτητες ίδιου μέτρου και αντίθετης κατεύθυνσης.

α. Να υπολογίσετε τη μάζα m_2 .

β. Να υπολογίσετε το ποσοστό της κινητικής ενέργειας της m_1 που μεταβιβάστηκε στη m_2 .

γ. Μετά την κρούση οι δύο σφαίρες κινούνται χωρίς τριβές και ανεβαίνουν σε κεκλιμένα επίπεδα κατά μέγιστα ύψη h_1 και h_2 από το οριζόντιο επίπεδο. Να βρεθεί η σχέση των h_1, h_2 .

$$\alpha. m_2=3\text{kg}, \beta. 75\%, \gamma. h_1=h_2$$

Γ1.8 Σφαίρα A, μάζας $m_1=2\text{kg}$ που κινείται με ταχύτητα μέτρου v_1 συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με άλλη αρχικά ακίνητη σφαίρα B, μάζας m_2 . Μετά την κρούση οι σφαίρες κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις με ταχύτητες ίσου μέτρου, 1m/s . Να υπολογιστούν:

α. Η ταχύτητα v_1 .

β. Η μάζα m_2 της σφαίρας, B.

γ. Το μέτρο της μεταβολής ορμής της κάθε σφαίρας μετά την κρούση.

δ. Το ποσοστό $\lambda\%$ της κινητικής ενέργειας της σφαίρας A που μεταβιβάστηκε στη σφαίρα B κατά την κρούση.

$$\alpha. v_1=2\text{m/s}, \beta. m_2=6\text{kg}, \gamma. |\Delta p|=6\text{kgm/s}, \delta. \lambda\%=75\%$$

Γ1.9 Μικρή σφαίρα μάζας $m_1=2\text{kg}$ κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο και κατά μήκος του άξονα $x'Ox$ με $v_1=18\text{m/s}$ και συγκρούεται μετωπικά ελαστικά με άλλη σφαίρα $m_2=1\text{kg}$ που κινείται στον ίδιο άξονα, αλλά με αντίθετη φορά και με ταχύτητα μέτρου v_2 . Η αλγεβρική τιμή της ορμής του συστήματος των δύο σφαιρών μετά την κρούση είναι 12kgm/s . Να υπολογιστούν:

α. Το μέτρο της ταχύτητας v_2 πριν την κρούση.

β. Οι ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση.

γ. Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας της σφαίρας m_2 λόγω της κρούσης.

$$\alpha. 24\text{m/s}, \beta. -10\text{m/s}, 32\text{m/s}, \gamma. 224\text{J}$$

•**Γ1.10** Δύο σώματα με μάζες $m_1=10\text{kg}$ και m_2 κινούνται σε λείο οριζόντιο επίπεδο και κατά μήκος του ίδιου άξονα $x'Ox$. Η ταχύτητα της m_1 είναι $v_1=6\text{m/s}$, ενώ της m_2 είναι v_2 αλλά με αντίθετη κατεύθυνση. Τα δύο σώματα συγκρούονται μετωπικά ελαστικά και μετά την κρούση ανταλλάσσουν τις ορμές τους. Μετά την κρούση το μέτρο της ταχύτητας του σώματος m_2 γίνεται $V_2=4\text{m/s}$. Να υπολογιστούν:

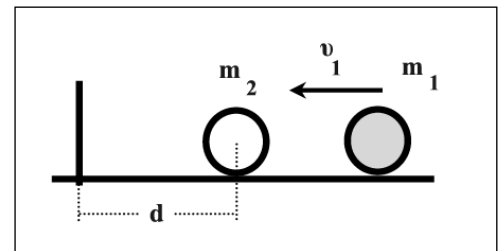
α. Η μάζα m_2 .

β. Η ταχύτητα v_2 .

γ. Η μεταβολή της ορμής του σώματος m_2 .

α. 15kg , β. -4m/s , γ. 120kgm/s

Γ1.11 Σφαίρα Σ_1 , μάζας m_1 καθώς κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα v συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με άλλη ακίνητη σφαίρα Σ_2 , μάζας m_2 . Το σημείο που γίνεται η κρούση απέχει από ακλόνητο και κατακόρυφο τοίχο απόσταση d . Μετά την πρώτη κρούση η Σ_2 συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με τον τοίχο, ανακλάται και συναντάει πάλι τη σφαίρα Σ_1 σε θέση που απέχει απόσταση $2d$ από τον τοίχο. Να υπολογιστούν:

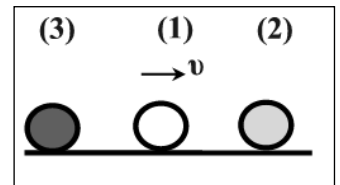


α. Ο λόγος των μαζών m_1/m_2 .

β. Ο λόγος των ταχυτήτων τους μετά και τη δεύτερη κρούση.

α. $m_1/m_2=3/5$, β. $V_1'/V_2'=7/3$

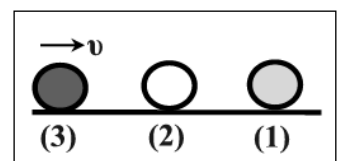
Γ1.12 Η σφαίρα (1) βρίσκεται μεταξύ των (2) και (3). Οι σχέσεις των μαζών των τριών σφαιρών είναι $m_2=m_3=3m_1$. Δίνουμε στη σφαίρα A ταχύτητα $v=4\text{m/s}$ προς τα δεξιά και όλες οι κρούσεις που γίνονται θεωρούνται μετωπικές και ελαστικές. Οι κινήσεις των σφαιρών είναι μεταφορικές πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο.



Να υπολογιστούν οι ταχύτητες των σφαιρών όταν ολοκληρωθούν οι κρούσεις.

$V_{1,\tau}=1\text{m/s}$, $V_{2,\tau}=2\text{m/s}$, $V_{3,\tau}=-1\text{m/s}$

•**Γ1.13** Δύο σφαίρες (1) και (2) ίσου όγκου με μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα ηρεμούν σε πολύ μικρή απόσταση μεταξύ τους πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Μια τρίτη σφαίρα, (3), ίσου όγκου με τις προηγούμενες και με μάζα m_3 , κινείται με ταχύτητα μέτρου $v=3\text{m/s}$, κατά μήκος της ευθείας που περνάει από τα κέντρα των δύο σφαιρών, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Να υπολογιστούν οι τελικές ταχύτητες των σφαιρών και ο αριθμός των ελαστικών κρούσεων που θα γίνουν, αν οι σχέσεις των μαζών των τριών σφαιρών είναι:

α. $m_1=m_2=m_3$

β. $m_2=m_3=2m_1$

γ. $m_2=m_3=\frac{1}{2}m_1$

α. 2, $V_3=0$, $V_2=0$, $v_1=3\text{m/s}$, β. 2, $V_3=0$, $V_2=1\text{m/s}$, $V_1=4\text{m/s}$, γ. 3, $V_1=2\text{m/s}$, $V_2=0$, $V_3=-1\text{m/s}$

Γ1.14 Βλήμα μάζας $m=1\text{kg}$ που κινείται οριζόντια με ταχύτητα $v_1=10\text{m/s}$ σφηνώνεται σε ένα ξύλινο σώμα μάζας $M=4\text{kg}$ που είναι ακίνητο πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Να υπολογιστούν:

- α. Η ταχύτητα του συσσωματώματος.
- β. Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος.
- γ. Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του βλήματος.
- δ. Το ποσοστό, %, της κινητικής ενέργειας του βλήματος που έγινε θερμότητα λόγω πλαστικής κρούσης.
- ε. Το ποσοστό, %, μεταβολής της κινητικής ενέργειας του βλήματος.

α. 2m/s , β. -40J , γ. -48J , δ. 80% , ε. -96%

! Γ1.15 Βλήμα μάζας $m_1=6\text{kg}$ σφηνώνεται με ταχύτητα v_1 σε σώμα μάζας $m_2=4\text{kg}$ που αρχικά ήταν ακίνητο. Μετά την κρούση παρατηρείται απώλεια μηχανικής ενέργειας για το σύστημα ίση με $E=480\text{J}$.

- α. Να υπολογιστεί το μέτρο της ταχύτητας v_1 .
- β. Να υπολογιστεί το ποσοστό, %, της αρχικής κινητικής ενέργειας του βλήματος που παρέμεινε ως κινητική ενέργεια στο συσσωμάτωμα.
- γ. Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα ολισθαίνει στο οριζόντιο επίπεδο και λόγω τριβών διανύει απόσταση $s=12\text{m}$ και σταματάει. Να υπολογιστεί ο συντελεστής τριβής, μ . Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.
- δ. Να υπολογιστεί η συνολική θερμότητα που εκλύθηκε.

α. 20m/s , β. 60% , δ. $\mu=0,6$, ε. 1200J

Γ1.16 Σώμα μάζας $m=1\text{kg}$, ταχύτητας μέτρου 3m/s συγκρούεται μετωπικά και πλαστικά με άλλο σώμα ίσης μάζας ταχύτητας μέτρου 1m/s . πάνω σε οριζόντιο επίπεδο.

A. Να υπολογιστεί το, %, ποσοστό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συστήματος, όταν τα σώματα κινούνται:

A₁. Με την ίδια φορά.

A₂. Με αντίθετες φορές.

B. Έστω ότι τα δύο σώματα κινούνται κατά την ίδια φορά και το συσσωμάτωμα μετά την κρούση συναντά οριζόντιο ελατήριο το οποίο και συσπείρωνει κατά μέγιστη συσπείρωση $x=0,2\text{m}$, χωρίς άλλες απώλειες ενέργειας. Πόση είναι η σταθερά, k , του ελατηρίου;

A. $-20\%, -80\%$, B. $k=200\text{N/m}$

! Γ1.17 Δύο σφαίρες με μάζες $m_1=2\text{kg}$ και $m_2=4\text{kg}$ κινούνται πάνω στην ίδια ευθεία με αντίθετες φορές και συγκρούονται μετωπικά και ανελαστικά με ταχύτητες μέτρου $v_1=40\text{m/s}$ και $v_2=10\text{m/s}$ αντιστοίχως. Αν μετά την κρούση η σφαίρα m_1 έχει μηδενική ταχύτητα να υπολογιστούν:

- α. Η ταχύτητα της m_2 μετά την κρούση.
- β. Η απώλεια της κινητικής ενέργειας του συστήματος κατά την κρούση.
- γ. Το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος που μετατράπηκε σε θερμότητα κατά την κρούση.

α. 10m/s , β. 1600J , γ. 89%

Γ1.18 Κατά μήκος του άξονα $x'Ox$ κινούνται δύο σώματα A και B με $m_1=2\text{kg}$, $v_1=10\text{m/s}$ και $m_2=3\text{kg}$ με $v_2=-3\text{m/s}$, αντιστοίχως. Τα δύο σώματα συγκρούονται μετωπικά χωρίς να δημιουργείται συσσωμάτωμα. Η ορμή του σώματος B μετά την κρούση είναι αντίθετη με την ορμή που είχε το ίδιο σώμα λίγο πριν την κρούση. Να υπολογιστούν:

- α. Η ταχύτητα του σώματος, A, μετά την κρούση.

β. Το ποσοστό, %, της αρχικής μηχανικής ενέργειας του συστήματος που παρέμεινε στο σύστημα ως μηχανική ενέργεια.

γ. Το μέτρο της μέσης τιμής της δύναμης που ασκήθηκε μεταξύ των σφαιρών κατά την κρούση, αν η επαφή τους διήρκεσε $dt=0,02s$:

α. $1m/s$, β. $12,78\%$, γ. $F/900N$

Γ1.19 Σώμα μάζας $m_1=2kg$ κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα μέτρου $v_1=8m/s$ και συγκρούεται μετωπικά με ακίνητο σώμα μάζας $m_2=6kg$. Η μεταβολή ορμής του κάθε σώματος λόγω της κρούσης έχει μέτρο $18kgm/s$. Να υπολογιστούν:

α. Το μέτρο της ταχύτητας του κάθε σώματος μετά την κρούση.

β. Η απώλεια της κινητικής ενέργειας του συστήματος λόγω κρούσης.

α. $1m/s$, $3m/s$, β. $36J$

Γ1.20 Σώμα μάζας m_2 κινείται με ταχύτητα μέτρου $v_2=2v$ πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και συγκρούεται με άλλο σώμα μάζας m_1 που προπορεύεται με ταχύτητα $v_1=v$, ίδιας κατεύθυνσης. Τα σώματα συγκρούονται μετωπικά και πλαστικά και διαπιστώνουμε ότι η ταχύτητα του συσσωματώματος είναι κατά 20% μεγαλύτερη της v . Να υπολογιστούν:

α. Ο λόγος των μαζών, $\lambda=m_1/m_2$.

β. Το ποσοστό, %, της κινητικής ενέργειας του συστήματος που έγινε θερμότητα εξ αιτίας της κρούσης.

γ. Δίνονται ότι $m_2=1kg$ και $v=2m/s$. Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα ανεβαίνει κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης ϕ με το οποίο παρουσιάζει συντελεστή τριβής $\mu=0,5$. Να υπολογίσετε το διάστημα που διανύει πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο μέχρι να σταματήσει στιγμιαία. Δίνονται $\eta\mu\phi=0,6$ $\sigma\upsilon\nu\phi=0,8$ και $g=10m/s^2$

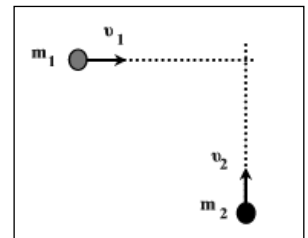
α. $\lambda=4$, β. 10% , γ. $s=0,288m$

Γ1.21 Δυο σφαίρες με μάζες $m_1=1kg$ και $m_2=2kg$ κινούνται σε λείο οριζόντιο επίπεδο σε ευθύγραμμες τροχιές που σχηματίζουν γωνία $\phi=90^\circ$ και τη στιγμή που συγκρούονται πλαστικά έχουν ταχύτητες $v_1=3m/s$ και $v_2=1,5m/s$ αντιστοίχως.

α. Να βρείτε την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

β. Να βρείτε το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του συστήματος που έγινε θερμότητα.

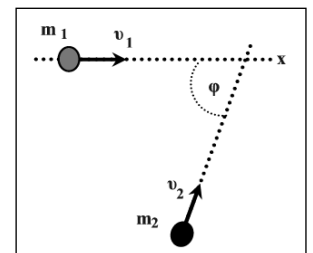
γ. Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο και συναντά το άκρο ελατηρίου σταθεράς k με την ταχύτητα V . Αν η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου είναι $x=0,2m$ και ο συντελεστής τριβής $\mu=0,2$ να υπολογίσετε τη σταθερά k του ελατηρίου.



α. $V=\sqrt{2}m/s$, $\theta=45^\circ$, β. 55% , γ. $k=90N/m$

Γ1.22 Δυο σφαίρες με μάζες $m_1=1kg$ και $m_2=2kg$ κινούνται σε λείο οριζόντιο επίπεδο σε ευθύγραμμες τροχιές που σχηματίζουν γωνία $\phi=60^\circ$ και τη στιγμή που συγκρούονται πλαστικά έχουν ταχύτητες $v_1=3m/s$ και $v_2=1,5m/s$ αντιστοίχως. Να βρείτε την ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

$V=\sqrt{3}m/s$, $\theta=30^\circ$

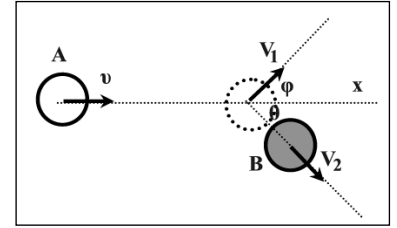


Γ1.23 Πάνω στο οριζόντιο τραπέζι του μπιλιάρδου οι σφαίρες έχουν ίδια μάζα και μπορούν να κινούνται χωρίς τριβές. Η άσπρη μπίλια, A, συγκρούεται ελαστικά αλλά μη μετωπικά με ταχύτητα $v=20\text{m/s}$ με την μαύρη μπίλια, B, που αρχικά ήταν ακίνητη.

α. Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζουν οι φορείς των ταχυτήτων των σφαιρών V_1 και V_2 μετά την κρούση.

β. Αν ο φορέας της V_1 σχηματίζει με τον άξονα x γωνία $\varphi=30^\circ$ να υπολογιστούν οι ταχύτητες V_1 και V_2 .

γ. Ποιο ποσοστό της κινητικής ενέργειας της A μεταβιβάστηκε στη σφαίρα B;

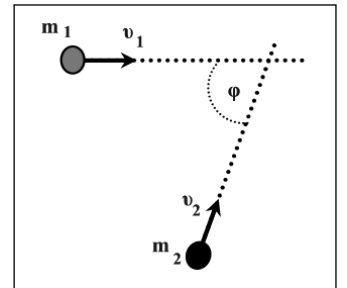


α. $\theta=90^\circ$, β. $V_1=10\sqrt{3}\text{m/s}$, $V_2=10\text{m/s}$, γ. 25%

Γ1.24 Δύο σφαίρες με μάζες, m_1 , m_2 με $m_1=m_2$ που κινούνται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο συγκρούονται πλάγια χωρίς να δημιουργείται συσσωμάτωμα. Οι σφαίρες πριν την κρούση κινούνται με ταχύτητες $v_1=10\text{m/s}$, και $v_2=20\text{m/s}$ και οι φορείς τους σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία $\varphi=30^\circ$. Μετά την κρούση οι ταχύτητές τους έχουν μέτρα $V_1=10\sqrt{3}\text{m/s}$ και $V_2=10\sqrt{2}\text{m/s}$ αντιστοίχως.

α. Να εξεταστεί, αν η κρούση είναι ελαστική ή ανελαστική.

β. Να υπολογιστεί η γωνία θ που σχηματίζουν οι φορείς των ταχυτήτων αμέσως μετά την κρούση.

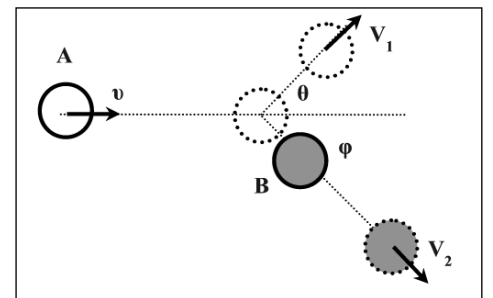


α. Ελαστική, β. $\theta=45^\circ$

Γ1.25 Η σφαίρα A με μάζα $m_1=m$ κινείται πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο με $v=(\sqrt{6}+\sqrt{2})\text{m/s}$ και συγκρούεται έκκεντρα με άλλη ακίνητη σφαίρα μάζας $m_2=2m$. Μετά την κρούση οι σφαίρες κινούνται σε διευθύνσεις που σχηματίζουν γωνιές, $\theta=30^\circ$, και $\varphi=45^\circ$ αντίστοιχα, με την αρχική διεύθυνση της σφαίρας, A.

α. Να υπολογιστούν οι ταχύτητες των σφαιρών μετά την κρούση.

β. Να εξετάσετε αν η κρούση είναι ελαστική ή ανελαστική.

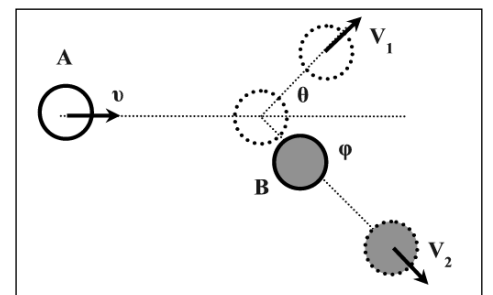


α. $2\sqrt{2}\text{m/s}$, 1m/s , β. Ανελαστική

Γ1.26 Η σφαίρα A, μάζας m_1 συγκρούεται ελαστικά αλλά μη μετωπικά με την αρχικά ακίνητη σφαίρα, B, μάζας m_2 . Η σφαίρα A έχει ταχύτητα $v=10\text{m/s}$, πριν την κρούση. Μετά την κρούση οι σφαίρες κινούνται με ταχύτητες V_1 , V_2 που σχηματίζουν γωνιές $\theta=30^\circ$ και $\varphi=60^\circ$ με την αρχική διεύθυνση της σφαίρας, A.

α. Να υπολογιστεί ο λόγος των μαζών m_1/m_2 .

β. Να υπολογιστούν τα μέτρα των ταχυτήτων μετά την κρούση.

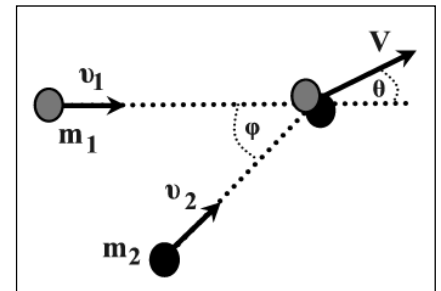


α. $m_1/m_2=1$, β. $V_1=5\sqrt{3}\text{m/s}$, $V_2=5\text{m/s}$

Γ1.27 Οι δύο σφαίρες έχουν ίσες μάζες $m_1=m_2=1\text{kg}$ και κινούνται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ίσες κατά μέτρο ταχύτητες $v_1=v_2=10\text{m/s}$ οι διευθύνσεις των οποίων σχηματίζουν γωνία φ με ημφ=0,6 και συνφ=0,8. Οι σφαίρες συγκρούονται πλαστικά.

α. Να υπολογιστεί η ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση.

β. Να υπολογιστεί το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του συστήματος που διατηρήθηκε ως κινητική στο σύστημα.

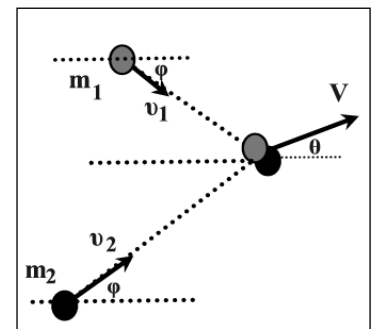


α. $V=\sqrt{90}\text{m/s}$, $\varepsilon\varphi\theta=1/3$, β. 90%

Γ1.28 Οι δύο σφαίρες με μάζες $m_1=m_2=m$ κινούνται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητες $v_1=10\text{m/s}$ και $v_2=20\text{m/s}$ αντιστοίχως με τις κατευθύνσεις που φαίνονται στο σχήμα. Οι σφαίρες συγκρούονται πλαστικά. Δίνονται ημφ=0,6 και συνφ=0,8.

Να υπολογιστεί η ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση.

$V=\sqrt{153}\text{m/s}$, $\varepsilon\varphi\theta=1/4$

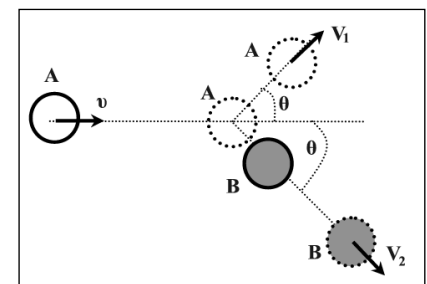


Γ1.29 Η σφαίρα, Α με μάζα $m_1=2\text{kg}$ και ταχύτητα $v=5\sqrt{3}\text{m/s}$ συγκρούεται πλάγια και ελαστικά με αρχικά ακίνητη σφαίρα Β, μάζας m_2 . Μετά την κρούση οι σφαίρες κινούνται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με τον τρόπο που φαίνεται στο σχήμα, με τη γωνία $\theta=30^\circ$. Να υπολογιστούν

α. Οι ταχύτητες των δύο σφαιρών μετά την κρούση.

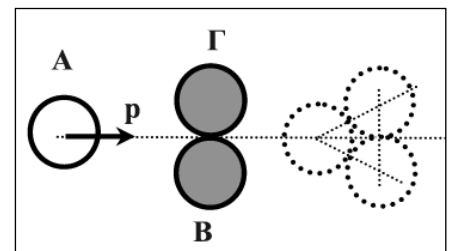
β. Η μάζα της σφαίρας, Β.

α. $V_1=5\text{m/s}$, $V_2=10\text{m/s}$ β. $m_2=1\text{kg}$



Γ1.30 Τρεις όμοιες λείες σφαίρες Α, Β, Γ τοποθετούνται σε οριζόντιο επίπεδο έτσι ώστε οι Β και Γ να εφάπτονται. Βάλουμε την Α με ταχύτητα $v=10\text{m/s}$ έτσι ώστε ο φορέας της να διέρχεται από την κοινή επαπτομένη των άλλων δύο. Η κρούση είναι ελαστική. Να υπολογιστούν οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων των σφαιρών μετά την κρούση

$V=-2\text{m/s}$ και $V_1=V_2=4\sqrt{3}\text{m/s}$

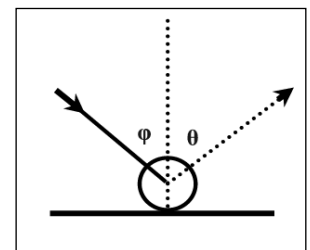


Γ1.31 Μεταλλική σφαίρα μάζας $m=0,5\text{kg}$ συγκρούεται με λείο ακλόνητο οριζόντιο δάπεδο με ταχύτητα $v_1=5\text{m/s}$ και υπό γωνία $\varphi=60^\circ$ ως προς την κατακόρυφο που διέρχεται από το σημείο κρούσης, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Α. Η κρούση θεωρείται χωρίς απώλειες κινητικής ενέργειας και διαρκεί χρόνο, $\Delta t=0,01\text{s}$. Να υπολογιστούν:

Α1. Η ταχύτητα με την οποία ανακλάται η σφαίρα.

Α2. Η μέση τιμή της δύναμης που δέχτηκε η σφαίρα από το δάπεδο, αν αυτή θεωρηθεί κατακόρυφη.

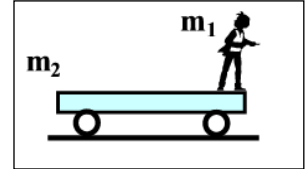


B. Μια άλλη σφαίρα ίδιας μάζας πέφτει με την ίδια ταχύτητα υπό την ίδια γωνία στο ίδιο επίπεδο. Η σφαίρα όμως παραμορφώνεται ελαφρώς με αποτέλεσμα να χάσει το 19% της κινητικής ενέργειας που είχε πριν την κρούση. Να υπολογιστεί η ταχύτητα με την οποία ανακλάται η σφαίρα.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

$$A_1. 5\text{m/s}, 60^\circ, A_2. 255\text{N}, B_1 4,5\text{m/s}, 74^\circ$$

Γ1.32 Βαγονέτο μάζας $m_2=20\text{kg}$ ηρεμεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και έχει πάνω του παιδί μάζας $m_1=30\text{kg}$. Το παιδί πηδάει από το βαγονέτο με ταχύτητα μέτρου $v_1=2\text{m/s}$ σε οριζόντια θετική κατεύθυνση. Η δύναμη που ασκεί στο βαγονέτο καθώς φεύγει έχει μέτρο $F=200\text{N}$.



α. Πόση είναι η ταχύτητα που θα αποκτήσει το βαγονέτο

β. Πόση από την ενέργεια που ξόδεψε το παιδί για να κάνει το άλμα μετατράπηκε σε μηχανική ενέργεια του συστήματος;

γ. Πόση είναι η μεταβολή της ορμής του παιδιού και ποιος ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του βαγονέτου τη στιγμή που το παιδί το εγκαταλείπει ;

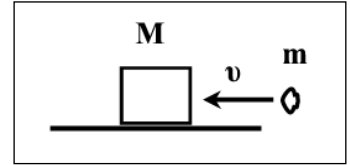
δ. Ποιος είναι ο χρόνος εκτίναξης του παιδιού από το βαγόνι και ποιος ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του βαγονιού αμέσως μετά την εκκίνηση;

$$\alpha. -3\text{m/s}, \beta. 150\text{J}, \gamma. 60\text{kgm/s}, dp/dt = -200\text{kgm/s}^2 \delta. 0,3\text{s}, 600\text{watt}$$

ΘΕΜΑΤΑ Δ

Δ1.1 Ξύλινος κύβος μάζας $M=9\text{kg}$ ηρεμεί πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Βλήμα μάζας $m=1\text{kg}$ που κινείται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου $v=100\text{m/s}$ σφηνώνεται στον κύβο ακαριαία. Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα ολισθαίνει πάνω στο επίπεδο και σταματάει. Μεταξύ κύβου και επιπέδου ο συντελεστής τριβής ολίσθησης είναι $\mu=0,5$. Να υπολογιστούν:

- Η ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση.
 - Το ποσοστό, %, της κινητικής ενέργειας του βλήματος που έγινε θερμότητα λόγω κρούσης.
 - Τη μετατόπιση του συσσωματώματος μέχρι να σταματήσει.
 - Το ποσό της θερμότητας που εκλύθηκε λόγω τριβής με το επίπεδο.
- Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.



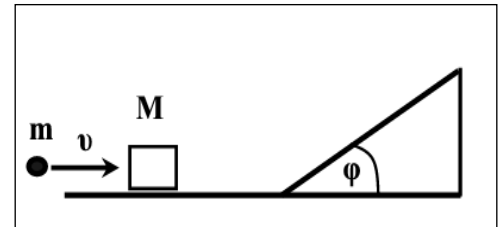
α. 10m/s , β. 90% , γ. 10m , δ. 500J

Δ1.2 Ξύλινος κύβος μάζας $M=2\text{kg}$ ηρεμεί πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Βλήμα μάζας $m=0,2\text{kg}$ κινείται οριζόντια με ταχύτητα $v_0=200\text{m/s}$ και διαπερνάει τον κύβο σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα, $\Delta t=0,01\text{s}$. Όταν βγαίνει από αυτόν έχει ταχύτητα $v_1=100\text{m/s}$, ενώ ο κύβος μετά την κρούση ολισθαίνει πάνω στο οριζόντιο επίπεδο κατά $s=20\text{m}$ και σταματάει λόγω τριβών. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$. Να υπολογιστούν:

- Η απώλεια ενέργειας του συστήματος κύβου – βλήματος, λόγω κρούσης.
- Ο συντελεστής τριβής μεταξύ επιπέδου και κύβου.
- Το μέτρο της μεταβολής ορμής του βλήματος, λόγω κρούσης.
- Το μέτρο της μέσης δύναμης που δέχτηκε ο κύβος από το βλήμα κατά τη διάρκεια της κρούσης.

α. 2900J , β. $0,25$, γ. 20kgm/s , δ. $F=2 \cdot 10^3\text{N}$

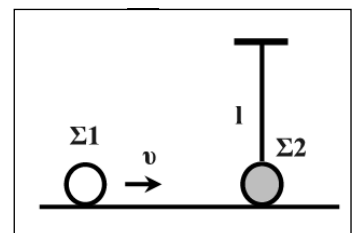
Δ1.3 Μικρή σφαίρα μάζας $m=0,1\text{kg}$ σφηνώνεται με ταχύτητα $v=10\text{m/s}$, σε άλλο σώμα μάζας $M=0,1\text{kg}$, που αρχικά ήταν ακίνητο πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Μετά την κρούση τα δύο σώματα αρχίζουν να ανεβαίνουν ολισθαίνοντας, κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\varphi=30^\circ$. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ σώματος και κεκλιμένου επιπέδου είναι $\mu=\sqrt{3}/2$. Να υπολογιστούν:



- Το μέτρο της μεταβολής της ορμής της σφαίρας
- Η μέγιστη μετατόπιση του συσσωματώματος πάνω στο κεκλιμένο επίπεδο.
- Το ποσοστό, %, της αρχικής κινητικής ενέργειας της σφαίρας, (πριν την κρούση) που έγινε θερμότητα λόγω τριβών στο κεκλιμένο επίπεδο. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

α. $0,5\text{kgm/s}$, β. 1m , γ. 30%

Δ1.4 Σφαίρα, Σ_1 , μάζας $m_1=2\text{kg}$ κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα v και συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με άλλη σφαίρα, Σ_2 , μάζας, $m_2=1\text{kg}$, που κρέμεται από ακλόνητο σημείο με νήμα μήκους $\ell=1,6\text{m}$ και αρχικά ισορροπεί, όπως στο σχήμα. Μετά την ακαριαία κρούση η μέγιστη γωνία απόκλισης του νήματος, ως προς την κατακόρυφο που διέρχεται από το σημείο εξάρτησης του νήματος, είναι 60° . Να υπολογιστούν:



- Η ταχύτητα, v , της σφαίρας, Σ_1 .
- Η ταχύτητα της σφαίρας, Σ_1 , μετά την κρούση.

γ. Η δύναμη του νήματος αμέσως μετά την κρούση

δ. Η τάση του νήματος τη στιγμή που η σφαίρα Σ_2 σταματάει στιγμιαία.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

α. 3m/s , β. 1m/s , γ. 20N , δ. 5N

Δ1.5 Χαλύβδινη σφαίρα, σ , μάζας $m=1\text{kg}$ κρέμεται από ακλόνητο σημείο με τη βοήθεια αβαρούς ράβδου μήκους $L=0,8\text{m}$. Το σύστημα φέρεται σε οριζόντια θέση και αφήνεται ελεύθερο να διαγράψει κυκλική τροχιά. Στο κατώτερο σημείο της τροχιάς της συγκρούεται κεντρικά με ακίνητο κύβο, Σ , μάζας $M=2,5\text{kg}$. Μετά την κρούση ο κύβος ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο και μετατοπίζεται κατά $\Delta x=2\text{m}$ μέχρι να σταματήσει. Μεταξύ κύβου και επιπέδου ο συντελεστής τριβής είναι $\mu=0,1$.

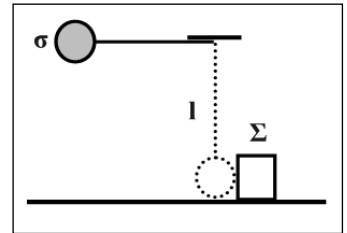
α. Πόση είναι η ταχύτητα του σώματος Σ αμέσως μετά την κρούση;

β. Πόση είναι η ταχύτητα της σφαίρας αμέσως μετά την κρούση;

γ. Ποιο είναι το είδος της κρούσης που έγινε;

δ. Πόση μέγιστη γωνία, ϕ , διαγράφει η αβαρής ράβδος μετά την κρούση;

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.



α. 2m/s , β. -1m/s , γ. Ανελαστική, δ. $\sin\phi=0,9375$

Δ1.6 Κομμάτι ξύλου μάζας $M=1,9\text{kg}$ είναι δεμένο στο ένα άκρο νήματος μήκους $L=0,9\text{m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σε ακλόνητο σημείο. Το ξύλο ισορροπεί με το νήμα κατακόρυφο. Σφαίρα μάζας $m=0,1\text{kg}$ αφήνεται σε σημείο Α μιας λείας καμπύλης και κατεβαίνει κάνοντας μεταφορική κίνηση. Τη στιγμή που συγκρούεται με το ξύλο M , κινείται οριζόντια με ταχύτητα v και σφηνώνεται στο ξύλο. Το σύστημα βλήμα - ξύλο εκτρέπεται, ώστε η μέγιστη απόκλιση του νήματος από την κατακόρυφη θέση να είναι $\phi=60^\circ$. Να υπολογιστούν:

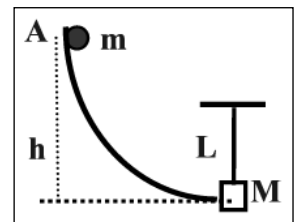
α. Η ταχύτητα, v , της σφαίρας μόλις πριν την κρούση.

β. Το ύψος h από το οποίο αφέθηκε η σφαίρα.

γ. Το ποσοστό, (%), της μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συστήματος κατά την κρούση.

δ. Η δύναμη του νήματος και ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.



α. 60m/s , β. $h=180\text{m}$ γ. -95% , δ. $F=40\text{N}$, $dp/dt=20\text{kgm/s}^2$

•**Δ1.7** Σφαιρικό κομμάτι ξύλου μάζας $M=3\text{kg}$ κρέμεται από ακλόνητο σημείο, με τη βοήθεια αβαρούς νήματος μήκους $L=0,5\text{m}$. Μικρή μεταλλική σφαίρα μάζας $m=1\text{kg}$ βάλλεται οριζόντια με ταχύτητα μέτρου v και συγκρούεται μετωπικά ελαστικά με το M .

α. Πόση πρέπει να είναι η ελάχιστη τιμή της ταχύτητας $v_{\min}$ ώστε το M μετά την κρούση να διαγράψει κατακόρυφο κύκλο ακτίνας L , δηλαδή να κάνει ανακύκλωση.

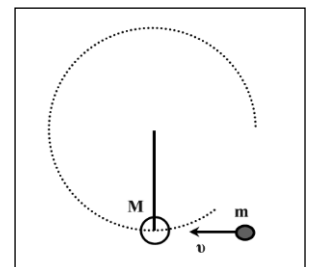
β. Αν η μικρή σφαίρα εκτοξευτεί με την $v_{\min}$ ταχύτητα του (α) ερωτήματος να βρεθούν οι δυνάμεις του νήματος

(i). αμέσως μετά την κρούση και ενώ το νήμα είναι ακόμα κατακόρυφο.

(ii). όταν το νήμα γίνεται οριζόντιο

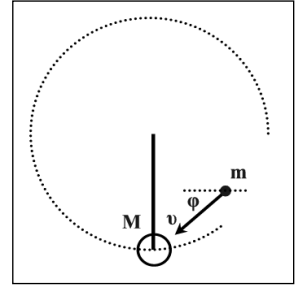
(iii). όταν το νήμα έχει διαγράψει γωνία 120° από την αρχική του θέση.

Δίνεται το $g=10\text{m/s}^2$. Η χρονική διάρκεια της κρούσης να θεωρηθεί αμελητέα.



α. $v_{\min}=10\text{m/s}$, β. $T_1=180\text{N}$, $T_2=90\text{N}$, $T_3=45\text{N}$

Δ1.8 Κομμάτι ξύλου μάζας $M=4\text{kg}$ κρέμεται από ακλόνητο σημείο με τη βοήθεια λεπτής, άκαμπτης, αβαρούς ράβδου, μήκους $L=0,4\text{m}$. Βλήμα μάζας $m=1\text{kg}$ συγκρούεται με το ξύλο με ταχύτητα, v , που σχηματίζει γωνία $\varphi=60^\circ$ με την οριζόντια διεύθυνση, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η κρούση είναι πλαστική και θεωρείται ακαριαία.



Να υπολογιστούν:

α. Η ταχύτητα, v , του βλήματος έτσι ώστε το συσσωμάτωμα να διαγράψει μέγιστη γωνία 90° μετά την κρούση.

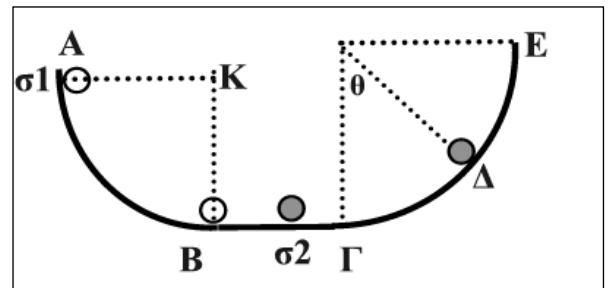
β. Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του βλήματος που έγινε θερμότητα, λόγω της πλαστικής κρούσης

γ. Η ελάχιστη ταχύτητα, $v_{\min}$, του βλήματος, ώστε το συσσωμάτωμα μετά την κρούση να κάνει ανακύκλωση, αν η κρούση γίνεται και πάλι με τις ίδιες συνθήκες. Δίνεται το $g=10\text{m/s}^2$.

δ. Το μέτρο μεταβολής της ορμής του βλήματος κατά την κρούση αν η ταχύτητα αυτού πριν την κρούση είναι $v=40\text{m/s}$.

α. $v=20\sqrt{2}\text{m/s}$, β. 95% γ. $v_{\min}=40\text{m/s}$, $|\Delta p|=\sqrt{1456}\text{kgm/s}$

•**Δ1.9** Η μικρή σφαίρα σ_1 μάζας $m_1=0,2\text{kg}$ αφήνεται χωρίς αρχική ταχύτητα από την κορυφή Α του τεταρτοκυκλίου ΑΒ, ακτίνας $R_1=0,8\text{m}$ να ολισθήσει κατά μήκος αυτού χωρίς τριβές. Να υπολογιστούν:



Α. Η ταχύτητα της σφαίρας όταν περνάει από το σημείο Β.

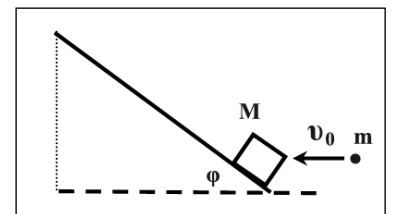
Β. Το μέτρο της δύναμης που δέχεται η σφαίρα από το τεταρτοκύκλιο στο σημείο Β.

Στη συνέχεια η σ_1 μπαίνει σε λείο οριζόντιο επίπεδο ΒΓ όπου και συγκρούεται μετωπικά με άλλη όμοια σφαίρα σ_2 μάζας m_2 . Μετά την κρούση η σφαίρα σ_1 ακινητοποιείται ακαριαία και η σφαίρα σ_2 μπαίνει σε τεταρτοκύκλιο ΓΕ ακτίνας $R=0,9\text{m}$. Σ' αυτό διανύει τόξο ΓΔ γωνίας $\theta=60^\circ$ μέχρι να σταματήσει στιγμιαία. Να υπολογιστεί η ταχύτητα της σφαίρας σ_2 μετά την κρούση και η μάζα της m_2 .

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$

Α. $v_1=4\text{m/s}$, Β. $F=6\text{N}$. Γ. $V_2=3\text{m/s}$, $m_2=4/15\text{kg}$

•**Δ1.10** Κύβος μάζας $M=4,8\text{kg}$ στηρίζεται σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης $\varphi=30^\circ$. Βλήμα μάζας $m=0,2\text{kg}$, κινούμενο οριζόντια με ταχύτητα $v_0=200\sqrt{3}\text{m/s}$, σφηνώνεται στον κύβο ακαριαία.



α. Πόση είναι η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση;

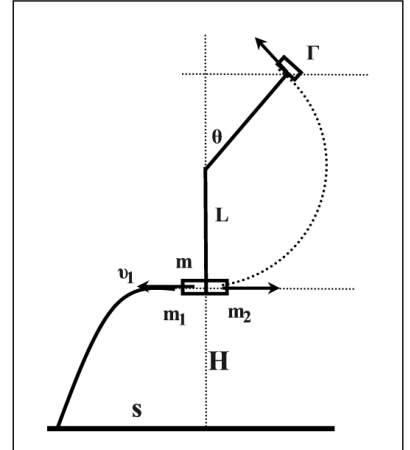
β. Πόσο θα μετατοπιστεί το συσσωμάτωμα που σχηματίζεται, αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ κύβου και κεκλιμένου επιπέδου είναι $\mu=\sqrt{3}/3$.

γ. Πόσο χρόνο χρειάζεται για να σταματήσει για πρώτη φορά;

δ. Θα ολισθήσει και πάλι το συσσωμάτωμα προς τα κάτω μετά τον πρώτο μηδενισμό της ταχύτητας; Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

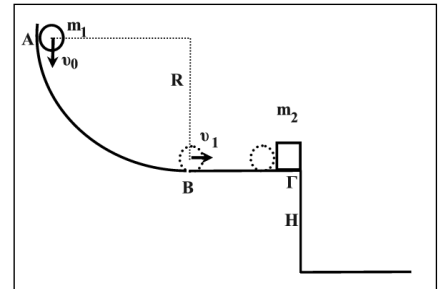
α. 12m/s , β. $s=7,2\text{m}$, γ. $t=1,2\text{s}$

- Δ1.11** Νήμα μήκους $L=2\text{m}$ κρέμεται από ακλόνητο σημείο και φέρει στο κάτω άκρο του ορθογώνιο πρίσμα που ισορροπεί. Λόγω εσωτερικού εκρηκτικού μηχανισμού το πρίσμα σπάει σε δύο τμήματα. Το ένα με μάζα $m_1=6\text{kg}$ που εκτοξεύεται οριζόντια προς τα αριστερά και πέφτει στο έδαφος σε απόσταση $s=6\text{m}$. Το άλλο μάζας $m_2=3\text{kg}$ μένει συνδεδεμένο στο νήμα. Το πρίσμα απέχει από το έδαφος απόσταση $H=1,8\text{m}$. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$
- Να βρεθεί η ταχύτητα του m_1 αμέσως μετά τη διάσπαση.
 - Να βρεθεί η ταχύτητα και η κεντρομόλος επιτάχυνση του m_2 αμέσως μετά τη διάσπαση.
 - Να βρεθεί το συνθ της γωνία θ που θα σχηματίζει το νήμα με την κατακόρυφο σε κείνη τη θέση, Γ , που η ταχύτητα του m_2 θα έχει μέτρο 18m/s .
 - Να βρεθεί η τάση του νήματος στη θέση Γ .



α. $v_1=10\text{m/s}$, β. 20m/s , 200m/s^2 , γ. $\sin\theta=0,9$, δ. $F=459\text{N}$

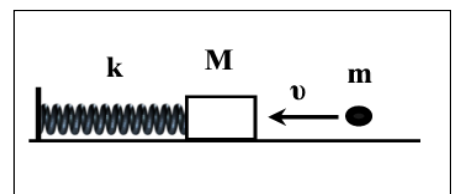
- Δ1.12** Σώμα Σ_1 μάζας $m_1=2\text{kg}$ βάλλεται από το σημείο Α ενός λείου τεταρτοκυκλίου ακτίνας R προς τα κάτω με αρχική ταχύτητα $v_0=19\text{m/s}$. Το σώμα αφού διαγράψει το τόξο των 90° φτάνει στο σημείο Β με ταχύτητα μέτρου $v_1=20\text{m/s}$. Κατόπιν το σώμα Σ_1 κινούμενο στο λείο οριζόντιο επίπεδο ϵ_1 συγκρούεται με το σώμα Σ_2 μάζας $m_2=1\text{kg}$ που ηρεμεί στο σημείο Γ , με αποτέλεσμα τα δύο σώματα να εγκαταλείψουν το επίπεδο και να πέσουν σε ένα άλλο οριζόντιο επίπεδο ϵ_2 που βρίσκεται χαμηλότερα κατά $H=20\text{m}$. Το σώμα Σ_1 προσκρούει στο επίπεδο ϵ_2 σε απόσταση 20m από την κατακόρυφο που περνάει από το σημείο Γ . Να υπολογιστούν:
- Η ακτίνα R του τεταρτοκυκλίου.
 - Οι ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση.
 - Η απώλεια της μηχανικής ενέργειας του συστήματος των σωμάτων κατά την κρούση.
 - Η ορμή του σώματος Σ_2 λίγο πριν συγκρουστεί με το επίπεδο ϵ_2 .
 - Η απόσταση μεταξύ των δύο σωμάτων όταν βρεθούν στο επίπεδο ϵ_2 .



Δίνονται: $g=10\text{m/s}^2$, $\sqrt{2}=1,4$, $\epsilon\phi 45^\circ = 1$.

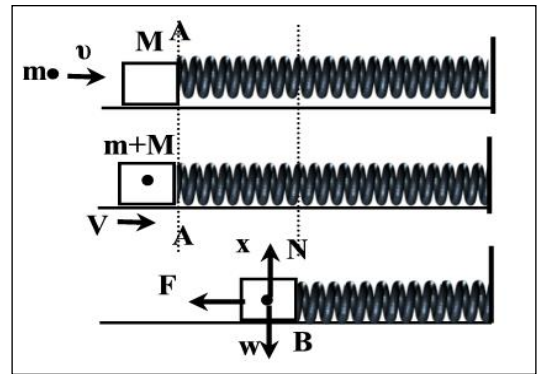
α. $R=1,95\text{m}$, β. $V_1=10\text{m/s}$, $V_2=20\text{m/s}$, γ. $\Delta E=100\text{J}$, δ. $p_2=20\sqrt{2}\text{kgm/s}$, $\phi=45^\circ$, ε. $\Delta x=20\text{m}$

- Δ1.13** Οριζόντιο ιδανικό ελατήριο φέρει συνδεδεμένο στο ελεύθερο άκρο του σώμα μάζας $M=4,8\text{kg}$, ενώ το άλλο άκρο του στερεώνεται σε ακλόνητο σημείο. Αρχικά το ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος και το σώμα ισορροπεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Βλήμα μάζας $m=0,2\text{kg}$ σφηνώνεται στο σώμα με οριζόντια ταχύτητα $v=100\text{m/s}$ με αποτέλεσμα το ελατήριο, μετά την κρούση να υποστεί μέγιστη συσπίρωση κατά $x=0,2\text{m}$. Να υπολογιστούν:
- Η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.
 - Η σταθερά του ελατηρίου.
 - Το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας που έγινε θερμότητα κατά την κρούση.
 - Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του συσσωματώματος τη στιγμή που το ελατήριο βρίσκεται στη μέγιστη συσπίρωσή του.



α. 4m/s , β. $k=2\cdot 10^3\text{N/m}$, γ. 96% , δ. 400kgm/s^2

Δ1.14 Βλήμα μάζας $m=1\text{kg}$ συγκρούεται με ταχύτητα $v=12\text{m/s}$ με το σώμα μάζας $M=3\text{kg}$ που είναι στερεωμένο στο ελεύθερο άκρο ελατηρίου σταθεράς k . Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο με τον τρόπο που φαίνεται στο σχήμα. Οι τριβές θεωρούνται αμελητέες και το ελατήριο βρίσκεται αρχικά στο φυσικό του μήκος. Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα προκαλεί στο ελατήριο μέγιστη συσπίρωση $x=0,6\text{m}$. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.
Να υπολογιστούν



α. Η ταχύτητα V του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση

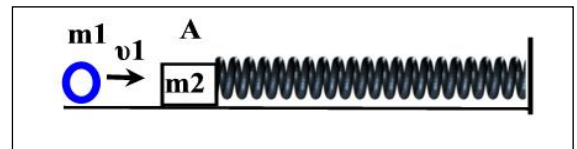
β. η σταθερά k του ελατηρίου.

γ. Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του βλήματος που έγινε θερμότητα στην κρούση

δ. Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του βλήματος που έγινε δυναμική ενέργεια ελατηρίου κατά τη μέγιστη συσπίρωση αυτού.

(α) $V=3\text{m/s}$ (β) $k=100\text{N/m}$ (γ) 75%, (δ) 25%

Δ1.15 Η σφαίρα μάζας $m_1=2\text{kg}$ κινείται με ταχύτητα $v_1=5\text{m/s}$ και συγκρούεται μετωπικά ελαστικά με σώμα μάζας $m_2=3\text{kg}$ που είναι δεμένο στο άκρο ελατηρίου σταθεράς $k=300\text{N/m}$ και ισορροπεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Να υπολογιστούν



α. Οι ταχύτητες των σωμάτων αμέσως μετά την κρούση

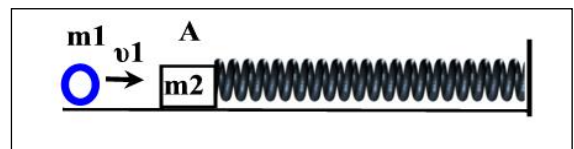
β. Η μέγιστη συσπίρωση του ελατηρίου.

γ. Το ποσοστό της κινητικής ενέργειας της σφαίρας που μεταβιβάστηκε στο σώμα m_2 κατά την κρούση

δ. Το μέτρο της μεταβολή της ορμής της σφαίρας.

(α) $V_1=-1\text{m/s}$ $V_2=4\text{m/s}$ (β) $x=0,4\text{m}$ (γ) 96%, (δ) 12kgm/s

Δ1.16 Η σφαίρα μάζας $m_1=1\text{kg}$ κινείται με ταχύτητα $v_1=7\text{m/s}$ και συγκρούεται μετωπικά ελαστικά με σώμα μάζας $m_2=6\text{kg}$ που είναι δεμένο στο άκρο ελατηρίου σταθεράς $k=100\text{N/m}$ και ισορροπεί πάνω σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει τριβές με συντελεστή τριβής μ . Μετά την κρούση το ελατήριο παρουσιάζει μέγιστη συσπίρωση κατά $x=0,2\text{m}$. Να υπολογιστούν



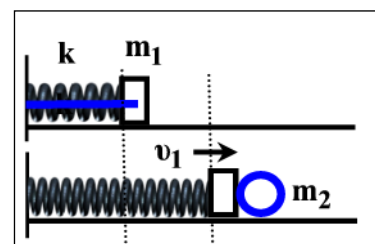
α. Οι ταχύτητες των σωμάτων αμέσως μετά την κρούση

β. Ο συντελεστής τριβής μ .

γ. Το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας της σφαίρας που έγινε θερμότητα λόγω τριβών

(α) $V_1=-5\text{m/s}$ $V_2=2\text{m/s}$, (β) $\mu=5/6$ (γ) $=20/49$

Δ1.17 Σώμα μάζας $m_1=2\text{kg}$ στερεώνεται στο ελεύθερο άκρο οριζοντίου ελατηρίου, σταθεράς $k=200\text{N/m}$ το άλλο άκρο του οποίου στηρίζεται σε ακλόνητο σημείο. Συσπειρώνουμε το ελατήριο κατά $x=0,2\text{m}$ και το δένουμε με νήμα. Το σώμα αρχικά ισορροπεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Κόβουμε το νήμα και το ελατήριο αποσυσπειρώνεται.



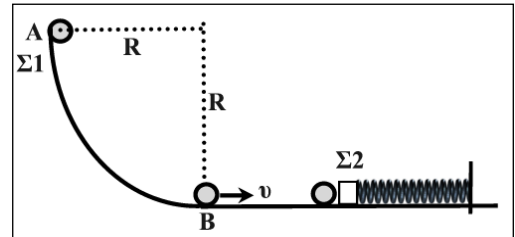
α. Πόση είναι η ταχύτητα του σώματος m_1 τη στιγμή που περνάει από το άκρο του φυσικού μήκους του ελατηρίου;

β. Τη στιγμή που το σώμα φτάνει στο άκρο του φυσικού μήκους του ελατηρίου συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με σφαίρα μάζας $m_2 = 6\text{kg}$ που είναι αρχικά ακίνητη. Πόσο είναι οι ταχύτητες των δύο σωμάτων μετά την κρούση;

γ. Πόσο είναι η νέα μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου μετά την κρούση;

$$(\alpha) v_1 = 2\text{m/s}, (\beta) V_1 = 1\text{m/s}, V_2 = 0,5\text{m/s} (\gamma) x = 0,1\text{m}$$

Δ1.18 Θεωρούμε κατακόρυφο τεταρτοκύκλιο AB, ακτίνας $R = 0,8\text{m}$ που εφάπτεται στο κάτω άκρο του B, με οριζόντιο δάπεδο. Σφαιρικό σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 1\text{kg}$, αφήνεται χωρίς αρχική ταχύτητα να ολισθήσει κατά μήκος του λείου τεταρτοκυκλίου από το άνω άκρο α. Να υπολογιστεί η ταχύτητα του σώματος όταν περνάει από το σημείο B.



β. Στη συνέχεια το σώμα Σ_1 κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο και συναντά το σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 3\text{kg}$ που είναι δεμένο στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς k και συγκρούεται πλαστικά. Το ελατήριο είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο και βρίσκεται στο φυσικό του μήκος. Μετά την κρούση το ελατήριο συσπείρωνεται σε μέγιστη συσπείρωση $x = 0,2\text{m}$. Να υπολογιστεί η σταθερά k του ελατηρίου.

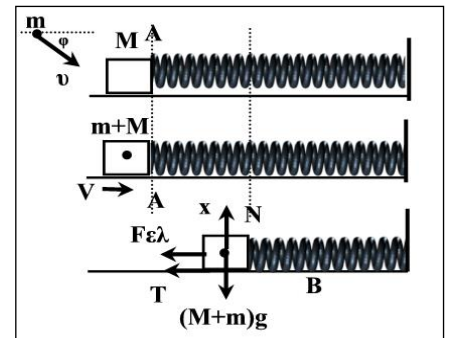
γ. Ποιο ποσοστό της αρχικής μηχανικής ενέργειας του m_1 στο σημείο A γίνεται θερμότητα λόγω πλαστικής κρούσης και ποιο δυναμική ενέργεια ελατηρίου;

δ. Πόση είναι η μέγιστη τιμή της δύναμης του ελατηρίου;

Δίνεται $g = 10\text{m/s}^2$

$$(\alpha) 4\text{m/s}, (\beta) k = 100\text{N/m}, (\gamma) 75\% (\delta) F_{\max} = 20\text{N}$$

Δ1.19 Βλήμα μάζας $m = 1\text{kg}$ συγκρούεται με ταχύτητα $v = 24\text{m/s}$ με το σώμα μάζας $M = 3\text{kg}$ που είναι στερεωμένο στο ελεύθερο άκρο ελατηρίου σταθεράς $k = 100\text{N/m}$. Η ταχύτητα v σχηματίζει γωνία $\varphi = 60^\circ$ με το οριζόντιο επίπεδο. Το άλλο άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο με τον τρόπο που φαίνεται στο σχήμα. Μετά σώματος και επιπέδου υπάρχουν τριβές και το ελατήριο βρίσκεται αρχικά στο φυσικό του μήκος. Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα κινείται κατά x μέχρι να σταματήσει στιγμιαία. Μεταξύ συσσωμάτος και επιπέδου ο συντελεστής τριβής είναι $\mu = 2$. Να υπολογιστούν



α. Η ταχύτητα V του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση και

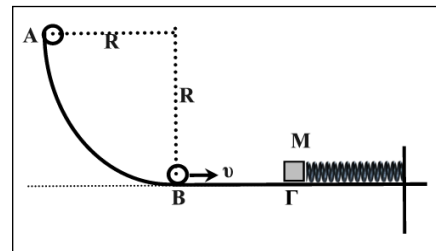
β. η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου.

γ. το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του βλήματος που έγινε θερμότητα λόγω κρούσης

δ. το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του βλήματος που έγινε θερμότητα λόγω τριβών

$$(\alpha) V = 3\text{m/s} (\beta) x = 0,2\text{m} (\gamma) 93,75\% (\delta) \approx 5,5\%$$

Δ1.20 Θεωρούμε κατακόρυφο τεταρτοκύκλιο ΑΒ, ακτίνας $R=0,8\text{m}$ που εφάπτεται στο κάτω άκρο του Β, με οριζόντιο δάπεδο. Σφαιρικό σώμα μάζας $m=1\text{kg}$, αφήνεται χωρίς αρχική ταχύτητα να ολισθήσει κατά μήκος του λείου τεταρτοκυκλίου από το άνω άκρο Α.



α. Να υπολογιστεί η ταχύτητα του σώματος και ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του όταν περνάει από το σημείο Β.

Στη συνέχεια το σώμα κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο και συναντά το σώμα μάζας $M=1\text{kg}$ που είναι συνδεδεμένο στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς $k=100\text{N/m}$. Το ελατήριο είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο και βρίσκεται στο φυσικό του μήκος. Συγκρούεται με αυτό ελαστικά και μετωπικά και προκαλεί στο ελατήριο μέγιστη συσπίρωση x .

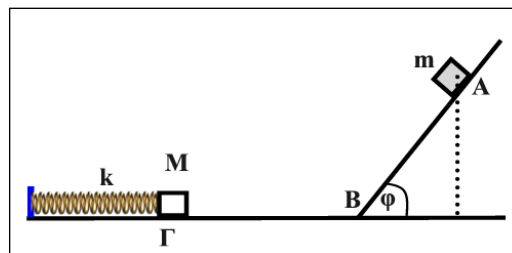
β. Να υπολογιστεί η μέγιστη συσπίρωση του ελατηρίου.

γ. Να υπολογιστεί το ποσοστό της αρχικής ενέργειας του σώματος στο Α που έγινε δυναμική ενέργεια του ελατηρίου.

Ως στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας να θεωρηθεί το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το σημείο Β. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

(α) $v=4\text{m/s}$, $dp/dt=20\text{kgm/s}^2$ (β) $x=0,2\text{m}$ (γ) 100%

Δ1.21 Το σώμα μάζας $m=4\text{kg}$ αφήνεται χωρίς αρχική ταχύτητα από το σημείο Α κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης φ . Το σώμα ολισθαίνει με συντελεστή τριβής $\mu=0,5$ και διανύει απόσταση $s=1\text{m}$ μέχρι να φτάσει στο σημείο Β.



α. Πόση είναι η ταχύτητα στο σημείο Β;

Στη συνέχεια εισέρχεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο και συναντά το σώμα $M=6\text{kg}$ με το οποίο συγκρούεται ελαστικά. Το σώμα Μ είναι δεμένο στο άκρο ελατηρίου σταθεράς $k=600\text{N/m}$.

β. Να υπολογιστούν οι ταχύτητες των δύο σωμάτων μετά την κρούση

γ. Να υπολογιστεί η μέγιστη συσπίρωση του ελατηρίου

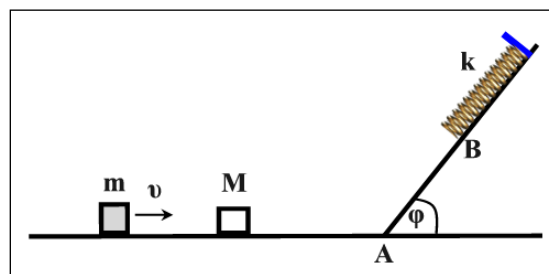
δ. Ποιο ποσοστό της αρχικής ενέργειας του σώματος m στο Α έγινε θερμότητα λόγω τριβών

ε. Ποιο ποσοστό της κινητικής ενέργειας του σώματος m μόλις πριν την κρούση μεταβιβάστηκε στο Μ κατά την κρούση.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$, $\eta\mu\varphi=0,6$ και $\sin\varphi=0,8$

(α) 2m/s (β) $-0,4\text{m/s}$, $1,6\text{m/s}$ (γ) $x=0,16\text{m}$ (δ) $2/3$

Δ1.22 Το σώμα μάζας $m=2\text{kg}$ κινείται στο λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $v=10\text{m/s}$ και συγκρούεται πλαστικά με το αρχικά ακίνητο σώμα μάζας $M=2\text{kg}$. Μετά την κρούση το συσσωμάτωμα αρχίζει να ανεβαίνει το λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας κλίσης φ και αφού διανύσει απόσταση $AB=s=1\text{m}$ συναντά το ελατήριο σταθεράς k και χωρίς απώλειες ενέργειας του προκαλεί μέγιστη συσπίρωση $x=0,5\text{m}$. Αρχικά το ελατήριο ήταν στο φυσικό του μήκος. Να υπολογιστούν



α. η ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση.

β. το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του m που έγινε θερμότητα λόγω κρούσης.

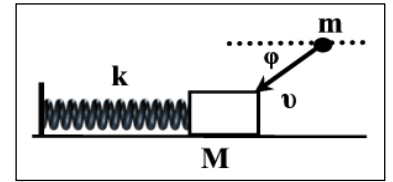
γ. η ταχύτητα του συσσωματώματος μόλις πριν χτυπήσει στο άκρο του ελατηρίου.

δ. Η σταθερά του ελατηρίου. Δίνονται $g=10\text{m/s}^2$ $\eta\mu\varphi=0,8$

(α) 5m/s (β) 50%, (γ) 3m/s (δ) $k=16\text{N/m}$

Δ1.23 Οριζόντιο ιδανικό ελατήριο φέρει συνδεδεμένο στο ελεύθερο άκρο του σώμα μάζας $M=4,8\text{kg}$, ενώ το άλλο άκρο του στερεώνεται σε ακλόνητο σημείο. Αρχικά το ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος και το σώμα ισορροπεί πάνω σε τραχύ οριζόντιο επίπεδο. Βλήμα μάζας $m=0,2\text{kg}$ σφηνώνεται στο σώμα με ταχύτητα $v=200\text{m/s}$ που σχηματίζει γωνία $\phi=60^\circ$ με το οριζόντιο επίπεδο. Μετά την κρούση το ελατήριο υφίσταται μέγιστη συσπίρωση κατά $x=0,2\text{m}$. Μεταξύ επιπέδου και σώματος μάζας M , υπάρχουν τριβές με συντελεστή τριβής $\mu=0,1$. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$. Να υπολογιστούν:

α. Η θερμότητα που εκλύθηκε λόγω τριβών κατά την ολίσθηση.
 β. Η σταθερά του ελατηρίου, k .
 γ. Το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του βλήματος που έγινε θερμότητα συνολικά, λόγω κρούσης και λόγω τριβής με το επίπεδο.



α. 1J , β. $k=1950\text{N/m}$, γ. $99,025\%$

Δ1.24 Από την κορυφή A, κεκλιμένου επιπέδου ύψους $h=1,6\text{m}$ και γωνίας κλίσης $\phi=30^\circ$ αφήνεται να ολισθήσει σώμα μάζας $m_1=1\text{kg}$. Στη βάση του κεκλιμένου, το σώμα συναντά λείο οριζόντιο επίπεδο, στο οποίο κινείται μέχρις ότου συγκρουστεί πλαστικά με σώμα μάζας $m_2=4\text{kg}$, που ήταν αρχικά ακίνητο. Το συσσωμάτωμα κινείται πάνω στο οριζόντιο επίπεδο, συναντά και συσπειρώνει ιδανικό οριζόντιο ελατήριο σταθεράς $k=1000\text{N/m}$, το οποίο έχει μόνιμα στερεωμένο το ένα άκρο του. Αν ο συντελεστής τριβής ολίσθησης επί του κεκλιμένου είναι $\mu=\sqrt{3}/4$, να υπολογιστούν:

α. Η ταχύτητα με την οποία το σώμα m_1 συναντά το οριζόντιο επίπεδο.
 β. Η μέγιστη συσπίρωση του ελατηρίου.
 γ. Το ποσοστό επί τοις % της αρχικής ενέργειας του σώματος m_1 , στο σημείο A, που έγινε θερμότητα κατά την ολίσθηση επί του κεκλιμένου επιπέδου.
 γ. Το ποσοστό επί τοις % της αρχικής ενέργειας του σώματος m_1 , στο σημείο A, που έγινε θερμότητα στην πλαστική κρούση.

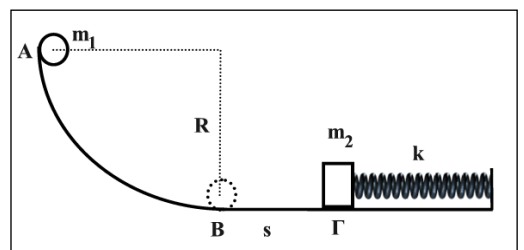
Δίνονται, $g=10\text{m/s}^2$. Δεν υπάρχουν απώλειες ενέργειας κατά τη στιγμή που το σώμα μάζας m_1 συναντά το οριζόντιο επίπεδο. Ως στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας βαρύτητας να θεωρηθεί το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από τη θέση ισορροπίας.

α. $v=2\sqrt{2}\text{m/s}$, β. $x=0,04\text{m}$, γ. $\alpha\% = 75\%$, δ. 20%

Δ1.25 Θεωρούμε κατακόρυφο τεταρτοκύκλιο AB, ακτίνας $R=2\text{m}$ που εφάπτεται στο κάτω άκρο του B, με λείο οριζόντιο δάπεδο. Σώμα μάζας $m_1=4\text{kg}$, αφήνεται να ολισθήσει κατά μήκος του τεταρτοκυκλίου από το άνω άκρο A. Το σώμα περνάει από το σημείο B με ταχύτητα $v_B=5\text{m/s}$ και συνεχίζει να κινείται χωρίς τριβές κατά μήκος της οριζόντιας εφαπτομένης του τεταρτοκυκλίου στο σημείο B.

Αφού διανύσει διάστημα $B\Gamma=s=0,6\text{m}$ στο οριζόντιο επίπεδο συγκρούεται πλαστικά με σώμα μάζας $m_2=6\text{kg}$ που είναι δεμένο στο ελεύθερο άκρο οριζοντίου ελατηρίου σταθεράς $k=250\text{N/m}$, το οποίο έχει το άλλο άκρο του στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Τα σώματα μετά την πλαστική κρούση κινούνται ως μια μάζα και το ελατήριο συσπειρώνεται. Να υπολογιστούν:

α. Η θερμότητα που παράχθηκε λόγω τριβής κατά την κίνηση του σώματος στο τεταρτοκύκλιο.
 β. Το ποσοστό (%) της αρχικής μηχανικής ενέργειας (του σώματος m_1 στο σημείο A) που μετατράπηκε σε θερμότητα λόγω της πλαστικής κρούσης.



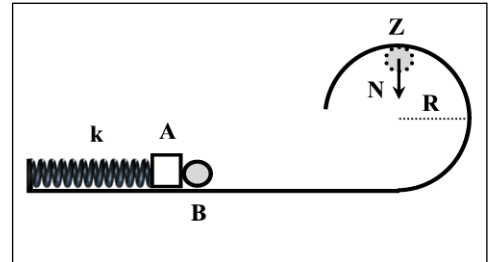
γ. Το ποσοστό (%) της αρχικής μηχανικής ενέργειας του σώματος m_1 που έγινε θερμότητα λόγω τριβών.

δ. Τη μέγιστη συσπίρωση του ελατηρίου.

Ως στάθμη μηδενικής δυναμικής ενέργειας να θεωρηθεί το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το B. Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

α. $|W_T|=30\text{J}$, β. 37,5%, γ. 37,5%, δ. $x=0,4\text{m}$

Δ1.26 Σώμα A, μάζας $m_1=2\text{kg}$ είναι συνδεδεμένο στο ελεύθερο άκρο ελατηρίου σταθεράς $k=800\text{N/m}$ και ισορροπεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, έτσι ώστε το ελατήριο να βρίσκεται στο φυσικό του μήκος. Το σώμα A βρίσκεται σε επαφή με σφαίρα, B, μάζας $m_2=6\text{kg}$, η οποία θεωρείται ως υλικό σημείο. Συσπειρώνουμε το ελατήριο κατά $x=0,6\text{m}$ και το αφήνουμε ελεύθερο. Καθώς το σώμα, A, επανέρχεται στη θέση ισορροπίας του, συγκρούεται με τη σφαίρα μετωπικά και την εκτοξεύει προς τα δεξιά. Η σφαίρα ολισθαίνει χωρίς τριβές και αρχίζει να ανεβαίνει μια λεία κυκλική ράγα, ακτίνας $R=0,6\text{m}$. Όταν φτάνει στο υψηλότερο σημείο της τροχιάς της, Z, η κάθετη αντίδραση που δέχεται από τη ράγα είναι $N_Z=60\text{N}$.



α. Να βρεθεί η ταχύτητα της σφαίρας στο σημείο, Z.

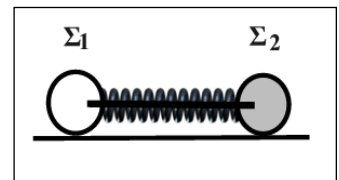
β. Να βρεθεί η ταχύτητα της σφαίρας αμέσως μετά την κρούση της με το σώμα, A.

γ. Να εξεταστεί αν η κρούση σώματος A και σφαίρας, B είναι ελαστική ή ανελαστική.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

α. $v_Z=2\sqrt{3}\text{m/s}$, β. $v_2=6\text{m/s}$, γ. Ελαστική

Δ1.27 Δύο σφαίρες μάζας $m_1=0.2\text{kg}$ και $m_2=1\text{kg}$, συγκρατούνται σε επαφή με τα άκρα ενός συσπειρωμένου αβαρούς ελατηρίου με τη βοήθεια ενός νήματος. Το σύστημα αρχικά είναι ακίνητο. Το ελατήριο έχει σταθερά $k=600\text{N/m}$ και είναι συσπειρωμένο κατά $x_0=0,2\text{m}$. Τη χρονική στιγμή $t=0$, το νήμα κόβεται, το ελατήριο αποσυσπείρωνεται και οι σφαίρες απομακρύνονται. Να υπολογιστούν:



α. Τα μέτρα των επιταχύνσεων των σωμάτων τη χρονική στιγμή $t=0$ και αφού κόπηκε το νήμα.

β. Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου πριν κοπεί το νήμα.

γ. Τα μέτρα των ταχυτήτων των σφαιρών όταν μηδενιστεί η συσπίρωση του ελατηρίου.

Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι $U_{ελ}=\frac{1}{2}kx^2$.

α. $a_1=600\text{m/s}^2$, $a_2=120\text{m/s}^2$, β. $U=12\text{J}$, γ. $v_1=10\text{m/s}$, $v_2=2\text{m/s}$

•**Δ1.28** Έστω σώμα (Σ) μάζας $M=1\text{kg}$ και κωνικό βλήμα (β) μάζας $m=0,2\text{kg}$. Για να σφηνώσουμε με το χέρι μας ολόκληρο το βλήμα στο σταθερό σώμα (Σ) πρέπει να δαπανήσουμε ενέργεια 100J.

Έστω τώρα ότι το σώμα (Σ) που είναι ακίνητο σε λείο οριζόντιο επίπεδο πυροβολείται με το βλήμα (β). Το βλήμα κινούμενο οριζόντια με κινητική ενέργεια K προσκρούει στο σώμα (Σ) και ακολουθεί πλαστική κρούση.

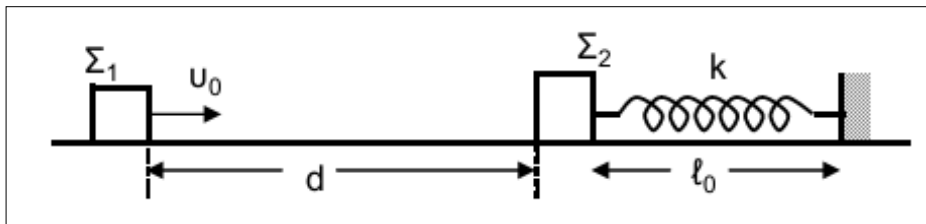
α. Για $K=100\text{J}$ θα μπορούσε το βλήμα να σφηνωθεί όλο μέσα στο σώμα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β. Ποια είναι η ελάχιστη κινητική ενέργεια K που πρέπει να έχει το βλήμα, ώστε να σφηνωθεί ολόκληρο στο σώμα Σ.

γ. Για ποια τιμή του λόγου m/M , το βλήμα με κινητική ενέργεια $K=100\text{J}$ σφηνώνεται ολόκληρο στο σώμα (Σ); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Θέμα Πανελλαδικών εξετάσεων 2005)

α. Όχι, β. $K=120\text{J}$, γ. $m/M \rightarrow 0$

•**Δ1.29** Σώμα Σ_1 με μάζα m_1 κινείται σε οριζόντιο επίπεδο ολισθαίνοντας προς άλλο σώμα Σ_2 με μάζα $m_2 = 2m_1$, το οποίο αρχικά είναι ακίνητο. Έστω v_0 η ταχύτητα που έχει το σώμα Σ_1 τη στιγμή $t_0 = 0$ και ενώ βρίσκεται σε απόσταση $d = 1\text{ m}$ από το σώμα Σ_2 . Αρχικά, θεωρούμε ότι το σώμα Σ_2 είναι ακίνητο πάνω στο επίπεδο δεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου με αμελητέα μάζα και σταθερά ελατηρίου k , και το οποίο έχει το φυσικό του μήκος ℓ_0 . Το δεύτερο άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο τοίχο, όπως φαίνεται στο σχήμα:



Αμέσως μετά την κρούση, που είναι κεντρική και ελαστική, το σώμα Σ_1 αποκτά ταχύτητα με μέτρο $v_1' = \sqrt{10}\text{ m/s}$ και φορά αντίθετη της αρχικής ταχύτητας.

Δίνεται ότι ο συντελεστής τριβής ολίσθησης των δύο σωμάτων με το οριζόντιο επίπεδο είναι $\mu = 0,5$ και ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10\text{ m/s}^2$.

Γ1. Να υπολογίσετε την αρχική ταχύτητα v_0 του σώματος Σ_1 .

Γ2. Να υπολογίσετε το ποσοστό της κινητικής ενέργειας που μεταφέρθηκε από το σώμα Σ_1 στο σώμα Σ_2 κατά την κρούση.

Γ3. Να υπολογίσετε το συνολικό χρόνο κίνησης του σώματος Σ_1 από την αρχική χρονική στιγμή t_0 μέχρι να ακινητοποιηθεί τελικά.

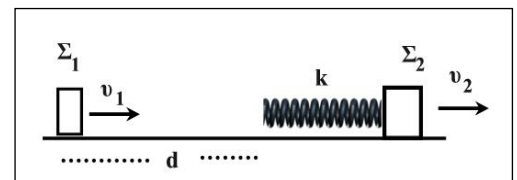
Δίνεται: $\sqrt{10} = 3,2$.

Γ4. Να υπολογίσετε τη μέγιστη συσπίρωση του ελατηρίου, αν δίνεται ότι $m_2 = 1\text{ kg}$ και $k = 105\text{ N/m}$.

Θεωρήστε ότι η χρονική διάρκεια της κρούσης είναι αμελητέα και τα δύο σώματα συγκρούονται μόνο μία φορά. (Εξετάσεις ΕΝΑ 2013)

Γ1: 10 m/s , Γ2. $8K_1/9$, Γ3. $0,72\text{ s}$, Γ4. $0,57\text{ m}$

•**Δ1.30** Σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 3\text{ kg}$ ολισθαίνει χωρίς τριβές πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα $v_1 = 6\text{ m/s}$. Μπροστά απ' αυτό, άλλο σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 9\text{ kg}$ ολισθαίνει στην ίδια κατεύθυνση και με ταχύτητα $v_2 = 2\text{ m/s}$. Το σώμα Σ_2 φέρει πίσω του στερεωμένο οριζόντιο ελατήριο



σταθεράς $k = 100\text{ N/m}$, αμελητέας μάζας. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το Σ_1 απέχει από το ελεύθερο άκρο του ελατηρίου απόσταση $d = 0,8\text{ m}$. Κατά τη σύγκρουση που ακολουθεί το ελατήριο παραμορφώνεται τα σώματα πλησιάζουν και στην συνέχεια απομακρύνονται, μέχρι να αποκτήσει και πάλι το ελατήριο το φυσικό του μήκος. Τα σώματα θεωρούνται υλικά σημεία. Να υπολογιστούν:

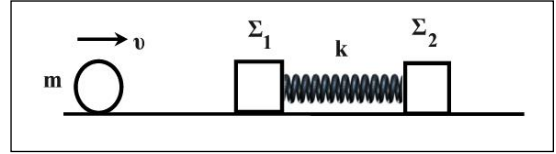
α. Η χρονική στιγμή που το σώμα Σ_1 φτάνει στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου για πρώτη φορά.

β. Η μέγιστη συσπίρωση του ελατηρίου.

γ. Οι ταχύτητες των σωμάτων όταν το ελατήριο επανέρχεται στο φυσικό του μήκος.

α. $t = 0,2\text{ s}$, β. $x = 0,6\text{ m}$, β. $V_1 = 0$, $V_2 = 4\text{ m/s}$

•**Δ1.31** Δύο σώματα, Σ_1, Σ_2 , ίσης μάζας $m_1=m_2=2\text{kg}$ συνδέονται με ελατήριο σταθεράς $k=100\text{N/m}$ και τοποθετούνται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με το ελατήριο αρχικά στο φυσικό του μήκος. Μια σφαίρα, μάζας $m=1\text{kg}$ κινούμενη με ταχύτητα $v=3\text{m/s}$, κατά τη διεύθυνση του ελατηρίου συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το ένα από το σώμα Σ_1 . Να υπολογιστούν:



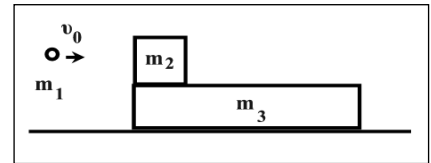
α. Η ταχύτητα του σώματος Σ_1 αμέσως μετά την κρούση.

β. Η μέγιστη συσπίρωση του ελατηρίου.

γ. Οι ταχύτητες των δύο σωμάτων όταν το ελατήριο επανακτήσει το φυσικό του μήκος.

α. 2m/s , β. $\Delta x=0,2\text{m}$, γ. 0 και 2m/s

•**Δ1.32** Σώμα Α μάζας $m_3=2\text{kg}$ ηρεμεί πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο και πάνω του φέρει άλλο σώμα Β μάζας $m_2=2\text{kg}$ που αρχικά είναι ακίνητο. Μεταξύ των δύο σωμάτων υπάρχει τριβή με συντελεστή τριβής μ . Βλήμα μάζας $m_1=0,1\text{kg}$ έρχεται με οριζόντια ταχύτητα $v_0=80\text{m/s}$ και διαπερνάει το σώμα m_2 σε αμελητέο χρόνο, ενώ όταν βγαίνει από αυτό έχει χάσει τη μισή του ταχύτητα. Μετά την κρούση το σώμα Β ολισθαίνει πάνω στο Α κατά $s=0,5\text{m}$, μέχρι τα σώματα Α και Β να αποκτήσουν κοινή ταχύτητα. Να υπολογιστούν:



α. Η κοινή ταχύτητα που θα αποκτήσουν.

β. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ των δύο σωμάτων.

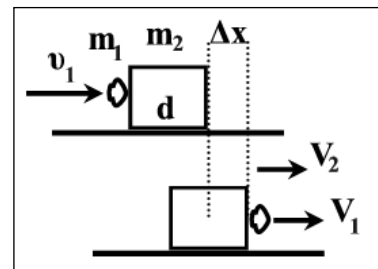
γ. Η μετατόπιση του σώματος Α ως προς το έδαφος μέχρι να τα σώματα Α και Β να αποκτήσουν κοινή ταχύτητα,

δ. Η θερμότητα που μεταφέρεται στο περιβάλλον λόγω κρούσης και ολίσθησης.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

α. 1m/s , β. $0,2$, γ. $0,25\text{m}$, δ. 238J

•**Δ1.33** Βλήμα μάζας $m_1=0,1\text{kg}$ κινούμενο οριζόντια με ταχύτητα $v_1=200\text{m/s}$, διαπερνάει ξύλινο πρίσμα μάζας $m_2=0,2\text{kg}$, μήκους $d=50\text{cm}$ το οποίο αρχικά ηρεμούσε πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το βλήμα βγαίνει από το πρίσμα μετά από χρονικό διάστημα Δt με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $V_1=100\text{m/s}$. Αν η δύναμη αντίστασης του ξύλου πάνω στο βλήμα θεωρηθεί σταθερή, να υπολογιστούν:



α. Η ταχύτητα, V_2 , του πρίσματος τη χρονική στιγμή που το βλήμα βγαίνει απ' αυτό.

β. Η μετατόπιση, Δx , του πρίσματος στο χρονικό διάστημα Δt που το βλήμα το διαπερνούσε.

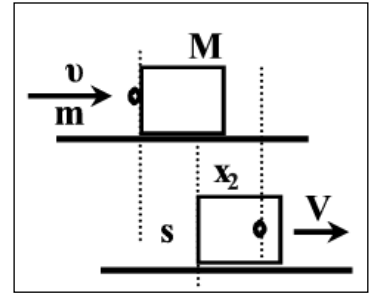
γ. Το μέτρο της δύναμης αντίστασης που δέχεται το βλήμα από το ξύλο.

δ. Το χρονικό διάστημα Δt .

ε. Το ποσοστό, (%), της κινητικής ενέργειας του βλήματος που έγινε θερμότητα λόγω τριβής του βλήματος με το υλικό του πρίσματος.

α. 50m/s , β. $\Delta x=10\text{cm}$, γ. $F=2500\text{N}$, δ. $0,004\text{s}$, ε. $62,5\%$

•**Δ1.34** Βλήμα μάζας $m=1\text{kg}$ κινείται με οριζόντια ταχύτητα $v=100\text{m/s}$ και σφηνώνεται σε ξύλινο κύβο μάζας $M=4\text{kg}$, που αρχικά ηρεμεί πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Στην πρώτη περίπτωση ο κύβος είναι καλά στερεωμένος και διατηρείται ακλόνητος καθώς το βλήμα εισχωρεί μέσα του κατά $x_1=20\text{cm}$ και σταματάει. Στη δεύτερη περίπτωση ο κύβος βρίσκεται ακίνητος πάνω σε λείο οριζόντιο τραπέζι και το ίδιο βλήμα, που βάλλεται με τον ίδιο τρόπο εισχωρεί μέσα του κατά x_2 μέχρι να σταματήσει να κινείται ως προς αυτόν και να αποκτήσουν, βλήμα και κύβος, κοινή ταχύτητα. Η δύναμη αντίστασης του ξύλου στο βλήμα να θεωρηθεί ίδια και σταθερή και στις δύο περιπτώσεις.

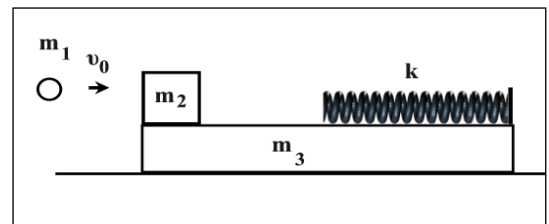


Να υπολογιστούν:

- Το μέτρο της δύναμης αντίστασης του ξύλου
- η κοινή ταχύτητα, V .
- Ο χρόνος, t , που χρειάστηκε για να αποκτήσουν την κοινή ταχύτητα
- το διάστημα s που μετακινήθηκε ο κύβος μέσα στο χρόνο t
- η μέγιστη διείδυση x_2 του βλήματος μέσα στον κύβο.

$\alpha. F=2,5 \cdot 10^4 \text{N}, \beta. V=20\text{m/s}, \gamma. t=32 \cdot 10^{-4} \text{s}, \delta. s=0,032\text{m}, \epsilon. x_2=0,16\text{m}$

•**Δ1.35** Ξύλινος κύβος μάζας $m_2=5\text{kg}$ ισορροπεί αρχικά στην άκρη του λείου επιπέδου της οριζόντιας πλατφόρμας μάζας $m_3=6\text{kg}$. Η πλατφόρμα βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο και φέρει αβαρές ελατήριο στερεωμένο στο ένα της άκρο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Βλήμα μάζας $m_1=1\text{kg}$ έρχεται με οριζόντια ταχύτητα $v_0=12\text{m/s}$ και συγκρούεται πλαστικά με το

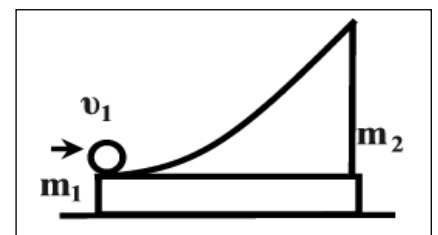


κιβώτιο. Το συσσωμάτωμα βλήματος – κύβου κινείται πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο της πλατφόρμας και συγκρούεται με το ελατήριο χωρίς απώλειες ενέργειας και το συσπείρωνει κατά μέγιστη συσπίρωση x . Το ελατήριο έχει σταθερά $k=1200\text{N/m}$ και βρίσκεται αρχικά στο φυσικό του μήκος. Να υπολογιστούν:

- Η κοινή ταχύτητα βλήματος – κύβου αμέσως μετά την πλαστική κρούση.
- Η ταχύτητα της πλατφόρμας, τη χρονική στιγμή που η συσπίρωση του ελατηρίου θα πάρει τη μέγιστη τιμή της.
- Η μέγιστη συσπίρωση, x , του ελατηρίου.
- Η ταχύτητα της πλατφόρμας όταν το συσσωμάτωμα βλήματος και κύβου την εγκαταλείπει από την πίσω άκρη και το ελατήριο έχει ανακτήσει και πάλι το φυσικό του μήκος.

$\alpha. 2\text{m/s}, \beta. 1\text{m/s}, \gamma. 0,1\text{m}, \delta. 2\text{m/s}$

•**Δ1.36** Η μπάλα μάζας $m_1=2\text{kg}$ εκτοξεύεται οριζόντια με ταχύτητα $v_1=3\text{m/s}$ από την άκρη του οχήματος μάζας $m_2=4\text{kg}$ που φαίνεται στο σχήμα. Η μπάλα ανεβαίνει χωρίς τριβές στο όχημα ολισθαίνοντας και φτάνει σε μέγιστο ύψος h χωρίς να χάσει την επαφή του με αυτό. Την ίδια στιγμή το όχημα έχει αποκτήσει ταχύτητα, V πάνω στο λείο οριζόντιο επίπεδο.



- Να υπολογιστούν η ταχύτητα V και το μέγιστο ύψος, h .
- Στη συνέχεια η μπάλα κατεβαίνει και εγκαταλείπει το όχημα με ταχύτητα V_1 ενώ αυτό έχει ταχύτητα V_2 . Να υπολογιστούν οι V_1, V_2 .

$\alpha. V=1\text{m/s}, h=0,3\text{m}, \beta. V_1=-1\text{m/s}, V_2=2\text{m/s}$