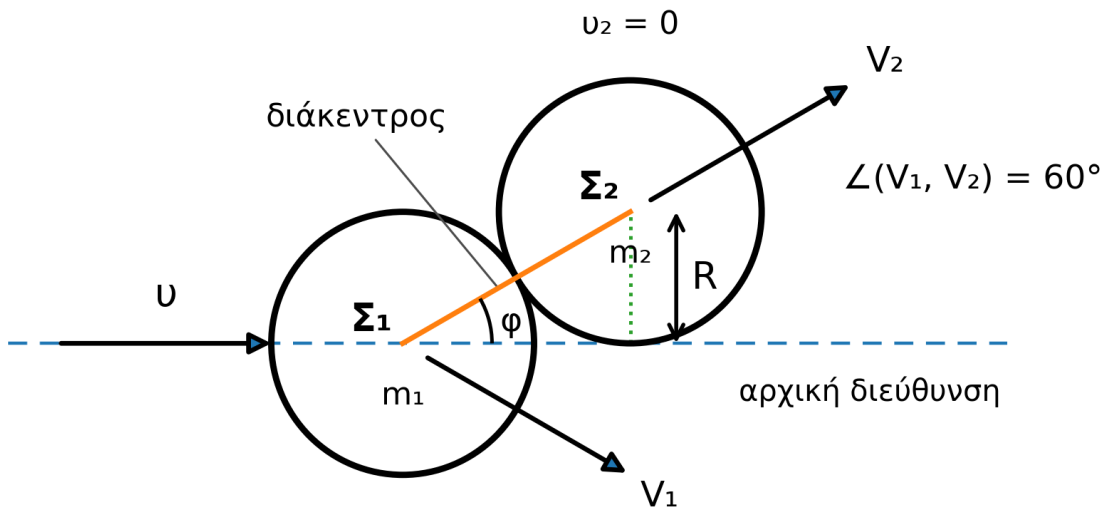


Τεστ 1^ο Β

Έκκεντρη ελαστική κρούση — λόγος μαζών

ΘΕΜΑ Β

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο βρίσκονται δύο λείες σφαίρες Σ_1 και Σ_2 ίσης ακτίνας R και διαφορετικών μαζών m_1 και m_2 . Η Σ_2 είναι αρχικά ακίνητη. Η Σ_1 κινείται με ταχύτητα u κατά μήκος ευθείας, από την οποία το κέντρο της Σ_2 απέχει κάθετα απόσταση R . Η κρούση είναι έκκεντρη και ελαστική.

Στιγμή επαφής — ίσες ακτίνες R (κάτοψη)

Αμέσως μετά την κρούση οι ταχύτητες V_1 και V_2 των δύο σφαιρών σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 60° . Ο λόγος των μαζών m_1/m_2 είναι:

- α. $m_1/m_2 = 1/2$
- β. $m_1/m_2 = 2$
- γ. $m_1/m_2 = 3$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. (Μονάδες 2)

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας. (Μονάδες 4)

Έκκεντρη ελαστική κρούση — λόγος μαζών**ΛΥΣΗ****Σωστή απάντηση: β ($m_1/m_2 = 2$)**

1. Η γωνία της διακέντρου. Τη στιγμή της επαφής τα κέντρα των σφαιρών απέχουν $R + R = 2R$, ενώ το κέντρο της Σ_2 απέχει κάθετα R από την ευθεία κίνησης της Σ_1 . Στο ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζεται (υποτείνουσα $2R$, απέναντι κάθετη R):

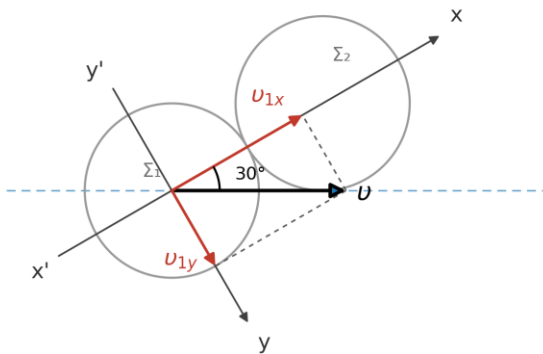
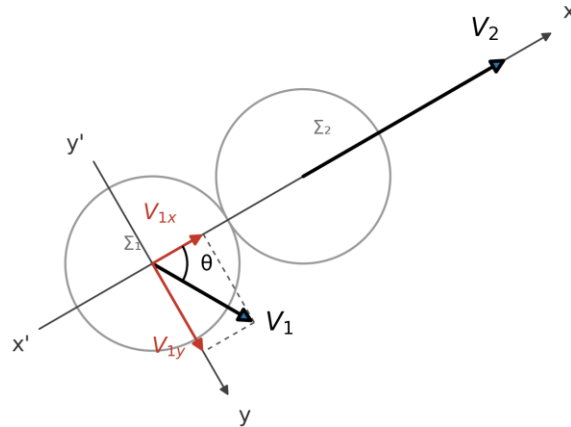
$$\eta\mu\varphi = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 30^\circ$$

όπου φ η γωνία της διακέντρου με τη διεύθυνση της u .

2. Επιλογή αξόνων. Παίρνουμε τον άξονα x' πάνω στη διάκεντρο, με θετική φορά από τη Σ_1 προς τη Σ_2 , και τον άξονα y' κάθετο σε αυτήν (σχήμα α). Αναλύουμε την ταχύτητα της Σ_1 :

$$v_{1x} = v \cdot \sin 30^\circ = \frac{v\sqrt{3}}{2}, \quad v_{1y} = v \cdot \eta\mu 30^\circ = \frac{v}{2}$$

Η Σ_2 είναι ακίνητη, άρα $v_{2x} = v_{2y} = 0$.

α) Πριν: ανάλυση της u **β) Μετά: ταχύτητες V_1 και V_2** 

3. Άξονας y' . Οι σφαίρες είναι λείες, άρα η δύναμη που ασκεί η μία στην άλλη κατά την κρούση είναι κάθετη στις επιφάνειές τους στο σημείο επαφής, δηλαδή βρίσκεται πάνω στη διάκεντρο (άξονας x'). Στον άξονα y' δεν ασκείται δύναμη, οπότε οι συνιστώσες των ταχυτήτων στον y' δεν αλλάζουν:

$$V_{1y} = v_{1y} = \frac{v}{2}, \quad V_{2y} = v_{2y} = 0$$

Άρα η Σ_2 , μετά την κρούση, κινείται πάνω στη διάκεντρο.

4. Άξονας x' . Στον άξονα x' η ορμή του συστήματος διατηρείται. Επειδή η κρούση είναι ελαστική, διατηρείται και η κινητική ενέργεια. Για κάθε σφαίρα όμως ισχύει $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2$ και το δεύτερο «κομμάτι» δεν αλλάζει (βήμα 3). Επομένως διατηρείται και η κινητική ενέργεια που αντιστοιχεί στις συνιστώσες x . Στον άξονα x' έχουμε λοιπόν ακριβώς **κεντρική ελαστική κρούση με ακίνητη τη Σ_2** και γράφουμε κατευθείαν:

$$V_{1x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1x}, \quad V_{2x} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1x}$$

5. Η γωνία των 60°. Η V_2 βρίσκεται πάνω στον θετικό ημιάξονα Ox ($V_{2x} > 0$), άρα η γωνία των V_1 και V_2 είναι η γωνία θ που σχηματίζει η V_1 με τον άξονα $x'x$ (σχήμα β). Για να είναι $\theta = 60^\circ$ πρέπει $V_{1x} > 0$ (αν ήταν αρνητική, η γωνία θα ξεπερνούσε τις 90°) και:

$$\varepsilon\phi 60^\circ = \frac{V_{1y}}{V_{1x}} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{\frac{v}{2}}{V_{1x}} \Rightarrow V_{1x} = \frac{v}{2\sqrt{3}} = \frac{v\sqrt{3}}{6}$$

6. Ο λόγος των μαζών. Εξισώνουμε με τον τύπο του βήματος 4:

$$\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{v\sqrt{3}}{2} = \frac{v\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{3}$$

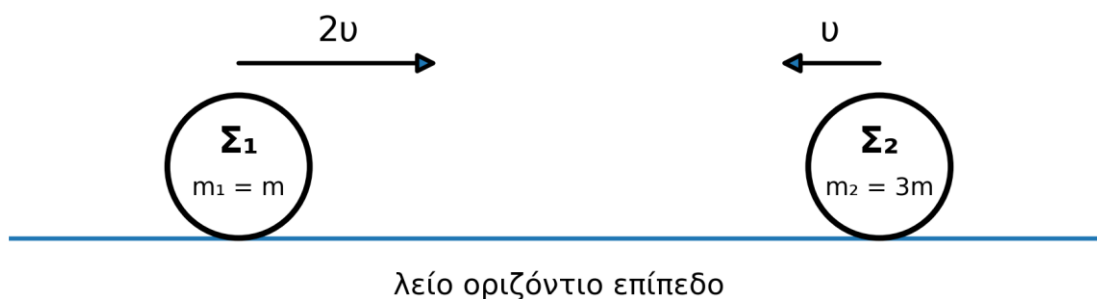
$$3m_1 - 3m_2 = m_1 + m_2 \Rightarrow 2m_1 = 4m_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = 2$$

Άρα σωστή είναι η β.

Παρατήρηση. Με $m_1/m_2 = 1/2$ (επιλογή α) βρίσκουμε $V_{1x} < 0$: η Σ_1 «γυρίζει πίσω» κατά μήκος της διακέντρου και η γωνία των ταχυτήτων είναι 120° , όχι 60° . Με $m_1/m_2 = 3$ (επιλογή γ) βρίσκουμε $\varepsilon\phi\theta = 2/\sqrt{3}$, δηλαδή $\theta \approx 49^\circ$.

Τεστ 1° Α Κεντρική ελαστική κρούση — μέγιστη παραμόρφωση**ΘΕΜΑ Β**

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο δύο ελαστικές σφαίρες Σ_1 και Σ_2 , μαζών $m_1 = m$ και $m_2 = 3m$ αντίστοιχα, κινούνται στην ίδια ευθεία με αντίθετες κατευθύνσεις. Η Σ_1 έχει ταχύτητα μέτρου $2u$ και η Σ_2 ταχύτητα μέτρου u , όπως στο σχήμα. Οι σφαίρες συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά.

Πριν από την κεντρική ελαστική κρούση

Αν K_0 είναι η συνολική κινητική ενέργεια του συστήματος αμέσως πριν από την κρούση, η μέγιστη δυναμική ενέργεια ελαστικής παραμόρφωσης $U_{\max}$ που αποθηκεύεται παροδικά κατά τη διάρκεια της κρούσης είναι:

α. $U_{\max} = (1/28)K_0$

β. $U_{\max} = (27/28)K_0$

γ. $U_{\max} = (3/4)K_0$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. (Μονάδες 2)

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας. (Μονάδες 4)

Κεντρική ελαστική κρούση — μέγιστη παραμόρφωση**ΛΥΣΗ****Σωστή απάντηση: β ($U_{\max} = (27/28)K_0$)**Θεωρούμε θετική τη φορά κίνησης της Σ_1 (προς τα δεξιά). Τότε $v_1 = +2v$ και $v_2 = -v$.**1. Αρχική κινητική ενέργεια.**

$$K_0 = \frac{1}{2}m(2v)^2 + \frac{1}{2}(3m)v^2 = 2mv^2 + \frac{3}{2}mv^2 = \frac{7}{2}mv^2$$

2. Πότε η παραμόρφωση είναι μέγιστη. Όσο οι σφαίρες πλησιάζουν η μία την άλλη, η παραμόρφωσή τους αυξάνεται. Γίνεται μέγιστη τη στιγμή που οι δύο σφαίρες αποκτούν την ίδια ταχύτητα V_K , δηλαδή κινούνται στιγμιαία σαν ένα σώμα (δεν πλησιάζουν πια ούτε έχουν αρχίσει να απομακρύνονται).

3. Κοινή ταχύτητα — Αρχή Διατήρησης της Ορμής.

$$m \cdot 2v + 3m \cdot (-v) = (m + 3m)V_K \Rightarrow -mv = 4mV_K \Rightarrow V_K = -\frac{v}{4}$$

Δηλαδή εκείνη τη στιγμή οι σφαίρες κινούνται μαζί με ταχύτητα μέτρου $v/4$ προς τα αριστερά.**4. Κινητική ενέργεια τη στιγμή της μέγιστης παραμόρφωσης.**

$$K = \frac{1}{2}(4m)\left(\frac{v}{4}\right)^2 = \frac{mv^2}{8}$$

5. Ενέργεια παραμόρφωσης. Η κρούση είναι ελαστική, οπότε η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται. Η κινητική ενέργεια που «λείπει» έχει μετατραπεί προσωρινά σε δυναμική ενέργεια ελαστικής παραμόρφωσης:

$$U_{\max} = K_0 - K = \frac{7}{2}mv^2 - \frac{1}{8}mv^2 = \frac{27}{8}mv^2$$

$$\frac{U_{\max}}{K_0} = \frac{\frac{27}{8}mv^2}{\frac{7}{2}mv^2} = \frac{27}{28} \Rightarrow U_{\max} = \frac{27}{28}K_0$$

Άρα σωστή είναι η β.

Προσοχή. Το $1/28$ (επιλογή α) είναι ο λόγος K/K_0 , δηλαδή η κινητική ενέργεια που απομένει τη στιγμή της μέγιστης παραμόρφωσης, όχι η ενέργεια παραμόρφωσης. Το $3/4$ (επιλογή γ) είναι ο λόγος $m_2/(m_1 + m_2)$, που θα ήταν σωστός μόνο αν η Σ_2 ήταν αρχικά ακίνητη.