

2° ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΜΗΧΑΝΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

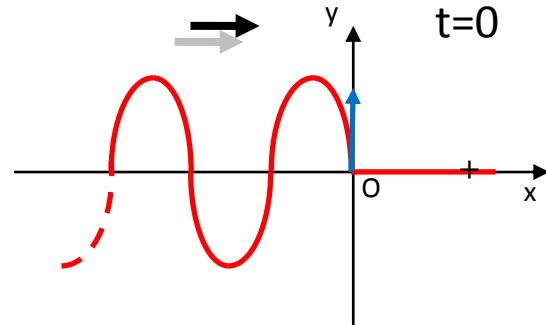
1.

Όταν ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα που τη στιγμή $t=0$ φτάνει στην αρχή των αξόνων, τότε το σημείο Ο αρχίζει να εκτελεί α.α.τ με εξίσωση

$$y = A \cdot \eta\mu\omega t$$

$$\text{Η εξίσωση } y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) (1)$$

ισχύει για αρμονικό κύμα που διαδίδεται κατά την θετική κατεύθυνση και τη χρονική στιγμή $t=0$ φτάνει στην αρχή των συντεταγμένων και μας δίνει την απομάκρυνση y ενός σημείου M με συντεταγμένη x κάποια χρονική στιγμή t .



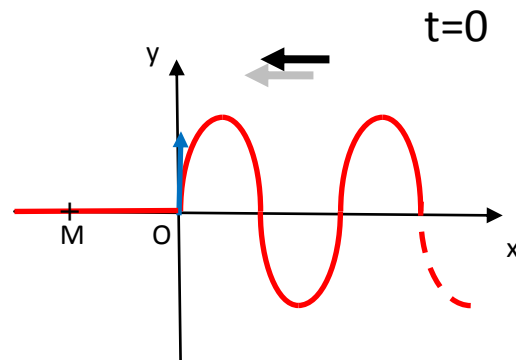
2.

Όταν ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα που φτάνει τη στιγμή $t=0$ στην αρχή των αξόνων, τότε το σημείο Ο αρχίζει να εκτελεί α.α.τ με εξίσωση

$$y = A \cdot \eta\mu\omega t$$

$$\text{Η εξίσωση } y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) (2)$$

ισχύει για αρμονικό κύμα που διαδίδεται κατά την αρνητική κατεύθυνση και τη χρονική στιγμή $t=0$ φτάνει στην αρχή των συντεταγμένων και μας δίνει την απομάκρυνση y ενός σημείου M με συντεταγμένη x κάποια χρονική στιγμή t .



3. ΠΡΟΣΟΧΗ: Για τις μονάδες μέτρησης των μεγεθών που προκύπτουν από τις εξισώσεις (1) και (2) ισχύουν :

α) η μονάδα μέτρησης του y είναι ίδια με τη μονάδα του A

β) η μονάδα μέτρησης του t είναι ίδια με τη μονάδα μέτρησης της περιόδου T .

γ) η μονάδα μέτρησης του x είναι ίδια με τη μονάδα μέτρησης του λ

4. Αν γνωρίζουμε την εξίσωση της απομάκρυνσης $y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda} \right)$ ενός αρμονικού κύματος μπορούμε να βρούμε την εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης ενός υλικού σημείου M που δίνεται από τη σχέση $v = \omega A \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \left(\frac{t}{T} \pm \frac{x_M}{\lambda} \right)$ και τη εξίσωση της επιτάχυνσης που δίνεται από τη σχέση $a = -\omega^2 A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} \pm \frac{x_M}{\lambda} \right)$

5. Ο Παράγοντας $2\pi(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda})$ λέγεται **φάση (φ)** του κύματος.

- Η **φάση** ενός σημείου του κύματος **δεν μπορεί να είναι αρνητική**. Όταν σε μια άσκηση προκύψει αρνητική φάση για ένα σημείο, σημαίνει ότι σ' αυτό το σημείο δεν έφτασε το κύμα.

- Αν ξέρουμε τη φάση δύο σημείων καταλαβαίνουμε τη φορά διάδοσης του κύματος γιατί **το κύμα διαδίδεται από το σημείο με τη μεγαλύτερη φάση στο σημείο με τη μικρότερη φάση**.

- Οι ταλαντώσεις των σημείων του ελαστικού μέσου που βρίσκονται ποιο κοντά την πηγή του κύματος έχουν κάθε χρονική στιγμή μεγαλύτερη φάση από τις αντίστοιχες των σημείων που βρίσκονται μακριά από την πηγή.

- Αν μηδενίσουμε τη φάση φ του κύματος

(I) βρίσκουμε τη χρονική στιγμή t_1 , που ξεκινά να ταλαντώνεται ένα συγκεκριμένο υλικό σημείο με γνωστή θέση x_1 ,

(II) βρίσκουμε την τετμημένη x_1 , του υλικού σημείου που ξεκινά να ταλαντώνεται μια συγκεκριμένη γνωστή χρονική στιγμή t_1 .

6. ΠΡΟΣΟΧΗ: Για κάθε σημείο του κύματος ισχύουν όσα ξέρουμε για την απλή αρμονική ταλάντωση.

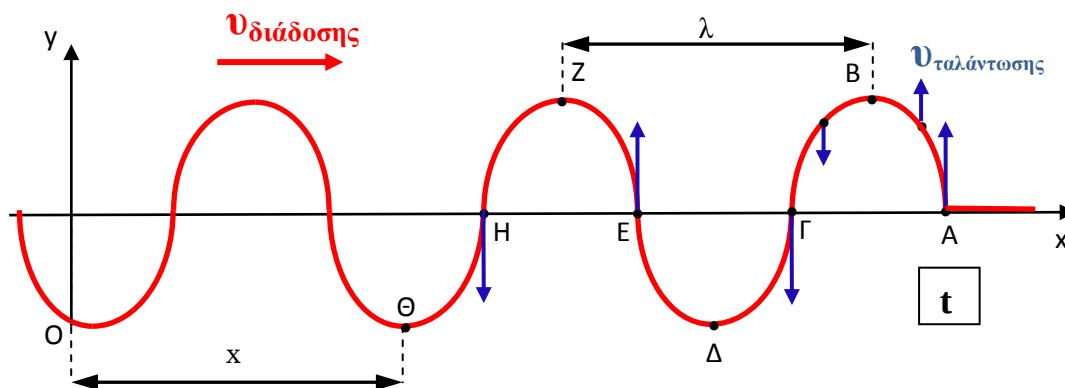
πχ: Για να βρούμε την ταχύτητα ταλάντωσης (v), ενός υλικού σημείου όταν γνωρίζουμε την απομάκρυνση y , εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ε για την ταλάντωση του σημείου από την οποία προκύπτει (όπως γνωρίζουμε από τις ταλαντώσεις) $y = \pm \omega \sqrt{A^2 - y^2}$

7. Η συχνότητα ενός κύματος εκφράζει τον αριθμό των ταλαντώσεων που εκτελεί ένα σημείο του στη μονάδα του χρόνου. Με την ίδια λογική μπορούμε να πούμε ότι η συχνότητα εκφράζει το πλήθος των μηκών κύματος που διέρχονται από ένα σημείο στη μονάδα του χρόνου.

Σε κάθε μήκος κύματος υπάρχει ένα όρος και μια κοιλάδα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Αν από ένα σημείο διέρχονται 10 κορυφές ανά δευτερόλεπτο, τότε το κύμα έχει συχνότητα $f = 10 \text{ Hz}$ αφού το σημείο φτάνει στη θέση με απομάκρυνση $y = +A$, 10 φορές το δευτερόλεπτο, ενώ η ταχύτητα που έχει λόγω ταλάντωσης μηδενίζεται 20 φορές κάθε δευτερόλεπτο.

8. Κάθε χρονική στιγμή τα σημεία ενός κύματος έχουν διαφορετικές φάσεις λόγω ταλάντωσης.



- Αν το Ο ταλαντώνεται για χρόνο t τότε το Θ ταλαντώνεται για χρόνο $t' = t - \frac{x}{v_{\text{διαδ}}}$
- Πώς μπορούμε να βρούμε τη διαφορά φάσης, μεταξύ των ταλαντώσεων δύο σημείων του ελαστικού μέσου στο οποίο διαδίδεται το κύμα, την ίδια χρονική στιγμή t ;

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $\varphi_Z = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_Z}{\lambda}\right)$, $\varphi_B = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_B}{\lambda}\right)$ όμως $\varphi_Z > \varphi_B$

$$\text{άρα } \Delta\varphi = \varphi_Z - \varphi_B = \frac{2\pi}{\lambda}(x_B - x_Z) \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$$

(προσοχή $\Delta\varphi$ = διαφορά φάσης και όχι μεταβολή)

- Πως μπορούμε να υπολογίσουμε τη μεταβολή της φάσης της ταλάντωσης ενός σημείου x του ελαστικού μέσου στο οποίο διαδίδεται το κύμα μεταξύ δύο χρονικών στιγμών t_1 και t_2 ($t_2 > t_1$) .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $\varphi_1 = 2\pi\left(\frac{t_1}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$, $\varphi_2 = 2\pi\left(\frac{t_2}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ όμως $\varphi_2 > \varphi_1$

$$\text{άρα } \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{T}(t_2 - t_1) \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{2\pi}{T}\Delta t$$

Στο προηγούμενο σχήμα τη χρονική στιγμή t που το κύμα φτάνει στο σημείο Α:

- Το σημείο Α έχει φάση $\varphi_A = 0$ και αρχίζει ταλάντωση με θετική φορά προς τα πάνω.
- Το σημείο Β έχει φάση $\varphi_B = \frac{\pi}{2}$ rad και βρίσκεται για πρώτη φορά σε $y = +A$
- Το σημείο Γ έχει φάση $\varphi_G = \pi$ rad και διέρχεται από τη Θ.Ι για πρώτη φορά με $v = -v_{\text{max}}$
- Το σημείο Δ έχει φάση $\varphi_D = \frac{3\pi}{2}$ rad και βρίσκεται για πρώτη φορά σε $y = -A$
- Το σημείο Ε έχει φάση $\varphi_E = 2\pi$ rad και έχει εκτελέσει μια πλήρη ταλάντωση.
- Το σημείο Ζ έχει φάση $\varphi_Z = 2\pi + \frac{\pi}{2}$ rad και βρίσκεται για δεύτερη φορά στη θέση $y = +A$
- Τα σημεία Β και Ζ είναι συμφασικά ομοίως και τα σημεία Γ και Η.
Οι ταλαντώσεις των σημείων του ελαστικού μέσου που οι θέσεις ισορροπίας τους απέχουν μεταξύ τους $d = \kappa \cdot \lambda$ (όπου $\kappa = 1, 2, 3, \dots$) , δηλαδή απέχουν ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος έχουν διαφορά φάσης $\Delta\varphi = 2\kappa\pi$ rad. Τα σημεία αυτά λέμε ότι βρίσκονται σε **συμφωνία φάσης** και έχουν κάθε χρονική στιγμή την ίδια απομάκρυνση και την ίδια ταχύτητα ταλάντωσης.
- Τα σημεία Γ και Ε βρίσκονται σε αντίθεση φάσης ομοίως τα Β και Θ.
Οι ταλαντώσεις των σημείων του ελαστικού μέσου που οι θέσεις ισορροπίας τους απέχουν μεταξύ τους $d = (2\kappa + 1)\frac{\lambda}{2}$ (όπου $\kappa = 0, 1, 2, 3, \dots$) , δηλαδή απέχουν περιττό πολλαπλάσιο του μισού μήκους κύματος έχουν διαφορά φάσης $\Delta\varphi = (2\kappa + 1)\pi$ rad. Τα σημεία αυτά λέμε ότι βρίσκονται σε **αντίθεση φάσης** και έχουν κάθε χρονική στιγμή αντίθετες απομακρύνσεις και αντίθετες ταχύτητες ταλάντωσης.

9. Όταν μας ζητούν την απομάκρυνση ή την ταχύτητα ενός υλικού σημείου μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή δίνοντάς μας την απομάκρυνση ή την ταχύτητα ενός άλλου σημείου την ίδια χρονική στιγμή είναι χρήσιμο να βρίσκουμε τη διαφορά φάσης μεταξύ των ταλαντώσεων των δύο σημείων.

10. Αν γνωρίζουμε την εξίσωση ενός αρμονικού κύματος μπορούμε να βρούμε τα χαρακτηριστικά του.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Έστω δίνεται η εξίσωση $y = 0,2 \text{ ημ}(4\pi t - 8\pi x)$ (S.I).

Συγκρίνοντας με την γενική εξίσωση $y = A \cdot \eta\mu 2\pi(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda})$ έχουμε :

1°. Το κύμα διαδίδεται στη θετική κατεύθυνση λόγω του πρόσημου (-)

2°. Το πλάτος του κύματος είναι $A=0,2 \text{ m}$

3°. Ισχύει $2\pi \frac{t}{T} = 4\pi t \Rightarrow T = \frac{1}{2} \text{ sec} \Rightarrow f = 2 \text{ Hz}$

4°. Ισχύει $2\pi \frac{x}{\lambda} = 8\pi x \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ m}$

5°. Από τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής προκύπτει η ταχύτητα διάδοσης του κύματος που είναι: $v = \lambda \cdot f = 0,25 \cdot 2 = 0,5 \text{ m/s}$

11. Για να βρούμε που έχει φτάσει το κύμα μια χρονική στιγμή t , μηδενίζουμε τη φάση και λύνουμε ως προς x .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Έστω δίνεται η εξίσωση $y = 0,2 \text{ ημ}(4\pi t - 8\pi x)$ (S.I). Ποιο σημείο θα αρχίσει να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή $t=3\text{sec}$;

Η φάση του κύματος είναι $\varphi = 4\pi t - 8\pi x$ η οποία για $\varphi=0$ και $t=3\text{sec}$ γίνεται

$$0 = 4\pi \cdot 3 - 8\pi x \Rightarrow x = 1,5 \text{ m}$$

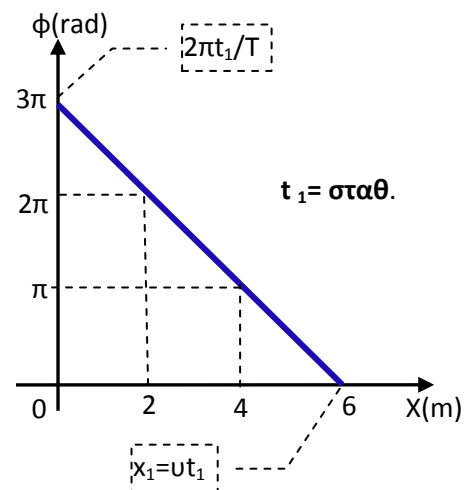
12. Από τη γραφική παράσταση της φάσης (φ) των σημείων του κύματος σε συνάρτηση με τη θέση (x), κάποια χρονική στιγμή, μπορούμε να βρούμε το μήκος κύματος λ .

$$\text{Από τη σχέση } \Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi \cdot \Delta x}{\Delta\varphi}$$

Από το σχήμα η προηγούμενη σχέση

$$\text{γίνεται: } \lambda = \frac{2\pi \cdot (6-0)}{(3\pi-0)} = \frac{2\pi \cdot 6}{3\pi} = 4 \text{ m}$$

- Από τη γραφική παράσταση καταλαβαίνουμε ότι τα σημεία του μέσου που ταλαντώνονται τη στιγμή t_1 είναι τα σημεία που βρίσκονται από 0 έως 6m. Αν είναι γνωστή η χρονική στιγμή t_1 τότε από τη σχέση $x_1 = v \cdot t_1$ βρίσκουμε τη ταχύτητα διάδοσης v και από τη σχέση $v = \lambda \cdot f$ τη συχνότητα f .

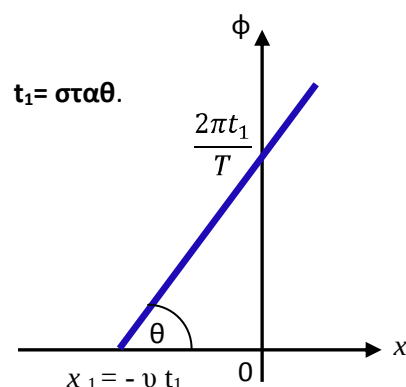


- 13.

Αν το κύμα διαδίδεται προς την αρνητική κατεύθυνση τότε η εξίσωση της φάσης είναι $\varphi = 2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda})$ οπότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi=f(x)$ έχει τη μορφή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Από τη σχήμα προκύπτει ακόμη ότι

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

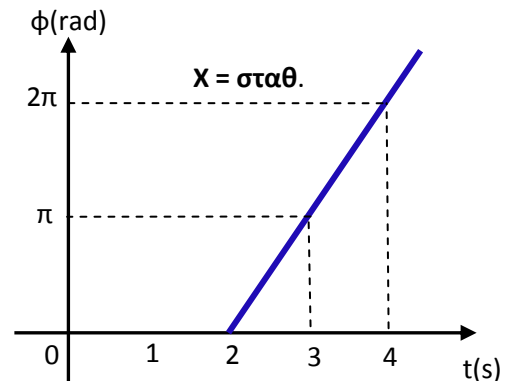


14. Από τη γραφική παράσταση της φάσης (φ) σε συνάρτηση με το χρόνο (t) για ένα σημείο του κύματος, μπορούμε να βρούμε την κυκλική συχνότητα (ω).

Από τη σχέση:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1} = \frac{2\pi - 0}{4 - 2} = \pi \text{ (r/s)}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi} = 0,5 \text{ Hz}$$



ΠΡΟΣΟΧΗ: Για κύμα που διαδίδεται κατά την αρνητική φορά του άξονα η γραφική παράσταση $\varphi = f(t)$ είναι ίδια με αυτή που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

15. Πώς σχεδιάζουμε το στιγμιότυπο μια χρονική στιγμή t ;

● Στιγμιότυπο κύματος που διαδίδεται κατά την θετική κατεύθυνση του άξονα . Έστω εγκάρσιο κύμα που διαδίδεται από τη θετική κατεύθυνση του άξονα χ'όχ με ταχύτητα $v_{\text{διαδ}} = 0,5 \text{ m/s}$ και δίνεται από την εξίσωση $y = 0,3\eta\mu 2\pi(0,25t - 0,5x)$ (S.I)
(1) Να σχεδιαστεί το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 10 \text{ sec}$.

1^ο Βήμα: Θέτουμε στην εξίσωση του κύματος όπου $t = t_1$ για να βρούμε την εξίσωση της οποίας θα σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση.

Η εξίσωση (1) για $t_1 = 10 \text{ sec}$: $y = 0,3\eta\mu 2\pi(0,25 \cdot 10 - 0,5x) \Rightarrow y = 0,3\eta\mu 2\pi(2,5 - 0,5x) \Rightarrow y = 0,3\eta\mu(5\pi - \pi x) \Rightarrow y = 0,3\eta\mu(4\pi + \pi - \pi x) \Rightarrow y = 0,3\eta\mu(\pi - \pi x) \Rightarrow y = 0,3\eta\mu(\pi x)$ (S.I) (2)

2^ο Βήμα: Βρίσκουμε πόσο μακριά από την αρχή των αξόνων ($x=0$) έχει φτάσει το κύμα τη χρονική στιγμή t_1 και συγκρίνουμε την απόσταση αυτή με το λ .

Για τη διάδοση του κύματος ισχύει $x = v_{\text{διαδ}} \cdot t_1 \Rightarrow x = 0,5 \cdot 10 \Rightarrow x = 5 \text{ m}$

Από την εξίσωση (1) προκύπτει ότι $\lambda = 2 \text{ m}$. Άρα $x/\lambda = 5/2 = 2,5 \Rightarrow x = 2,5 \lambda$.

Επομένως θα πρέπει να φτιάξουμε για το θετικό ημιάξονα Ox τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 0,3\eta\mu(\pi x)$ για $0 \leq x \leq 5 \text{ m}$

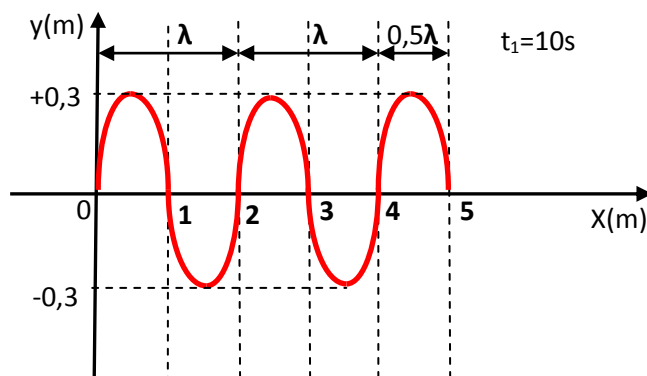
(Εναλλακτικά για να βρούμε πόσο μακριά έφτασε το κύμα τη στιγμή $t_1 = 10 \text{ s}$ μπορούμε να μηδενίσουμε τη φάση: $\varphi = 0 \Rightarrow 2\pi(2,5 - 0,5x) = 0 \Rightarrow x = 5 \text{ m}$)

3^ο Βήμα: Βρίσκουμε την απομάκρυνση του σημείου O ($x=0$) τη χρονική στιγμή t_1 θέτοντας στην εξίσωση (1) $x=0$.

$$(1) \xrightarrow{x=0} y = 0,3\eta\mu 2\pi(0,25t) \xrightarrow{t_1=10} y = 0,3\eta\mu 2\pi 2,5 \Rightarrow y = 0,3\eta\mu 5\pi \Rightarrow y = 0$$

4^ο Βήμα: Σχεδιάζουμε το στιγμιότυπο του κύματος με βάση τα στοιχεία που υπολογίσαμε στα βήματα 1,2,3, ξεκινώντας από το πιο απομακρυσμένο σημείο ,από την θέση $x=0$, που έχει φτάσει το κύμα.

Το ζητούμε στιγμιότυπο φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Μπορούμε να κάνουμε και τη γραφική παράσταση της φάσης σε συνάρτηση με το x για την ίδια χρονική στιγμή.

$$\varphi = 2\pi(0,25t - 0,5x)$$

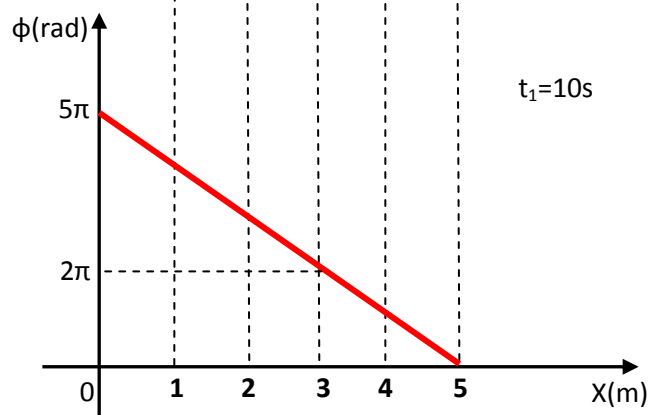
$$\xrightarrow{t=10s, x=0} \varphi = 5\pi \text{ rad}$$

$$\varphi = 2\pi(0,25t - 0,5x)$$

$$\xrightarrow{t=10s, x=3m} \varphi = 2\pi \text{ rad}$$

$$\varphi = 2\pi(0,25t - 0,5x)$$

$$\xrightarrow{t=10s, x=5m} \varphi = 0$$



• ΠΡΟΣΟΧΗ: Κάθε αύξηση της φάσης κατά $\frac{\pi}{2}$ απαιτεί χρόνο $\frac{T}{4}$ και το κύμα διαδίδεται κατά $\frac{\lambda}{4}$

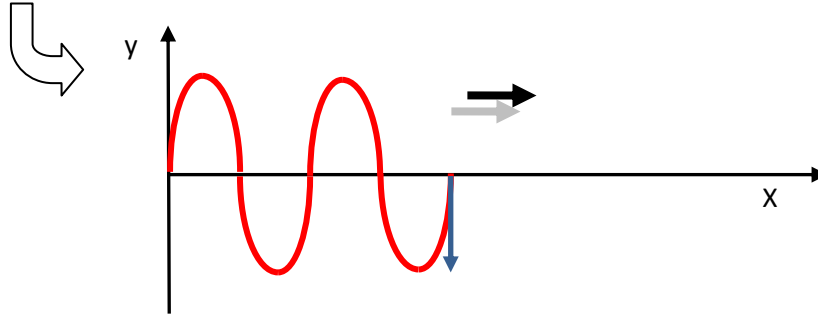
• ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Από τα παραπάνω σχήματα φαίνεται ότι οι ταλαντώσεις των σημείων του ελαστικού μέσου που βρίσκονται πιο κοντά την πηγή του κύματος έχουν κάθε χρονική στιγμή μεγαλύτερη φάση από τις αντίστοιχες των σημείων που βρίσκονται μακριά από την πηγή. Η πηγή έχει τη μεγαλύτερη φάση ενώ το υλικό σημείο που είναι έτοιμο να κινηθεί έχει φάση μηδέν.

16. Ένα κύμα δεν έχει αρχική φάση όταν τη χρονική στιγμή $t=0$ το σημείο που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων Ο ($x=0$) ξεκινά να ταλαντώνεται με $v = +v_{\max}$, δηλ όταν $t=0, x=0, v>0$.

Ένα κύμα έχει αρχική φάση όταν:

- το σημείο Ο που το θεωρούμε αρχή μέτρησης των αποστάσεων έχει αρχίσει να ταλαντώνεται πριν τη χρονική στιγμή που εμείς θεωρούμε $t=0$, οπότε τη χρονική στιγμή $t=0$ το κύμα έχει ήδη διαδοθεί σε κάποια απόσταση πέρα από το σημείο Ο.

- τη χρονική στιγμή $t=0$ το κύμα δεν έχει φτάσει στο σημείο Ο
- το σημείο Ο ξεκινά να ταλαντώνεται τη στιγμή $t=0$ με φορά προς τα κάτω και με ταχύτητα $v = -v_{\max}$. Το κύμα, στην περίπτωση αυτή, τη χρονική στιγμή $t=0$ δεν έχει διαδοθεί πέρα από το σημείο Ο, αλλά όλα τα σημεία του ελαστικού μέσου στα οποία φτάνει το κύμα ξεκινούν να ταλαντώνονται με φορά προς τα κάτω (δηλαδή έχουν αρχική φάση ίση με π). (Αρχική φάση π μπορούμε να έχουμε και στη 1^η περίπτωση)



17.

Όταν η ταλάντωση του σημείου Ο που το θεωρούμε αρχή μέτρησης των αποστάσεων έχει αρχική φάση τότε η εξίσωση του αρμονικού κύματος έχει τη μορφή:

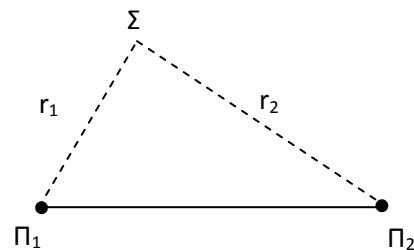
$$y = A\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right] \quad \text{ή} \quad y = A\eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda} + \frac{\varphi_0}{2\pi}\right)\right]$$

18. ΣΥΜΒΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ

Οι εξισώσεις ταλάντωσης του σημείου Σ χωρίζεται σε τρεις φάσεις.

1^η: Για $t \leq \frac{r_1}{v_{\text{διαδ}}}$ το σημείο Σ παραμένει ακίνητο γιατί δεν έχει φτάσει σ' αυτό κανένα κύμα ακόμη άρα: $y=0$

2^η: Για $\frac{r_1}{v_{\text{διαδ}}} \leq t < \frac{r_2}{v_{\text{διαδ}}}$ το σημείο Σ εκτελεί ταλάντωση μόνο λόγω του κύματος που προέρχεται από την πηγή Π₁, με εξίσωση: $y = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right)$



3^η: Για $t \geq \frac{r_2}{v_{\text{διαδ}}}$ το σημείο Σ εκτελεί ταλάντωση λόγω και των δύο κυμάτων με

$$\text{εξίσωση: } y = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{r_1-r_2}{2\lambda}\right)\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1+r_2}{2\lambda}\right) \quad (1)$$

$$\text{αν θέσουμε } A' = 2A\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{r_1-r_2}{2\lambda}\right) \text{ τότε η (1) γίνεται } y = A'\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1+r_2}{2\lambda}\right)$$

που παριστάνει (όπως και η σχέση 1) ΑΑΤ με πλάτος $|A'| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{r_1-r_2}{2\lambda}\right)\right|$
και φάση $\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1+r_2}{2\lambda}\right)$

19. ► Το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Σ μετά την συμβολή των κυμάτων δίνεται από τη σχέση $|A'| = 2A \left| \sin 2\pi \left(\frac{r_1 - r_2}{2\lambda} \right) \right|$ (2).

► Αν t_1 είναι η χρονική στιγμή που το κύμα της Π_1 φτάνει στο Σ και t_2 η χρονική στιγμή που το κύμα της Π_2 φτάνει στο Σ και $v_{\text{διαδ}}$ η ταχύτητα διάδοσης του κύματος στο μέσο, τότε ισχύουν οι σχέσεις: $r_1 = v_{\text{διαδ}} \cdot t_1$ και $r_2 = v_{\text{διαδ}} \cdot t_2$. Αντικαθιστώντας τα r_1 και r_2 στην (2) προκύπτει:

$$|A'| = 2A \left| \sin 2\pi \left(\frac{r_1 - r_2}{2\lambda} \right) \right| = 2A \left| \sin 2\pi \left(\frac{v_{\text{διαδ}} \cdot t_1 - v_{\text{διαδ}} \cdot t_2}{2\lambda} \right) \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |A'| = 2A \left| \sin 2\pi \left(\frac{v_{\text{διαδ}}(t_1 - t_2)}{2\lambda} \right) \right| \quad (3)$$

Επειδή ισχύει η σχέση $v_{\text{διαδ}} = \lambda \cdot f$ η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$|A'| = 2A \left| \sin \pi f (t_1 - t_2) \right| \quad (4)$$

► Για τη διαφορά φάσης των δύο κυμάτων στο Σ ισχύει:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi r_1}{\lambda} \right) - \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi r_2}{\lambda} \right) = \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) \Rightarrow \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) \text{ άρα η}$$

$$\text{σχέση (2) γράφεται: } |A'| = 2A \left| \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \right| \quad (5)$$

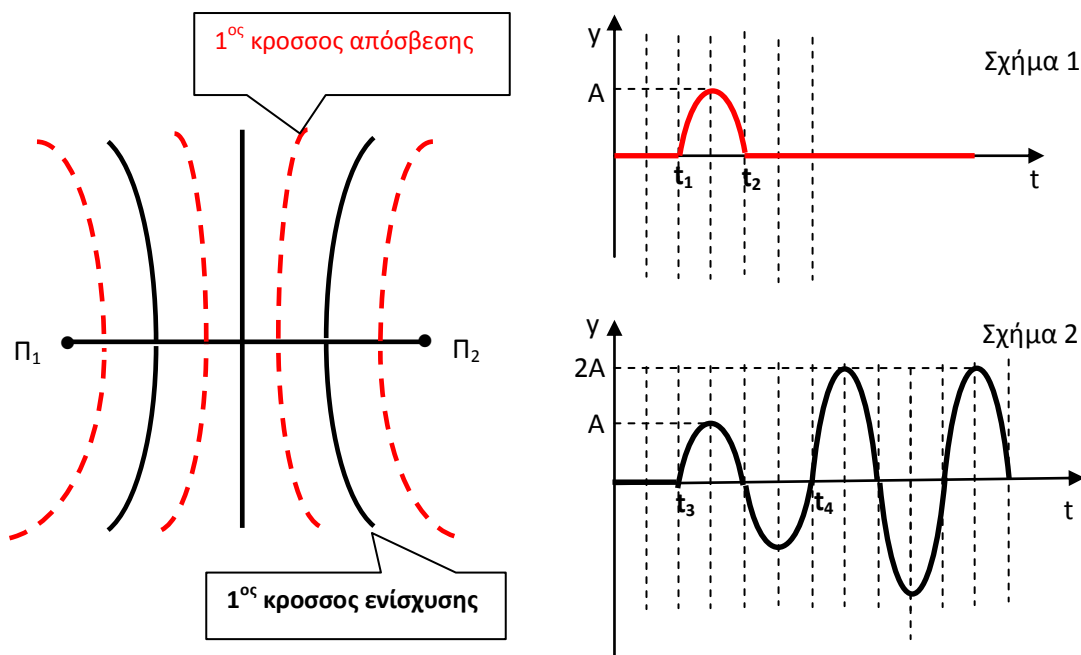
Από τα παραπάνω προκύπτει το συμπέρασμα ότι το πλάτος της ταλάντωσης βρίσκεται αν γνωρίζουμε:

- 1° : τη διαφορά των αποστάσεων $\Delta r = r_1 - r_2$ (σχέση 2)
- 2° : τη διαφορά των χρόνων άφιξης $\Delta t = t_1 - t_2$ των κυμάτων (σχέσεις 3, 4)
- 3° : τη διαφορά φάσης $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ των δυο κυμάτων (σχέση 5)

20. Αν ζητείται το είδος της συμβολής σ' ένα σημείο Σ. Μπορούμε να υπολογίσουμε το πλάτος της ταλάντωσης με τον τύπο: $|A'| = 2A \left| \sin 2\pi \left(\frac{r_1 - r_2}{2\lambda} \right) \right|$

- Αν $|A'| = 2A$, τότε έχουμε ενισχυτική συμβολή.
- Αν $|A'| = 0$, τότε έχουμε ακυρωτική συμβολή.
- Αν $0 \leq |A'| \leq 2A$, τότε δεν έχουμε ούτε ενίσχυση ούτε απόσβεση.

21.



► Το σχήμα 1 αναφέρεται σε ένα σημείο του 1^{ου} κροσσού απόσβεσης ή ακυρωτικής συμβολής. Παρατηρούμε ότι μέχρι τη στιγμή t_1 το σημείο δεν ταλαντώνεται γιατί δεν έφτασε κανένα κύμα. Από τη στιγμή t_1 μέχρι τη στιγμή t_2 ταλαντώνεται λόγω του κύματος που προέρχεται από την πηγή Π_2 . Από τη στιγμή t_2 και μετά εκτελεί σύνθετη ταλάντωση λόγω και των δύο κυμάτων. Τελικά παραμένει ακίνητο.

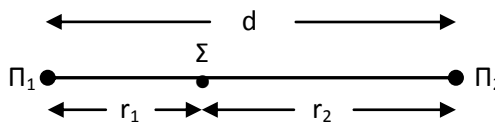
► Το σχήμα 2 αναφέρεται σε ένα σημείο του 1^{ου} κροσσού ενισχυτικής συμβολής. Παρατηρούμε ότι μέχρι τη στιγμή t_3 το σημείο δεν ταλαντώνεται γιατί δεν έφτασε κανένα κύμα. Από τη στιγμή t_3 μέχρι τη στιγμή t_4 ταλαντώνεται λόγω του κύματος που προέρχεται από την πηγή Π_2 . Από τη στιγμή t_4 και μετά εκτελεί σύνθετη ταλάντωση λόγω και των δύο κυμάτων.

22. Πως βρίσκουμε σε ποια σημεία του ευθυγράμμιου τμήματος που ενώνει τις δύο πηγές έχουμε **ενισχυτική συμβολή**.

Για όλα τα σημεία του μέσου στα οποία συμβαίνει ενισχυτική συμβολή όπως και για το Σ ισχύει η σχέση:

$$r_1 - r_2 = N\lambda \quad (1) \quad \text{με} \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Για το σημείο Σ του διπλανού σχήματος ισχύει ακόμη η σχέση: $r_1 + r_2 = d$ (2)



Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) & (2) προκύπτει:

$$r_1 - r_2 + r_1 + r_2 = d + N\lambda \Rightarrow 2r_1 = d + N\lambda \Rightarrow$$

$$r_1 = \frac{d}{2} + N\frac{\lambda}{2} \quad (3) \quad \text{με} \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\text{Πρέπει όμως } 0 \leq r_1 \leq d \Rightarrow 0 \leq \frac{d}{2} + N\frac{\lambda}{2} \leq d \Rightarrow -\frac{d}{2} \leq N\frac{\lambda}{2} \leq \frac{d}{2} \Rightarrow -\frac{d}{\lambda} \leq N \leq \frac{d}{\lambda} \quad (4)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Αν $d=9\text{m}$ και $\lambda=4\text{m}$ τότε από την σχέση (4) έχουμε $-2,25 \leq N \leq +2,25$

Άρα $N = 0, \pm 1, \pm 2$. Από την (3) για $N = 0, \pm 1, \pm 2$ προκύπτει :

για $N=-2$, $r_1=0,5\text{m}$

για $N=-1$, $r_1=2,5\text{m}$

για $N=0$, $r_1=4,5\text{m}$

για $N=+1$, $r_1=6,5\text{m}$

για $N=+2$, $r_1=8,5\text{m}$

23. Πως βρίσκουμε σε ποια σημεία του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει τις δύο πηγές έχουμε ακυρωτική συμβολή.

Για όλα τα σημεία του μέσου που έχουμε ακυρωτική συμβολή όπως και για το Σ

ισχύει: $r_1 - r_2 = (2N + 1) \frac{\lambda}{2}$ (5) με $N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Για το σημείο Σ ισχύει: $r_1 + r_2 = d$ (6)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (5) & (6) προκύπτει:

$$r_1 - r_2 + r_1 + r_2 = d + (2N + 1) \frac{\lambda}{2} \Rightarrow 2r_1 = d + (2N + 1) \frac{\lambda}{2} \Rightarrow$$

$$r_1 = \frac{d}{2} + (2N + 1) \frac{\lambda}{4} \quad (7) \quad \text{με } N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Πρέπει όμως $0 \leq r_1 \leq d \Rightarrow 0 \leq \frac{d}{2} + (2N + 1) \frac{\lambda}{4} \leq d \Rightarrow -\frac{d}{2} \leq (2N + 1) \frac{\lambda}{4} \leq \frac{d}{2} \Rightarrow$

$$-\frac{d}{\lambda} - \frac{1}{2} \leq N \leq \frac{d}{\lambda} - \frac{1}{2} \quad (8)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Αν $d=9\text{m}$ και $\lambda=4\text{m}$ τότε από την σχέση (8) έχουμε $-2,75 \leq N \leq +1,75$

Άρα $N = 0, \pm 1, -2$. Από την (7) για $N = 0, \pm 1, -2$ προκύπτει :

για $N=-2$, $r_1=1,5\text{m}$

για $N=-1$, $r_1=3,5\text{m}$

για $N=0$, $r_1=5,5\text{m}$

για $N=+1$, $r_1=7,5\text{m}$

24.

- Άρα δύο διαδοχικά σημεία, ένα ενισχυτικής και ένα ακυρωτικής συμβολής απέχουν $\frac{\lambda}{4}$

όπως προκύπτει αν αφαιρέσουμε τις σχέσεις (7) & (3)

- Το μέσο M του ευθυγράμμου τμήματος $\Pi_1\Pi_2$ και κάθε σημείο της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος είναι σημείο ενισχυτικής συμβολής, αν οι πηγές είναι σύγχρονες.

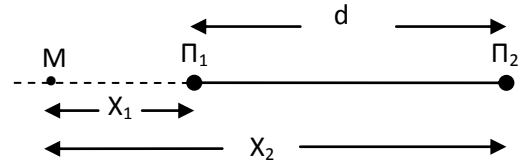
25.

Έστω ένα σημείο Μ της ευθείας που διέρχεται από τις πηγές και βρίσκεται εκτός του ευθυγράμμιου τμήματος $\Pi_1\Pi_2$. Μετά τη συμβολή το πλάτος της ταλάντωσης του υπολογίζεται από τη σχέση: $A' = 2A \left| \sin 2\pi \left(\frac{x_2 - x_1}{2\lambda} \right) \right|$

Όμως από το σχήμα προκύπτει $x_2 - x_1 = d$, άρα η προηγούμενη σχέση γράφεται: $A' = 2A \left| \sin \pi \left(\frac{d}{\lambda} \right) \right|$ (1)

► Αν $d = N\lambda$ τότε $A' = 2A$

► Αν $d = (2N + 1) \frac{\lambda}{2}$ τότε $A' = 0$



ΣΥΠΙΛΕΡΑΣΜΑ: Τα υλικά σημεία της ευθείας $x'x$ που διέρχεται από τις δύο πηγές και τα οποία δεν ανήκουν στο ευθύγραμμο τμήμα $\Pi_1\Pi_2$ ταλαντώνονται όλα με το ίδιο πλάτος που υπολογίζεται από τη σχέση (1)

26.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων δεν αλλάζει όταν αλλάζει η συχνότητα των δύο πηγών. Αντίθετα το μήκος κύματος αλλάζει και μάλιστα αντιστρόφως ανάλογα με την συχνότητα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: Αν ένα σημείο Σ είναι σημείο ενισχυτικής συμβολής και μας ζητούν να υπολογίσουμε την ελάχιστη νέα συχνότητα των δύο πηγών ώστε μεταβάλλοντας την αρχική τους συχνότητα (έτσι ώστε να παραμένουν σύγχρονες) το σημείο Σ να εξακολουθεί να είναι σημείο ενισχυτικής συμβολής, ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία:

Αφού το σημείο Σ θέλουμε να παραμείνει σημείο ενισχυτικής συμβολής πρέπει να ισχύει η σχέση: $r_1 - r_2 = N\lambda'$ (1) με $N = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$ όπου λ' το νέο μήκος κύματος.

Όμως από την θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής ισχύει $v_\delta = \lambda' \cdot f' \Rightarrow \lambda' = \frac{v_\delta}{f'}$

άρα η (1) γράφεται $r_1 - r_2 = N \frac{v_\delta}{f'}$ με $N = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$ ή $f' = \frac{N v_\delta}{r_1 - r_2}$ και η ελάχιστη συχνότητα για $N=1$ είναι $f' = \frac{v_\delta}{r_1 - r_2}$

27. Αν οι πηγές δεν είναι σύγχρονες, δηλαδή δεν αρχίζουν ταυτόχρονα την ταλάντωσή τους τότε θα παρουσιάζουν διαφορά φάσης θ οπότε οι εξισώσεις τους θα είναι:

$y_1 = A \sin \omega t$ για την πηγή Π_1 και $y_2 = A \sin(\omega t + \theta)$ για την πηγή Π_2 .

Οι αντίστοιχες εξισώσεις των δύο κυμάτων θα είναι:

$y_1 = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} \right)$ και $y_2 = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda} + \frac{\theta}{2\pi} \right)$ εφαρμόζοντας την αρχή της επαλληλίας $y = y_1 + y_2$ και με την βοήθεια της τριγωνομετρίας προκύπτει:

$$y = 2A \sin \pi \left(\frac{r_1 - r_2}{\lambda} + \frac{\theta}{2\pi} \right) \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{\lambda} + \frac{\theta}{4\pi} \right)$$

Τώρα οι θέσεις των κροσσών συμβολής είναι διαφορετικές και εξαρτώνται από τη γωνία θ. Αν ισχύει $\theta = \pi$ rad τότε η μία πηγή αρχίζει να ταλαντώνεται $T/2$ μετά την άλλη οπότε στη μεσοκάθετο όπου $r_1 = r_2$ θα βρίσκεται κροσσός απόσβεσης.

28. ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ

► Όταν οι εξισώσεις των δύο κυμάτων που δημιουργούν το στάσιμο κύμα είναι της μορφής: $y_1 = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$ και $y_2 = A\eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$

τότε το στάσιμο κύμα έχει εξίσωση της μορφής $y = 2A\sigma\upsilon\nu \frac{2\pi x}{\lambda} \eta\mu \frac{2\pi t}{T}$ και

στο σημείο Ο (x=0) δημιουργείται κοιλία.

► Για να διερευνήσουμε αν ένα σημείο Σ είναι δεσμός ή κοιλία

1^{ος} τρόπος: βρίσκουμε το πλάτος του με τον τύπο: $A_\Sigma = \left| 2A\sigma\upsilon\nu \frac{2\pi x_\Sigma}{\lambda} \right|$

Αν $A_\Sigma = 2A$, τότε το σημείο Σ είναι κοιλία

Αν $A_\Sigma = 0$, τότε το σημείο Σ είναι δεσμός

2^{ος} τρόπος: αν για την τετμημένη του σημείου ισχύει:

$x_\Sigma = N \frac{\lambda}{2}$ με $N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ τότε το σημείο Σ είναι κοιλία

$x_\Sigma = (2N + 1) \frac{\lambda}{4}$ με $N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ τότε το σημείο Σ είναι δεσμός

► Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών ισούται με $\frac{\lambda}{2}$

Η απόσταση ενός δεσμού από την πλησιέστερη σ' αυτόν κοιλία ισούται με $\frac{\lambda}{4}$

► Κάθε σημείο του μέσου της περιοχής συμβολής εκτελεί α.α.τ επομένως θα έχει ταχύτητα και επιτάχυνση λόγω της ταλάντωσης.

Όταν μας ζητούν να βρούμε την εξίσωση της ταχύτητας ή της επιτάχυνσης ενός υλικού σημείου, βρίσκουμε πρώτα τη χρονική εξίσωση απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας ($y = 2A\sigma\upsilon\nu \frac{2\pi x}{\lambda} \eta\mu \frac{2\pi t}{T}$ με το πρόσημο που προκύπτει) και μετά βρίσκουμε την εξίσωση

της ταχύτητας από τη σχέση $v = 2A\omega \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi x}{\lambda} \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi t}{T}$ και την εξίσωση της επιτάχυνσης από τη σχέση $a = -\omega^2 y$.

Το πλάτος ταλάντωσης του σημείου υπολογίζεται από τη σχέση $A' = \left| 2A\sigma\upsilon\nu \frac{2\pi x_\Sigma}{\lambda} \right|$ και η μέγιστη ταχύτητά του όταν διέρχεται από τη θέση ισορροπίας από τη σχέση $v = \left| 2A\omega \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi x}{\lambda} \right|$.

► Πώς βρίσκουμε αριθμό κοιλιών ή δεσμών που υπάρχουν σε ένα ευθύγραμμο τμήμα;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Έστω ότι σε ένα ελαστικό μέσο έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα με $\lambda = 0,4\text{m}$.

Α) Ένα σημείο Σ βρίσκεται στη θέση $x_\Sigma = 0,65\text{m}$. Να βρεθεί ο αριθμός των κοιλιών που υπάρχουν στο ευθύγραμμο τμήμα ΟΣ.

1^{ος} τρόπος: Γνωρίζουμε ότι στη θέση $x=0$ έχουμε κοιλία και ότι μετά το Ο έχουμε κοιλία ανά $\frac{\lambda}{2}$. Άρα κοιλίες έχουμε στις θέσεις: 0, +0,2m, +0,4m, +0,6m.

2^{ος} τρόπος: Επειδή θέλουμε το πλήθος των κοιλιών στο ευθύγραμμο τμήμα ΟΣ

θέτουμε τον περιορισμό: $0 \leq N \frac{\lambda}{2} \leq x_{\Sigma}$ ή $0 \leq 0,2N \leq 0,65$ ή $0 \leq N \leq 0,35$ άρα το N μπορεί να πάρει τις τιμές $N=0,1,2,3$.

Οπότε από τη σχέση $x_{\Sigma} = N \frac{\lambda}{2}$ για $N=0$ έχουμε $x=0$, για $N=1$ έχουμε $x=0,2\text{m}$, για $N=2$ έχουμε $x=0,4\text{m}$ και για $N=3$ έχουμε $x=0,6\text{m}$.

Β) Ένα σημείο M βρίσκεται στη θέση $x_M=0,7\text{m}$. Να βρεθεί ο αριθμός των δεσμών που υπάρχουν στο ευθύγραμμο τμήμα OM.

1^{ος} τρόπος: Γνωρίζουμε ότι στη θέση $x=0$ έχουμε κοιλία και ότι ο πλησιέστερος δεσμός στο O απέχει απόσταση $\frac{\lambda}{4}$. Στη συνέχεια έχουμε δεσμό ανά $\frac{\lambda}{2}$.

Άρα δεσμούς έχουμε στις θέσεις: $0,1\text{m} + 0,3\text{m}, +0,5\text{m}, +0,7\text{m}$.

2^{ος} τρόπος: Επειδή θέλουμε το πλήθος των κοιλιών στο ευθύγραμμο τμήμα OΣ θέτουμε τον περιορισμό: $0 \leq (2N+1) \frac{\lambda}{4} \leq x_{\Sigma}$ ή $0 \leq 0,2N + 0,1 \leq 0,7$ ή

$-0,1 \leq 0,2N \leq 0,6$ ή $-0,5 \leq N \leq 3$ άρα το N μπορεί να πάρει τις τιμές $N=0,1,2,3$

Οπότε από τη σχέση $x_M = (2N+1) \frac{\lambda}{4}$ για $N=0$ έχουμε $x=0,1\text{m}$ για $N=1$ έχουμε $x=0,3\text{m}$, για $N=2$ έχουμε $x=0,5\text{m}$ και για $N=3$ έχουμε $x=0,7\text{m}$.

► Πώς σχεδιάζουμε στιγμιότυπα στάσιμου κύματος;

Πρώτα βρίσκουμε τις θέσεις των κοιλιών και των δεσμών που βρίσκονται μεταξύ των σημείων που θέλουμε να σχεδιάσουμε το στιγμιότυπο.

Μετά εντοπίζουμε την απομάκρυνση ενός υλικού σημείου για το οποίο διαθέτουμε πληροφορίες τη χρονική στιγμή για την οποία θα σχεδιάσουμε το στιγμιότυπο. Μετά σχεδιάζουμε το στιγμιότυπο έχοντας υπόψη μας ότι:

α) τα υλικά σημεία που βρίσκονται σε δεσμούς δεν ταλαντώνονται ενώ οι κοιλίες βρίσκονται σε πλάτος $2A$,

β) όλα τα υλικά σημεία που ταλαντώνονται φτάνουν ταυτόχρονα σε μέγιστη απομάκρυνση και ότι δύο διαδοχικές κοιλίες έχουν αντίθετες απομακρύνσεις

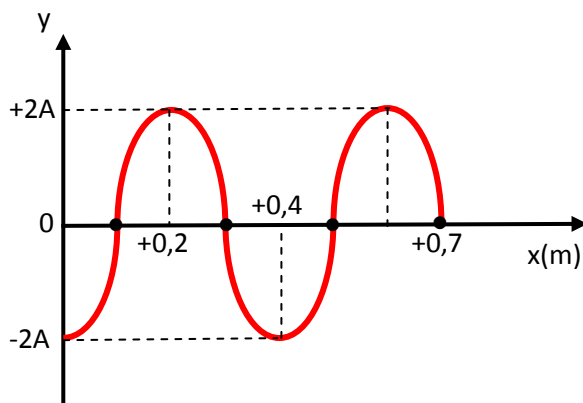
γ) Όλα τα υλικά σημεία που ταλαντώνονται περνούν ταυτόχρονα από τη θέση ισορροπίας τους με τις κοιλίες να περνούν με αντίθετες μέγιστες κατά μέτρο ταχύτητες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: Να σχεδιάσουμε το στιγμιότυπο του κύματος του προηγούμενου παραδείγματος μεταξύ των σημείων O και M ($x_M=0,7\text{m}$) τη στιγμή που η πλησιέστερη στο O κοιλία βρίσκεται στη μέγιστη θετική απομάκρυνση.

Η πλησιέστερη κοιλία στο O βρήκαμε ότι βρίσκεται τη θέση $0,2\text{m}$.

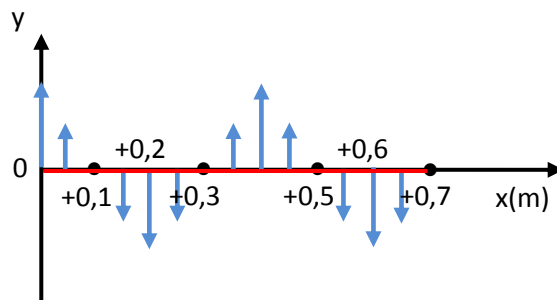
Στο σημείο $0,7\text{m}$ βρήκαμε ότι υπάρχει δεσμός.

Άρα το στιγμιότυπο φαίνεται το διπλανό σχήμα.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: Να σχεδιάσουμε το στιγμιότυπο του κύματος τη στιγμή που το σημείο Ο που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα.

Επειδή το σημείο Ο αντιστοιχεί σε κοιλία και διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του σημαίνει όλα τα σημεία διέρχονται από τη θέση ισορροπίας τους. Οι διαδοχικές κοιλίες γνωρίζουμε ότι κινούνται αντίθετα και οι δεσμοί είναι πάντοτε ακίνητοι, άρα προκύπτει το διπλανό στιγμιότυπο.



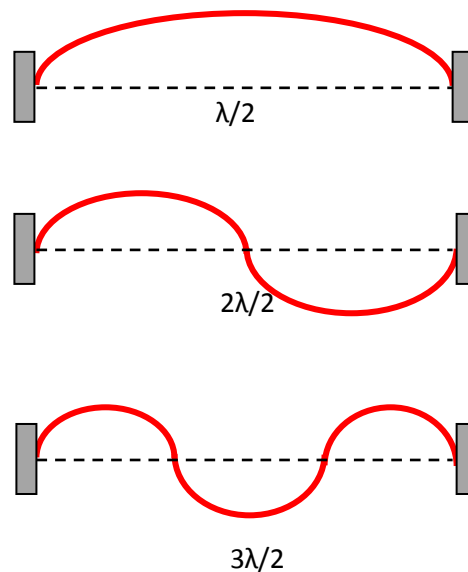
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Τα σημεία που βρίσκονται μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών λέμε ότι βρίσκονται στην ίδια άτρακτο. Όλα τα σημεία που βρίσκονται στην ίδια **άτρακτο** φτάνουν ταυτόχρονα στη μέγιστη θετική ή αρνητική απομάκρυνση άρα έχουν **μηδενική διαφορά φάσης** αντίθετα σημεία που βρίσκονται σε δύο διαδοχικές άτρακτους φτάνουν ταυτόχρονα σε ακραία θέση αλλά όταν το ένα στην ακραία θετική το άλλο είναι στην ακραία αρνητική. Οι ταλαντώσεις των σημείων αυτών έχουν **διαφορά φάσης π rad**.

Γενικά αν μεταξύ δύο σημείων δεν υπάρχει δεσμός ή υπάρχει άρτιος αριθμός δεσμών, τότε οι ταλαντώσεις των σημείων δεν εμφανίζουν διαφορά φάσης. Αν μεταξύ δύο σημείων υπάρχει περιττός αριθμός δεσμών, τότε οι ταλαντώσεις των σημείων εμφανίζουν διαφορά φάσης π rad.

29. Δημιουργία στάσιμου κύματος σε χορδή με ακλόνητα άκρα.

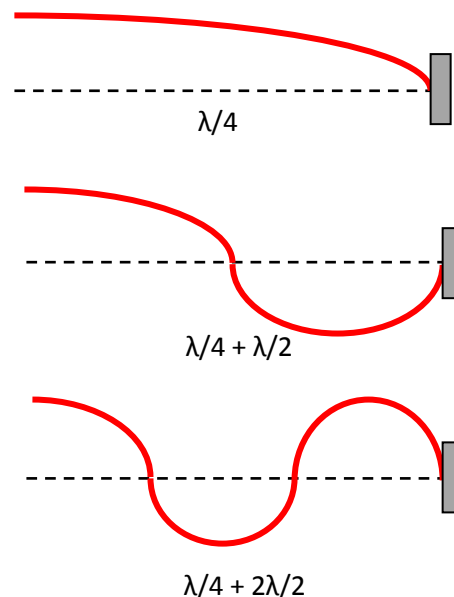
Όταν ένα στάσιμο κύμα δημιουργείται σε χορδή με ακλόνητα άκρα, τότε τα άκρα της χορδής είναι υποχρεωτικά δεσμοί. Επομένως το μήκος L της χορδής αντιστοιχεί σε $1, 2, 3, \dots \lambda/2$. Άρα μπορούμε να γράψουμε

$$L = N \frac{\lambda}{2} \quad \text{όπου } N = 0, 1, 2, 3, \dots$$

**30.** Δημιουργία στάσιμου κύματος σε χορδή με ένα άκρο ακίνητο και το άλλο ελεύθερο.

Όταν ένα στάσιμο κύμα δημιουργείται σε χορδή με ένα άκρο ακλόνητο και ένα ελεύθερο, τότε το ακλόνητο άκρο της χορδής είναι υποχρεωτικά δεσμός. Επομένως το μήκος L της χορδής αντιστοιχεί σε ακέραιο πολλαπλάσιο πλήθος $\lambda/2$ και $\lambda/4$. Άρα μπορούμε να γράψουμε

$$L = \frac{\lambda}{4} + N \frac{\lambda}{2} \quad \text{όπου } N = 0, 1, 2, 3, \dots$$

**31.** ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

► Σε ένα αρμονικό ηλεκτρομαγνητικό κύμα οι εξισώσεις της έντασης του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου έχουν την μορφή

$$E = E_{\max} \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad \text{και} \quad B = B_{\max} \eta \mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

αντίστοιχα και ισχύουν μακριά από την πηγή.

- Οι στιγμιαίες τιμές (και οι μέγιστες) της έντασης του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου για κύμα που διαδίδεται στο κενό ικανοποιούν την σχέση

$$c = \frac{E}{B} = \frac{E_{\max}}{B_{\max}}$$

Στην περίπτωση που το κύμα διαδίδεται σε κάποιο υλικό οι προηγούμενες σχέσεις

γράφονται:
$$v = \frac{E_{\text{υλικού}}}{B_{\text{υλικού}}} = \frac{E_{\max(\text{υλικού})}}{B_{\max(\text{υλικού})}}$$

- Μονάδα του E στο S.I είναι το 1N/C ή το 1V/m
Μονάδα του B στο S.I είναι το 1T(Tesla)

- Για να συντονιστεί ένας δέκτης (π.χ ραδιόφωνο) με ένα πομπό (π.χ ραδιοφωνικό σταθμό) θα πρέπει η ιδιοσυχνότητα $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ του δέκτη να γίνει ίση με την συχνότητα του πομπού.