

Ασκήσεις στο Θ. Rolle και στο Θ.Μ.Τ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\rightarrow\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει το Θ. Rolle.

Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια, ώστε να ισχύει $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$.

2. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g ορισμένες και παραγωγίσιμες στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, με $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και $a > 0$.

Επίσης, $f(x) \neq -g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, $f(\alpha) = g(\beta)$ και $f(\beta) = g(\alpha)$.

i) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = -g'(\xi)$.

ii) Αν h συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με τύπο $h(x) = \frac{f(x) + g(x)}{x}$,

να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $h'(\xi) = \frac{-(f+g)'(\xi)}{\xi^2}$.

iii) Η εφαπτομένη στο σημείο $(\xi, h(\xi))$ της γραφικής παράστασης C της h δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

3. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[2, 3]$, παραγωγίσιμη στο διάστημα $(2, 3)$ και $f(3) = f(2) + 19$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (2, 3)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $f'(\xi) = 10\xi - 6$.

4. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,1]\rightarrow[0,1]$ με $f(0)=0$, $f(1)=1$ και η συνάρτηση g ορισμένη στο διάστημα $[0,1]$ με $g(x)=f(x)-(1-x)$.
Να δείξετε ότι :

α) Υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $g(\xi)=0$. β) Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0,1)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοια, ώστε να ισχύει $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = 1$.

5. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $f'(x) > f(a)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $f(a+1) > 2f(a)$.

6. Έστω η συνάρτηση $f:[1,4]\rightarrow\mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη.

Αν για κάθε $x \in [1,4]$ ισχύει $f\left(\frac{4}{x}\right) = 4f\left(\frac{1}{x}\right)$ και είναι $f\left(\frac{25}{100}\right) = 1$,

να δείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2, x_3 \in (1,4)$, ώστε $f'(x_1) + f'(x_2) + f'(x_3) = 12$.

7. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[x_0 - 1, x_0 + 3]$, παραγωγίσιμη στο

$(x_0 - 1, x_0 + 3)$ και η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = f(x) + \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}x_0 - \frac{9}{2}$.

Αν $f(x_0 - 1) = -3$ και $f(x_0 + 3) = 7$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν

$\xi_1, \xi_2 \in (x_0 - 1, x_0 + 3)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ ώστε να ισχύει $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = \frac{25}{4}$.

8. Έστω συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με $\alpha > 0$ και $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Να δείξετε ότι :

i) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $\xi f'(\xi) = f(\xi)$.

ii) Αν $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε το ξ είναι μοναδικό.

iii) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

9. Έστω συνάρτηση $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0, 2]$ και $f(0) = 1, f(2) = 2$. Να δείξετε ότι :

i) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $2f(x_0) = 3$.

ii) Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, 2)$, τέτοια, ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 4f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2)$.

10. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με f' συνεχή

και $f(0) = 1, f(1) = 2$ και $f'(2) = 0$. Να δείξετε ότι :

i) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της c_f , στο σημείο με τετμημένη x_0 , είναι παράλληλη στη διχοτόμο $1^{\eta\varsigma}$ και $3^{\eta\varsigma}$ γωνίας.

ii) Υπάρχει $\xi \in (0, 2)$, τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \kappa$, όπου κ πραγματικός με $\kappa \in (0, 1)$.

11. Έστω συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f(0) = 1, f(1) = 0$. Να δείξετε ότι :

i) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = x_0$.

ii) Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, 1)$, τέτοια, ώστε $f(\xi_1) \cdot f(\xi_2) = 1$.