

1. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$x \cdot f'(x) = (x^2 + x) \cdot e^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0)=1.$$

i. Να δείξετε ότι $f(x) = x \cdot e^x + 1, x \in \mathbb{R}$.

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\xi_1, \xi_2 \in (-1, 1)$ τέτοιοι, ώστε να ισχύει

$$e^{\xi_1 + \xi_2} = \frac{1}{(\xi_1 + 1) \cdot (\xi_2 + 1)}.$$

2. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f'(x) + (f(x) + x \cdot f'(x)) \cdot x = \sqrt{x^2 + 1} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0)=0.$$

i. Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, x \in \mathbb{R}$

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $x_1, x_2 \in (-1, 1)$ τέτοιοι, ώστε να ισχύει

$$f'(x_1) + f'(x_2) = \sqrt{2}.$$

iii. Να βρείτε τα όρια της f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

iv. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (-1, 1)$ τέτοιο, ώστε $2f(x_0)=1$.

v. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\xi_1, \xi_2 \in (-1, 1)$ τέτοιοι, ώστε να ισχύει

$$\frac{\sqrt{2} + 1}{f'(\xi_1)} + \frac{\sqrt{2} - 1}{f'(\xi_2)} = 4.$$

3. Έστω $f: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε για κάθε $x > 1$ να ισχύει

$$xf(x)f'(x) = \frac{1}{2} \text{ και } f(e) = 1.$$

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f^2(x) - \ln x, x > 1$ είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της f .

Έστω $f(x) = \sqrt{\ln x}, x > 1$.

ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(-e, 0)$ και $B(e, 1)$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο B . iii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 1$ ισχύει

$$\frac{1}{x+1} < f^2(x+1) - f^2(x) < \frac{1}{x}.$$

4. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$(x^2 + 1) \cdot f'(x) = (x - 1)^2 f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = e$. Επίσης δίνεται η συνάρτηση $g(x) = (x^2 + 1) \cdot f(x)$.

i. Να δείξετε ότι $g(x) = c \cdot e^x, x \in \mathbb{R}$

ii. Να βρείτε τον τύπο της f .

Αν $f(x) = \frac{e^{x+1}}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$

iii. Να βρείτε τα όρια της f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

iv. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $x_0 = f^{-1}(2024)$.

5. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

➤ $x \cdot f'(x) - f(x) = x^2 \cdot e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

➤ Η γραφική παράσταση C_f έχει εφαπτομένη, στην αρχή των αξόνων, την $\psi = 2x$.

i. Να δείξετε ότι $f(x) = x \cdot (e^x + 1), x \in \mathbb{R}$.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών.

iii. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{\ln 2} f(x) dx$.