

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} e^{x+\alpha} & , x \leq 0 \\ \ln(x+1) + \beta & , x > 0 \end{cases}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

i) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β .

ii) Για $\alpha=0$ και $\beta=1$, να εξετάσετε αν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θ.Μ.Τ για την συνάρτηση f στο διάστημα $[-\ln 2, e-1]$ και στην συνέχεια να δείξετε ότι υπάρχουν δυο ακριβώς τιμές του $\xi \in (-\ln 2, e-1)$, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(e-1) - f(-\ln 2)}{e-1 + \ln 2}.$$