

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

**2^ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ - ΘΕΜΑΤΑ (Κεφάλαια 2)
[Κεφάλαιο 1 Μέρος Β' του σχολικού βιβλίου]**

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

Τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = \eta$.

(Μονάδες 10)

A2.

- 1) Διατυπώστε το Θεώρημα του Bolzano για μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.

(Μονάδες 3)

- 2) Πότε μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

(Μονάδες 2)

A3. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις με **Σωστό (Σ)**, αν είναι σωστή, ή με **Λάθος (Λ)**, αν είναι λανθασμένη:

α) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα

β) Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και αυτές είναι υποχρεωτικά ίσες.

γ) Μία συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

δ) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

ε) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $0 < f(x) < 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η

συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{f^2(x) + 1}$.

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f .
(Μονάδες 5)
2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσα και 1-1.
(Μονάδες 5)
3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(g(x^3 + 1)) = f(g(4x^2 + 2x))$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες και μια αρνητική ρίζα.
(Μονάδες 10)
4. Να επιλυθεί η ανίσωση $(f \circ g)(x^3 + 4) > (f \circ g)(3x^2)$.
(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1) - x$.

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
(Μονάδες 3)
2. Να βρείτε το πρόσημο της f .
(Μονάδες 4)
3. Μελετήστε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
(Μονάδες 5)
4. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και βρείτε την $f^{-1}(x)$.
(Μονάδες 4)
5. Αν $h(x) = \ln \frac{1}{x}$, αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 > 0$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = h(x_0)$.
(Μονάδες 5)
6. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(1)x^3 + x^2 + 2}{f(2)x^2 - x + 1}$.
(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει $f^3(x) + 2f(x) = x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1.
(Μονάδες 3)
2. Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της.
(Μονάδες 5)
3. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης με το άξονα $x'x$.
(Μονάδες 3)
4. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
(Μονάδες 4)
5. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = -1$.
(Μονάδες 4)

6. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

Καλή επιτυχία

Η επιμέλεια των θεμάτων πραγματοποιήθηκε από τους **Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο** και **Μοτσάκο Βασίλειο**.