

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
5^ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ - ΘΕΜΑΤΑ
[Κεφάλαια 1, 2 Μέρος Β' του σχολικού βιβλίου]**

ΘΕΜΑ Α

1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 10

2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Μονάδες 5

3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις σαν Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ):

(1) Αν η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε η f δεν είναι συνεχής στο x_0 .

(2) Αν η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

(3) Αν δεν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 , τότε, δεν μπορεί να υπάρχει το όριο της συνάρτησης $f + g$ στο x_0 .

(4) Αν υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$, τότε υπάρχει και το όριο της g στο x_0 .

(5) Αν $f(x) = x^x$, $x > 0$, τότε $f'(x) = x \cdot x^{x-1}$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει η σχέση: $f(f(x)) = 2g(x) - x$.

1. Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

2. Να βρείτε το είδος μονοτονίας της $h(x) = f(x) - g(x)$.

Μονάδες 5

3. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f(x_0) = x_0$.

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g τέμνονται σε ένα μόνο σημείο.

Μονάδες 5

β) Να λύσετε την εξίσωση: $f(f(x + x_0 - 2)) + x + x_0 = 2f(x + x_0 - 2) + 2$.

Μονάδες 5

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $f(f(\ln x + x_0 + 1)) + \ln x + 1 < x_0$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x} & , \quad -1 \leq x < 0 \\ \alpha^2 \ln(x+e) + 2\alpha + (\beta^2 + \frac{1}{2})e^x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$

όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, να βρείτε τις τιμές των α και β .

Μονάδες 8

2. Αν $\alpha = -1$ και $\beta = 0$,

α) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) + 1}{x + 1}$.

Μονάδες 5

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον θετικό ημιάξονα Ox σε ένα τουλάχιστον σημείο.

Μονάδες 6

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \left(xf(x) \ln \frac{1}{x} \right)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$.

1. α) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2) - 1}{x}$

Μονάδες 4

β) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(2x) - 1}{x} = 4f'(0)$

Μονάδες 4

2. Αν επιπλέον για την f ισχύει, $f^2(x) - 4f(x) = x^2 - 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε τον τύπο της.

Μονάδες 7

3. Αν $f(x) = 2 - \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f , οι οποίες διέρχονται από το σημείο $B\left(0, \frac{3}{2}\right)$.

Μονάδες 6

β) Έστω σημείο M της C_f με θετική τετμημένη. Αν η τετμημένη του M απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων O με ταχύτητα 2cm/sec , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OAM .

Μονάδες 4

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών:

Το θέμα Β επιμελήθηκε ο Αρετάκης Δημήτριος, Μαθηματικός- MSc του ΓΕΛ Καστρισιού Πατρών.

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο, Μοτσάκο Βασίλειο και Σούγελα Ελένη.